ГЛАВА 1

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

§1.1.Предмет теории вероятностей

Современная теория вероятностей – это раздел математической науки, изучающей закономерности случайных явлений.

Случайное явление – это такое явление, которое при многократном повторении при одних и тех же условиях протекает каждый раз несколько по иному. Как математическая наука теория вероятностей возникла, развивалась и развивается из потребностей практики и в абстрактной форме отражает закономерности, присущие объективным случайным явлениям массового характера. Поэтому методы теории вероятностей используются только для исследования случайных массовых явлений.

Применение методов теории вероятностей:

- теория надежности ;
- теория массового обслуживания ;
- теоретическая физика;
- геодезия ;
- астрономия ;
- теория стрельбы ;
- теория ошибок наблюдений ;
- теория автоматического управления ;
- общая теория связи ;
- передача информации и многие другие теоретические и прикладные науки.

Теория вероятностей является основанием для математической и прикладной статистики, которые используются для планирования и организации производства, при анализе технологических процессов, предупредительном контроле качества продукции и для многих других.

§1.2. Основные понятия и определения теории вероятностей

Основными понятиями теории вероятностей являются понятия эксперимента, события, вероятности события.

Событие – это всякий факт, который может произойти или не произойти в результате эксперимента.

Пример: Событие А – появление герба при бросании монеты. Событие В – появление трех гербов при трехкратном бросании монеты. Событие С – отказ i-го изделия в момент времени t.

Эксперимент (испытание, опыт) – это воспроизведение определенной совокупности событий и наблюдение последствий этого воспроизведения.

Воспроизведение определенной совокупности событий называют условиями эксперимента (испытания, опыта). Будем обозначать условия эксперимента через Ω

События, которые появляются или не появляются после воспроизведения условий Q, называются исходами.

Пример 1. Производится бросание монеты, результатом которого могут быть два исхода: 1 (выпадение «герба») и 0 (выпадение «решки»).

Пример 2. Ставят на испытание n изделий. Через время T испытание прекращают и фиксируют, какие изделия выдержали испытание. Исходы эксперимента – n-мерные булевы векторы $(e_1,\ldots,e_i,\ldots,e_n)$, где $e_i=1$, если i-е изделие вышло из строя, $e_i=0$, в противном случае ($1<i<n$). Исход $(0,\ldots,0)$ означает, что все изделия выдержали испытание.

События разделяются на следующие три вида: достоверные, невозможные и случайные.

Достоверным событием называют событие, которое обязательно произойдет при каждой реализации условий Q. Достоверные события будем обозначать в дальнейшем знаком Ω.

Пример достоверного события – выпадение не более 6 очков при бросании одной игральной кости.

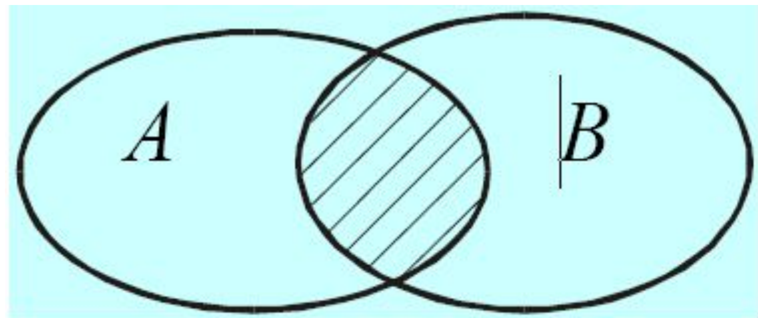
Невозможным событием называют событие, которое заведомо не произойдет при каждой реализации условий Q. Невозможное событие будем обозначать знаком $\varnothing$. Пример невозможного события – выпадение 12 очков при бросании одной игральной кости. Случайным событием называют событие, которое при реализации условий Q может либо произойти, либо не произойти.

§1.3.Алгебра событий

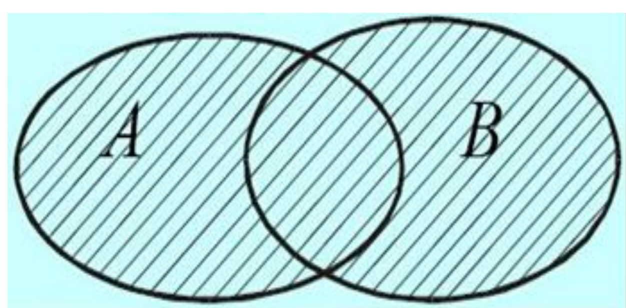
Между событиями при фиксации условий их появления Q могут существовать следующие соотношения.

1. Если наступает событие А и при этом происходит событие В, то говорят, что А влечет за собой В. Это обстоятельство записывается квантором принадлежности $\subset$ (или $\supset$ - включения) события А событию В и обозначается $A \subset B$ или $B \supset A$.
2. Если события А и В оба наступают или не наступают, то события А и В называют эквивалентными (равносильными) и обозначают А=В. Очевидно, что все достоверные события равносильны между собой и невозможные события равносильны

3. Событие С, состоящее в наступлении обоих событий А и В, называется произведением событий А и В и обозначается С=АВ или С=А∩В.



4. Событие С, состоящее в наступлении хотя бы одного из событий А и В, называется суммой событий А и В и обозначается С=А+В или С=А∪В.

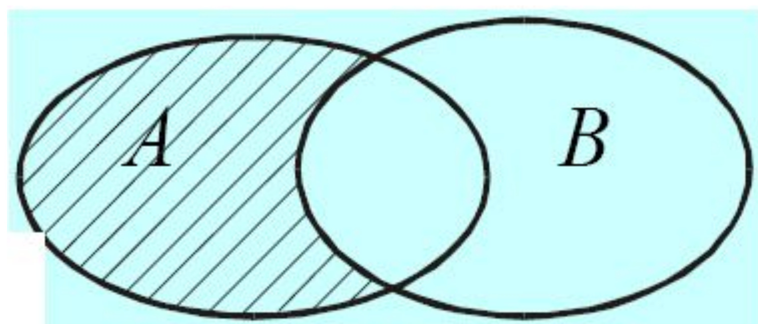


5. События A_1, A_2,…,A_n образуют полную группу событий, если хотя бы одно из них непременно должно произойти, т.е. $A_1 + A_2 + \ldots + A_n = \Omega$.

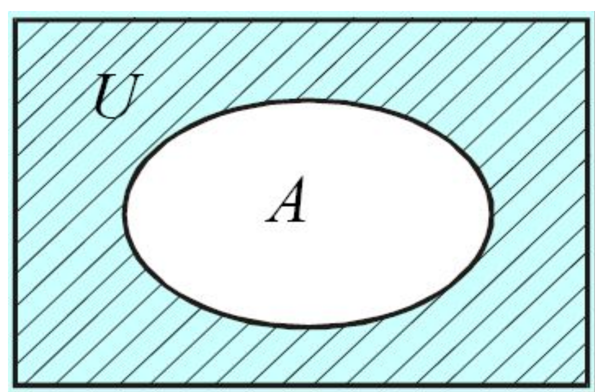
Примеры событий, образующих полную группу:

- выпадение «герба» и выпадение «решки» при бросании монеты,
- появление очков 1, 2, 3, 4, 5, 6 при бросании игральной кости.

6. Событие C, состоящее в том, что событие A происходит, а событие B не происходит, называется разностью событий A и B и обозначается C=A-B или C=A\B.



7. Событие, состоящее в том, что событие A не происходит, называется противоположным для A и обозначается символом □A .



Два события A и □A называются противоположными, если для них выполняются одновременно два соотношения A+□A=Ω, A□A=∅ или A ∪ □A=Ω, A∩□A=∅, т.е. образуют полную группу.

Например, если при бросании одной игральной кости событие C означает выпадение четного числа очков, то Ω-C=□C есть событие, состоящее в выпадении нечетного числа очков.

8. Два события A и B называются несовместными, если их совместное появление в одном опыте невозможно, т.е. если AB=∅.

События B_1, B_2,…,B_n называются несовместными, если никакие два из них не

Если $A = B_1 + B_2 + \ldots + B_n = \sum B_i$ и $B_i B_j = \varnothing$, то говорят, что событие A подразделяется на частные случаи $B_1, B_2, \ldots, B_n$.

При бросании игральной кости событие A, состоящее в выпадении четного числа очков, подразделяется на частные случаи B_1, B_2, B_3, которые обозначают соответственно выпадение очков 2, 4 и 6.

9. События $B_1, B_2, \ldots, B_n$ называются равновозможными, если есть основания полагать, что ни одно из них не является более возможным, чем другое.

Примеры равновозможных событий:

- выпадение «герба» и выпадение «решки» при бросании монеты,
- появление очков 1, 2, 3, 4, 5, 6 при бросании игральной кости.

10. Событие ω_1, ω_2,…, ω_n образующие полную группу несовместных равновозможных событий, называются элементарными событиями. Множество элементарных событий будем обозначать Ω.

Примеры элементарных событий:

- при бросании монеты $\Omega=\{0,1\}$, где 0- «решка», 1- «герб», - появление очков при бросании игральной кости $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$,
- при выборе наудачу одной карты из колоды (которая содержит 36 карт) $\Omega=\{1,2,,\ldots,36\}$ и т.д.

В соответствии с определением понятия «случай» элементарные события являются также случаями.

ВЕРОЯТНОСТЬ СОБЫТИЯ
§1.4.1.Классическое определение вероятности

В качестве меры оценки возможности появления события естественно ввести число p, которое тем больше, чем более возможно появление события. Число p называют <u>вероятностью события</u>.

Вероятность события есть численная мера объективной возможности наступления этого события, которая выражается следующим определением: Вероятность того, что при осуществлении определенного комплекса условий Q произойдет событие A, равно p.

Это определение записывают математическим выражением P(A)=p.

Классическое определение вероятности события А основано на рассмотрении множества элементарных событий Ω и эксперимента, определенного полем F событий (подмножеств $A \subset \Omega$).

В соответствии с классическим определением вероятности, чаще будут происходить те события А, которым (по отношению к полной группе элементарных событий) будет соответствовать наибольшее количество случаев (элементарных событий), благоприятствующих событию А и реже, которым будет соответствовать меньшее количество благоприятных случаев.

Поэтому, если опыт сводится к схеме случаев, то вероятность P(A) события A в данном опыте можно оценить отношением числа m элементарных

событий, благоприятствующих этому событию, к общему числу n элементарных событий:

$P(A)=m/n, m \le n.$

Пример: Событию A, состоящему при бросании игральной кости и выпадении числа, кратного трем, благоприятствуют два элементарных события {3,6} по отношению к общему числу n=6 элементарных событий {1,2,3,4,5,6}. Вероятность появления этого события P (A)=m/n=2/6.

Т.о., вероятностью случайного события А называется отношение числа m благоприятствующих этому событию исходов элементарных событий к общему числу n всех равновозможных несовместных элементарных событий (исходов), образующих полную группу.

Такое определение называется классическим (математическим) определением вероятности. Из этого определения вероятности вытекают следующие свойства.

Свойство 1. Вероятность достоверного события А равна единице. Действительно, т.к. событие достоверно, то каждый элементарный исход испытания благоприятствуют этому событию. В этом случае $m=n$, следовательно:

$P(A)=m/n=n/n=1$.

Свойство 2. Вероятность невозможного события А равна нулю.

Действительно, если событие невозможно, то ни одно из элементарных исходов испытания не благоприятствуют этому событию, т.е. $m=0$, и следовательно: $P(A)=m/n=0/n=0$.

Свойство 3. Вероятность случайного события А есть положительное число (рациональная правильная дробь), заключенное между нулем и единицей.

Действительно, любому случайному событию А будет соответствовать благоприятное число элементарных исходов $0<m<n$; это означает, что $0<m/n<1$, следовательно: $0<P(A)<1$.

Таким образом, из рассмотрения основных свойств вероятности следует, что вероятность любого события удовлетворяет неравенству: $0 \leq P(A) \leq 1$.

Практическое использование классического определения вероятности событий носит ограниченный характер, т.к. во многих практических случаях часто невозможно представить результат испытания в виде совокупности элементарных событий.

Еще труднее указать основания, позволяющие считать элементарные события равновозможными. Поэтому наряду с классическим определением вероятности используют и другие определения, в частности