Уральский федеральный университет

Дополнительные главы математики

Лекция 3

Уральский федеральный университет

Тема 4. Элементы теории вероятностей

§1. Элементы комбинаторики

Основные правила комбинаторики:

-правило сложения: если объект A можно выбрать n_1 способами, объект B можно выбрать n_2 способами, то количество способов выбрать один из объектов A или B равно $n_1 + n_2$

-правило умножения: если объект A можно выбрать n_1 способами, объект B можно выбрать n_2 способами, то количество способов выбрать A и B одновременно равно $n_1 \ n_2$

Операции комбинаторики

1. Размещениями из n элементов по m $(0 \leq m \leq n)$ называются m-элементные комбинации, выбранные из данных n элементов, отличающиеся друг от друга либо составом элементов, либо порядком их следования.

Число размещений находят по формуле:

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$$

2. Перестановками из n элементов называются размещения из n по n элементов.

Число перестановок находят по формуле: $P_n = A_n^n = n!$

3. Сочетаниями из n элементов по m $(0 \le m \le n)$ называются m-элементные комбинации, выбранные из данных n элементов, которые отличаются друг от друга хотя бы одним элементом(т.е. отличаются только составом элементов, а не порядком их следования).

Число сочетаний находят по формуле:

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

Если при упорядоченном выборе m элементов из n элементы возвращаются обратно, то полученные выборки называются размещениями с повторениями.

Число таких выборов равно $\overline{A}_n^m = n^m$.

Аналогично определяются сочетания с повторениями, их количество равно $\overline{C}_n^m = C_{n+m-1}^m$.

Перестановки с повторениями: $\overline{P}_n = \dfrac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_k!}$

$n = n_1 + n_2 + \ldots + n_k$.

Задачи.

1. В хоккейном турнире участвуют 6 команд. Каждая команда должна сыграть с каждой один раз. Сколько игр будет сыграно в турнире?

2. Пять авторов должны написать задачник по математике, состоящий из 14 глав. Два автора напишут по 2 главы, два других – по 3 и еще один – 4 главы книги. Сколькими способами может быть распределен материал между авторами?

3. Есть четырехразрядный цифровой замок. Кодовое устройство замка состоит из 4х вращающихся дисков. Только одна (правильная) комбинация позволяет открыть замок. Найти число возможных комбинаций.

§2. Случайные события. Классическое определение вероятности события

Случайным называется событие, которое в ходе опыта может произойти или не произойти.

Случайные события обозначаются: A, B, C,…

Суммой двух событий A и B называется новое событие $A + B$, состоящее в появлении хотя бы одного из событий A или B.

Произведением двух событий A и B называется новое событие $A \cdot B$, состоящее в совместном появлении A и B в данном опыте.

Событие $\overline{A}$ называется противоположным событию A, если оно состоит в ненаступлении события A.

Несколько событий в данном опыте называются несовместными, если наступление одного из них исключает наступление любого другого.

Пусть производится опыт с n равновозможными исходами, образующими группу несовместных событий. Исходы, которые приводят к наступлению события A, называются благоприятными событию A.

Вероятностью события A называется отношение числа m благоприятных исходов к числу n всевозможных исходов данного события:

$$P(A) = \frac{m}{n}.$$

Данную формулу называют классическим определением вероятности.

Задачи

1. Из колоды в 36 карт одновременно извлечены 3 карты. Найти вероятность событий: а) все вынутые карты разных мастей; б) все вынутые карты одной масти; в) среди вынутых карт будет хотя бы одна червовая; г) среди вынутых карт будет 2 туза.

2. Чайный сервиз на 6 персон состоит из 6 чашек, 6 блюдец, чайника, сахарницы и молочника. Во время ссоры нигде не работающая Клава запустила в своего сожителя Григория тремя первыми попавшимися под руку предметами из сервиза. Какова вероятность того, что не пострадали чашки? (Указание: считать, что предметы попадались Клаве под руку совершенно случайно.)

§3. Теоремы сложения и умножения вероятностей

Условной вероятностью события A по событию B называется вероятность события A, вычисленная при условии, что событие B произошло.

Условная вероятность определяется формулой:

$$P_B(A) = P(A/B) = \frac{P(AB)}{P(B)}, \; P(B) > 0.$$

События A и B называются независимыми, если появление или непоявление одного из них не меняет вероятности появления другого. В противном случае события называются зависимыми.

Теорема 1. Пусть A, B – зависимые события, тогда

$$P(AB) = P(A)P(B / A) = P(B)P(A / B).$$

Теорема 2. Пусть A, B – независимые события, тогда

$$P(AB) = P(A)P(B).$$

Теорема 3. Пусть A, B – совместные события, тогда

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

Теорема 4. Пусть A, B – несовместные события, тогда

$$P(A + B) = P(A) + P(B).$$

Уральский федеральный университет

При вычислении вероятности сложного события бывает удобно пользоваться формулой вычисления вероятности противоположного события:

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}).$$

Задачи.

1. Из коробки, в которой находится 5 конфет с лесным орехом и 5 мармеладных конфет Паша наугад выбирает одну конфету, после чего одну конфету берет Маша. Найти вероятности событий а) в коробке осталось только 3 конфеты с орехом; б) Маша и Паша съели одинаковые конфеты.

2. В двух корзинах находятся шары, отличающиеся только цветом, причем в первой корзине 5 белых, 11 черных и 8 красных, а во второй соответственно 10, 8 и 6. Из обеих корзин наудачу извлекается по одному шару. Найти вероятность того, что а) оба извлеченных шара черные; б) оба извлеченных шара одного цвета; в) извлечен один красный и один белый шары.

§4. Полная вероятность. Формула Байеса.

$H_1, H_2, \ldots, H_n$ − полная группа событий, если эти события попарно несовместны и в ходе опыта обязательно произойдет одно из событий этой группы.

Пусть совместно с одним из этих событий (заранее не известно с каким) происходит событие А. Тогда

$$P(A) = P(H_1)P(A/H_1) + P(H_2)P(A/H_2) + \ldots + P(H_n)P(A/H_n)$$

или, более кратко, $$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(\bar{H}_i)P(A/H_i)$$

формула полной вероятности.

Формула Байеса (позволяет переоценить вероятности гипотез при условии, что событие A произошло):

$$P(H_i / A) = \frac{P(H_i)P(A / H_i)}{P(A)}$$

Задача.

Военный корабль может пройти вдоль пролива шириной 1 км с минным заграждением в любом месте. Вероятность его подрыва на мине в правой части заграждения шириной 200 м равна 0,3, а на остальной части – 0,8. А) Найти вероятность того, что корабль благополучно пройдет пролив. Б) Корабль благополучно прошел пролив. Какова вероятность того, что он прошел его в левой части пролива?

§5. Схема независимых испытаний Бернулли

Пусть производится n независимых испытаний, в каждом из которых некоторое событие A наступает с вероятностью p (вероятность успеха) и не наступает с вероятностью $q = 1 - p$ (вероятность неуспеха).

Вероятность $P_n(m)$ того, что в серии из n испытаний число успехов равно m определяется по формуле Бернулли: $P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}$.

(Формула применима только при малых значениях n).

Формула Пуассона

Если число испытаний *n* велико, вероятность успеха в одном испытании *p* близка к нулю и при этом $\lambda = n\,p < 10$, то $$P_n(\text{m}) \approx \frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!}.$$

Формула Муавра-Лапласа

Если *n* велико и $np > 10$, то $P_n(m) \approx \dfrac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(x_0)$,

где

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \; x_0 = \frac{m - np}{\sqrt{npq}}.$$

Задачи.

1. Игрок Смит бросает 6 игральных костей и выигрывает, если выпадет хотя бы одна единица. Игрок Джонс бросает 12 игральных костей и выигрывает, если выпадет хотя бы две единицы. У кого больше шансов выиграть?

2. В кинотеатре «Агора» 5 залов на 16, 64, 120, 210, 320 мест. В апреле в кинотеатре проводится акция – в день рождения скидка на любой фильм (в первой половине дня) 50%. Найти вероятности событий а) трое зрителей получат скидку 1 апреля; б) не более трех зрителей получат скидку 1 апреля. (Указание: считать, что в этот день с утра в каждом зале проходит один фильм и все билеты будут раскуплены).

§6. Понятие Случайной величины (СВ). Закон распределения и функция распределения дискретной случайной величины

СВ называется величина, которая в результате опыта может принимать то или иное значение, причем неизвестно заранее какое именно.

СВ:

-дискретные (ДСВ)

множество значений СВ конечно или счетно (принимает отдельные, изолированные друг от друга значения);

-непрерывные (НСВ)

возможные значения СВ непрерывно заполняют какой-либо промежуток

Для полного описания СВ необходимо знать не только ее значения, но и вероятности этих значений.

Любое правило, позволяющее находить вероятности отдельных значений СВ или множества этих значений, называется законом распределения СВ.

Функцией распределения СВ X называется функция $F(x)$, выражающая вероятность того, что X примет значение меньше, чем x: $F(x) = P(X < x)$.

Геометрически: $F(x)$ – вероятность попадания X в интервал $(-\infty, x)$.

Пусть X – ДСВ, которая принимает значения $x_1, x_2, \ldots x_n$ с вероятностью p_i, где $i = 1, 2, \ldots n$.

Способы задания закона распределения ДСВ:

1. Ряд распределения (табличная форма)

X	x_1	x_2	…	x_n
p_i	p_1	p_2	…	p_n

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1.$$

2. Многоугольник распределения (графическое представление)

Задача.

В урне 7 белых и 3 черных шара. Из урны одновременно вынули 3 шара. Построить ряд распределения и многоугольник распределения СВ X – количество белых шаров среди вынутых.

Найти функцию распределения $F(x)$ и построить ее график.

§7. Числовые характеристики ДСВ

Пусть X – ДСВ, которая принимает значения $x_1, x_2, \ldots x_n$ с вероятностью p_i, где $i = 1, 2, \ldots n$.

1. Математическое ожидание (среднее значение)

$$M(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i.$$

1. Дисперсия (рассеяние)

$$D(X) = M(X - M(X))^2 = M(X^2) - M^2(X).$$

характеризует разброс значений СВ X относительно ее математического ожидания.

3. Среднее квадратическое отклонение $\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$.

Дисперсия имеет размерность квадрата СВ *X*, что в сравнительных целях неудобно; с.к.о. имеет ту же размерность, что и СВ.

Задачи

1. Дана функция распределения СВ: $F(x)=\begin{cases} 0 & x\le -1; \\ 0,25 & -1<x\le 2; \\ 0,75 & 2<x\le 3; \\ 1 & x>3. \end{cases}$

Найти ряд распределения СВ и вычислить числовые характеристики.

2. Стрелку выдано 4 патрона. Он производит выстрел по мишени до первого попадания или пока не израсходует все патроны. Вероятность попадания в мишень при первом выстреле – 0.4, при втором – 0.7, при третьем – 0.6, при четвертом – 0.5. Найти закон распределения и числовые характеристики случайной величины X – число израсходованных патронов.