# Элементы теории случайных процессов


Будак Владимир Павлович,

Национальный исследовательский университет «МЭИ»
кафедра светотехники

□: +7 (095) 763-5239 BudakVP@mpei.ru

# Случайные сигналы в ОЭС

1. Световое поле любого реального источника есть статистический сигнал – частичная когерентность
2. Фоны имеют сложную структуру случайно изменяющуюся по пространству и времени:
   - Волнений водной поверхности
   - Изменение прозрачности атмосферы
   - Природные фоны: лес, поля, горы – изменяются от места к месту по вероятностному закону
3. Шумы приемной аппаратуры

*Случайность появляется всегда для систем с бесконечным числом свободы – атомарное строение вещества*

# Задачи с равновероятными исходами

Основные понятия теории вероятности – анализ азартных игр – задачи с равновероятными исходами:

- Вероятность орел – решка: *P*(о)= *P*(р)=1/2;
- Грань игральной кости: *P*(г)=1/6;
- Карта из колоды: *P*(к) =1/32;

В случае равновероятных исходов вероятность события *A*:

$$P(A) = \frac{1}{\text{общее число исходов}}$$

В такой системе возможны и более сложные ситуации – вероятность двух тузов в прикупе:

$$P(A) = \frac{C_4^2}{C_{32}^2} = \frac{\dfrac{4!}{2!2!}}{\dfrac{32!}{2!30!}} = \frac{3 \cdot 4}{31 \cdot 32} \approx 0.0125$$

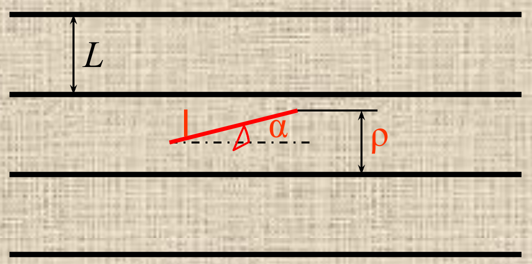
Общее определение вероятности по Laplace (Pierre-Simon, 1749–1827) для систем с равновероятными исходами:

$$P(A) = \frac{\text{число благоприятных исходов}}{\text{общее число исходов}}$$

*Системы с бесконечным числом исходов*

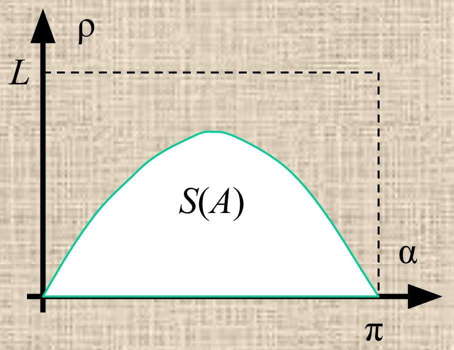
# Геометрическая вероятность

Hall A. On an experimental determinition of π. – Messeng. Math., 1873, V2. P.113:




$$\rho \in [0, L], \;\; \alpha \in [0, \pi]$$

$$\rho \le l \;\; \sin\alpha - \textit{условие пересечения}$$




Определим некоторую меру события, которая пропорцианальна площади:

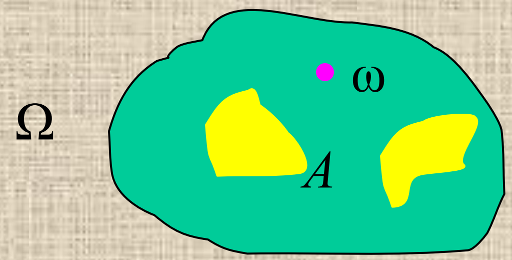
$$P(A) = \frac{S(A)}{S_0} = \frac{l}{\pi L}\int_0^{\pi} \sin\alpha \, d\alpha = \frac{2l}{\pi L} \qquad \Longrightarrow \qquad P(A) = \frac{n(A)}{N} \;\Rightarrow\; \pi \approx \frac{2l}{L}\frac{N}{n(A)}$$

Частотное определение вероятности Mises Richard (1883, Львов - 1953, Бостон):

$$\textit{частота} = \frac{n(A)}{N} \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} P(A)$$

*Что такое предел экспериментальной величины с точки зрения математической теории?*

# Вероятностное пространство




I. Задано пространство Ω элементарных событий (исходов) ω: $\omega \in \Omega$;

II. Событие *A* является множеством ω и подмножеством Ω – существует набор правил, по которым из элементов ω можно образовывать систему подмножеств – алгебра □;

III. Введена мера множества события *A*, удовлетворяющая правилам:

1. $1 \geq P(A) \geq 0$: $P(\Omega)=1$, $P(□)=0$
2. $\left(\forall A_i,\ i \in \overline{1,n}\right)\left(A_i \cap A_j = \varnothing,\ \forall i, j \in \overline{1,n},\ i \neq j\right) : \left(P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)\right)$

*Хорошо для математики, но неясна связь с физикой - частотой события*

# Случайная величина

- Случайная величина: функция $\xi = \xi(\omega)$, $\omega \in \Omega$ на заданном вероятностном пространстве ($\Omega$, □,$P$);
- Случайная величина сама является случайным событием на вероятностном пространстве (X, □,$P_\xi$) – *непосредственно заданная случайная величина*;
- Алгебра □ есть система интервалов на некотором сегменте X;
- $P_\xi$(B)= $P$($\xi \in$B);
- Случайная величина может быть:

$$1.\textit{непрерывной}: P_\xi(dx) = p_\xi(x)dx \Rightarrow \int_{(X)} p_\xi(x)dx = 1$$

$$2.\textit{дискретной}: P_\xi(dx) = P_\xi(x)\sum_{i=1}^{n}\delta(x - x_i) \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} P_\xi(x_i) = 1$$

*что позволяет не разделять непрерывную и дискретную случайные величины*

# Моменты случайной величины

$$\mathbf{M}\xi = \int\limits_{(\Omega)} \xi(\omega) P(d\omega) = \int\limits_{(X)} x P_\xi(dx) = \int\limits_{(X)} x p_\xi(x) dx$$ - математическое ожидание (среднее)

1. $\mathbf{M}c = c;$
2. $\mathbf{M}c\xi = c\mathbf{M}\xi;$
3. $\mathbf{M}(\xi_1 + \xi_2) = \mathbf{M}\xi_1 + \mathbf{M}\xi_2;$
4. $\mathbf{M}(\xi_1 \cdot \xi_2) = \mathbf{M}\xi_1 \cdot \mathbf{M}\xi_2$

$$\mathbf{M}\xi^n = \int\limits_{(X)} x^n p_\xi(x) dx$$

Центральные моменты случайной величины:

$$\mathbf{M}(\xi - \mathbf{M}\xi)^n = \int\limits_{(X)} (x - \mathbf{M}\xi)^n p_\xi(x) dx$$

Важнейшей из которых является дисперсия: $$\mathbf{D}\xi = \int\limits_{(X)} (x - \mathbf{M}\xi)^2 p_\xi(x) dx$$

$$\mathbf{D}\xi = \mathbf{M}(\xi - \mathbf{M}\xi)^2 = \mathbf{M}\left(\xi^2 - 2\xi\mathbf{M}\xi + (\mathbf{M}\xi)^2\right) = \mathbf{M}\xi^2 - (\mathbf{M}\xi)^2;$$

1. $\mathbf{D}c = 0;$
2. $\mathbf{D}c\xi = c^2\mathbf{D}\xi;$
3. $\mathbf{D}(\xi_1 + \xi_2) = \mathbf{D}\xi_1 + \mathbf{D}\xi_2;$

*Моменты позволяют оценить не саму величину, а ее распределение*

# Неравенство Чебышева

Чебышев Пафнутий Львович (1821–1894): $(\forall\varepsilon>0):\left(P\left\{\left|\xi-\mathbf{M}\xi\right|>\varepsilon\right\}\le\dfrac{\mathbf{D}\xi}{\varepsilon^2}\right)$

$$\mathbf{D}\xi=\int\limits_{(X)}(x-\mathbf{M}\xi)^2P_\xi(dx)\ge\int\limits_{|\xi-\mathbf{M}\xi|>\varepsilon}(x-\mathbf{M}\xi)^2P_\xi(dx)\ge\varepsilon^2\int\limits_{|\xi-\mathbf{M}\xi|>\varepsilon}P_\xi(dx)=\varepsilon^2P\left\{\left|\xi-\mathbf{M}\xi\right|>\varepsilon\right\}$$

Для дополнительного события: $(\forall\varepsilon>0):\left(P\left\{\left|\xi-\mathbf{M}\xi\right|\le\varepsilon\right\}>1-\dfrac{\mathbf{D}\xi}{\varepsilon^2}\right)$

Специальная случайная величина:

$$\zeta=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\xi_i,\ (\forall\xi_i,\ i\in\overline{1,N}):\left[(\mathbf{M}\xi_i=a)\Lambda(\mathbf{D}\xi_i=\sigma^2)\right]$$

$$\mathbf{M}\zeta=\mathbf{M}\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\xi_i\right)=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\mathbf{M}\xi_i=a,\ \mathbf{D}\zeta=\mathbf{D}\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\xi_i\right)=\frac{1}{N^2}\sum_{i=1}^{N}\mathbf{D}\xi_i=\frac{\sigma^2}{N}$$

$$P\left\{\left|\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\xi_i-a\right|\le\varepsilon\right\}>1-\frac{\sigma^2}{N\varepsilon^2}\ \Rightarrow\ \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\xi_i\xrightarrow[N\to\infty]{P}a$$

*Экспериментальное определение (измерение) математического ожидания*

# Закон больших чисел в форме Bernoulli

Bernoulli Jacob (1654 - 1705):

$\xi_i$ – индикатор события $A$:

$$\xi_i = \begin{cases} 1, \text{ если произошло } A, \\ 0, \text{ если не произошло } A. \end{cases}$$

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\xi_i = \frac{n(A)}{N}$$ - частота события $A$.

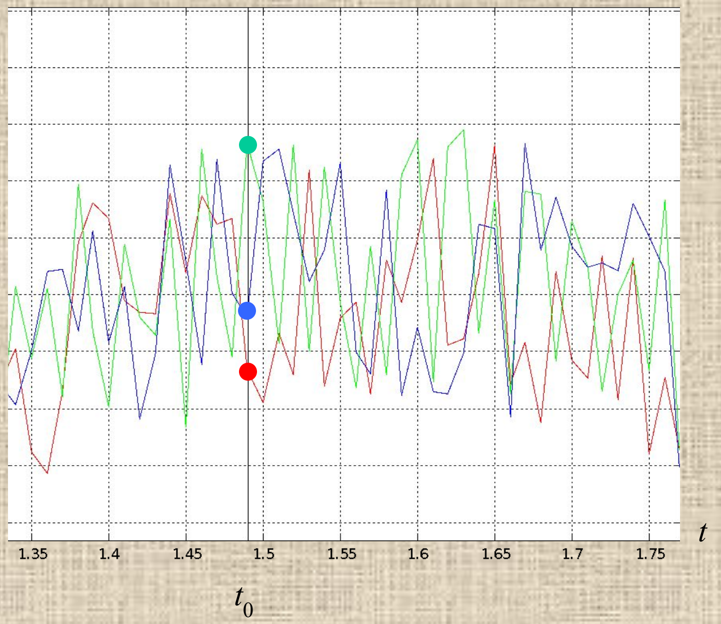
$$\mathbf{M}\xi_i = \int\limits_{(\Omega)} \xi_i P_\xi(d\omega) = \int\limits_{\substack{\text{по всем} \\ \omega\in A}} P_\xi(d\omega) = P(A)$$

$$P\left\{\left|\frac{n(A)}{N} - P(A)\right| \le \varepsilon\right\} > 1 - \frac{\sigma^2}{N\varepsilon^2} \Rightarrow \frac{n(A)}{N} \xrightarrow[N\to\infty]{P} P(A)$$

*Закон больших чисел является мостиком, соединяющим математическую теорию с физическим содержанием*

# Случайные функции

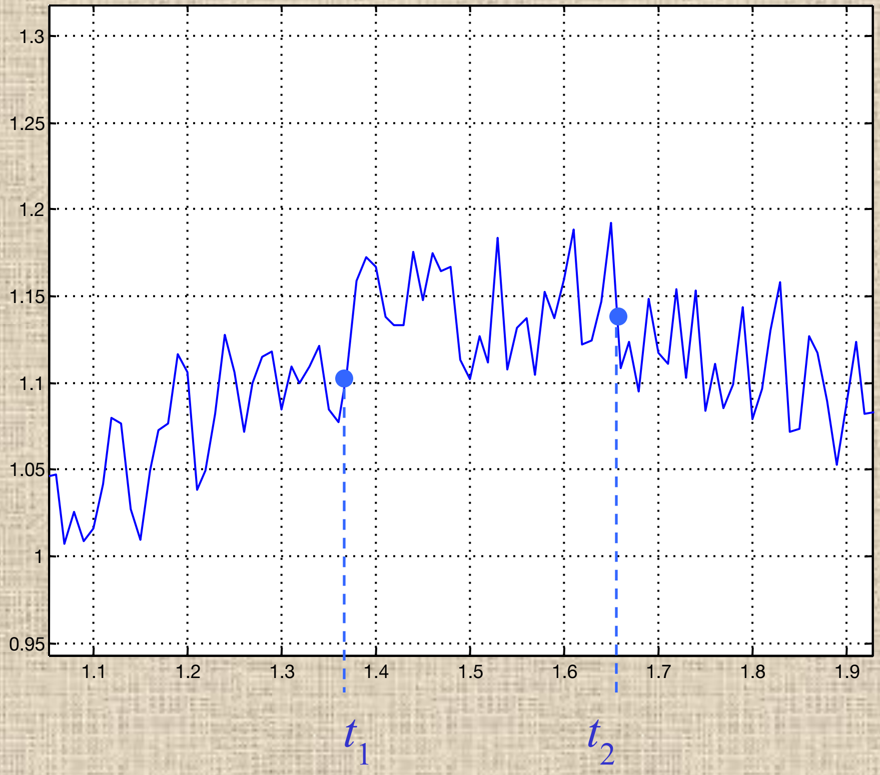
$\xi(t) = \xi(t,\omega)$, $\omega \in \Omega$ на заданном вероятностном пространстве ($\Omega$, □,$P$), $t \in T$




- $t$ – одномерная величина (время) – случайный процесс;
- $t$ – многомерная величина (радиус-вектор **r**) – случайное поле
- $\xi = \xi(t,\omega_0)$ – реализация случайного процесса – осциллограмма тока или напряжения
- $\xi = \xi(t_0,\omega)$ – случайная величина, для которой можно ввести **M**$\xi(t)$, **D**$\xi(t)$ – функции параметра $t$

*Можно ввести и вероятность $P_\xi$ (t,ω),*
*но она не будет характеризовать процесс*

# Многомерные распределения




Для определения процесса необходимо знать вероятность того, что $\xi$ в момент времени $t_1$ будет иметь значение $x_1$, а в момент времени $t_2$ будет иметь значение $x_2$, …

$$P_n\left(t_1, x_1; t_2, x_2; \ldots; t_n, x_n\right) = P_n\left(x_1 \le \xi(t_1) \le x_1 + \Delta x_1; \ldots; x_n \le \xi(t_n) \le x_n + \Delta x_n\right)$$

*Для полной характеристики* ПРОЦЕССА *нужно знать сколь угодно мерное распределение, что невозможно*