элементы теории вероятностей

элективный курс для учащихся 9 класса

Содержание:

Теория вероятностей – раздел математики, изучающий возможности наступления какого – либо события в определенных условиях.

Основатели: французские ученые 17 века Пьер Ферма и Блез Паскаль

Комбинаторика – раздел математики о выборе и расположении элементов множества на основании каких – либо условий

n – факториал - произведение всех натуральных чисел от 1 до n включительно

$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-2)(n-1)n$

$0! = 1$

$1! = 1$

$2! = 1 \cdot 2 = 2$

$3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$

$4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$

$5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$

$6! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720$

Вычисли:

$5! : 3! =$

$4! : 6! =$

$15! \cdot 16 =$

$(n - 1)! \cdot n =$

Ответы:

$4 \cdot 5 = 20$

$1 : (5 \cdot 6) = 1/30$

$16!$

$n!$

Перестановки из n элементов – каждое расположение этих элементов в определенном порядке

$$P_n = n!$$

$P_3 = 3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$

Пустое множество можно упорядочить одним способом, т. е. 0!=1

Решите задачи:

1

$4! = 24$

2

$7! = 5040$

$3! = 6$

1) 1+3+5+7 = 16 – сумма цифр каждого из чисел
2) 4! = 24 – всего таких чисел
3) 16 · 24 = 384 –сумма цифр всех таких чисел

а) $1 \cdot 3! = 1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$ (для цифры 3 одно расположение, для оставшихся трех $1 \cdot 2 \cdot 3$)

б) т. к. кратно 15, то делится на 3 и 5. сумма цифр числа $3+5+7+9=24$ делится на 3, а чтобы делилось и на 5, оно должно оканчиваться цифрой 5, т. е. для цифры 5 – 1 расположение, для остальных трех цифр 3! <u>Ответ: 6</u>

1) Число перестановок для букв к, о, н $3!=6$
2) Число перестановок для букв кон-у-с $3!=6$
3) Всего перестановок $6 \cdot 6 = 36$

1) Число способов для расположения сборников стихов $5!=120$
2) Число способов для расположения сборников стихов и 7 оставшихся книг $8!= 40320$
3) Всего способов $120 \cdot 40320 = 4\,838\,400$

$$5! \cdot 5! = 120 \cdot 120 = 14\,400$$

Размещения – комбинации из m элементов по n, (n < m), которые отличаются друг от друга или самими элементами, или порядком элементов

A^n_m – А из m по n
m – число всех элементов множества
n – число элементов в каждой комбинации

$A^2_4 = 12$

Число размещений из 4 элементов по 2 равно 12

$A^n_m = m(m-1)(m-2)...$
n множителей

$A^2_4 = 4 \cdot 3 = 12$
(4 группы по 3 комбинации)

$A^n_m = m!/(m-n)!$

$A^2_4 = 4!/(4-2)! = 24/2 = 12$

$\mathbf{A^m_m = m!}$

Решите задачи:

1. $A^3_4 = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ способа

2. $A^2_{30} = 30 \cdot 29 = 870$ способов

3. $A^3_8 = 8 \cdot 7 \cdot 6 = 336$ способов

4. $A^2_6 = 6 \cdot 5 = 30$ способов
$A^4_6 = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360$
$A^6_6 = 6! = 720$

5. 1. $A^3_7 = 7 \cdot 6 \cdot 5 = 210$ чисел всего;
2. $A^2_6 = 6 \cdot 5 = 30$ чисел, которые начинаются с нуля;
3. $210 - 30 = 180$ чисел всего

6. $A^7_{10} - A^6_9 = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 - 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 =$
$9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot (10 - 1) = 544320$ номеров

Сочетания – все комбинации из m элементов по n, которые отличаются друг от друга хотя бы одним элементом ($n \leq m$)

C^n_m – С из m по n

Число сочетаний из m элементов по n

$C^2_4 = 6$

Два сочетания отличаются друг от друга хотя бы одним элементом

AB и *BA* – не сочетания.

В сочетаниях порядок не имеет значения: *ABC, BAC, CBA* – в сочетаниях это одна комбинация

$C^n_m = A^n_m / P_n$

$C^2_4 = A^2_4 / P_2 =$
$(4\cdot 3)/2 = 12:2 = 6$

$C^n_m = m!/(n!(m - n)!)$

$C^2_4 = 4!/(2!(4 - 2)!) =$
$3\cdot 4/2 = 12:2 = 6$

основное свойство сочетаний:

$C^n_m = C_m^{m-n}$

Упрощает вычисления, если
$n > ½ m$

$C^m_m = m! / (m!(m - m)!) = 1$

$0! = 1$

Решите задачи:

1

$C^3_{30} = 30!:(3!(30 - 3)!) =$
$(28 \cdot 29 \cdot 30):6 = 4060$

2

$C^2_{78} = 78!:(2! \cdot 76!) =$
$(77 \cdot 78):2 = 3003$

3

$C^5_{36} = 36!:(5! \cdot 31!) =$
$(32 \cdot 33 \cdot 34 \cdot 35 \cdot 36):(2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5) = 376992$

$C^3_{80} \cdot C^1_3 = 246\,480$

$C^4_{16} \cdot C^3_{12} = 400\,400$

Испытание – всякое действие, явление, наблюдение с несколькими различными исходами в одинаковых условиях

С о б ы т и я

случайные

искомые

достоверные

невозможные

равновозможные

несовместные

совместные

полная система событий

противоположные события А и А

Задания:

1. Укажите среди данных событий случайные, достоверные, невозможные: а) свалившийся со стола бутерброд упадет на пол маслом; б) более двух попаданий в мишень при двух выстрелах; в) в следующем году снег в Бекетовской выпадет в понедельник; г) не более двух попаданий в мишень при двух выстрелах; д) в следующем году снег в Бекетовской не выпадет; е) при бросании кубика выпадет четное число очков; ж) в следующем году снег в Бекетовской выпадет.

а,в,е

г, ж

б, д

2. Какие пары событий совместные и какие несовместные? а) идущий впереди человек работает инженером; идущего впереди человека зовут Иваном; б) вышедший из библиотеки человек является офицером; вышедший из библиотеки человек – допризывник; в) наудачу взятая цифра кратна 5; наудачу взятая цифра больше 7; г) наудачу взятое двузначное число окажется нечетным; наудачу взятое двузначное число разделится на 73.

а, г

б, в

3. Какие исходы возможны при следующих испытаниях:
а) производится анализ группы крови человека; I, II, III, IV
б) у случайного прохожего спрашивают, на какой день недели приходится его День рождения; 7 исходов
в) производится 5 выстрелов в мишень. 6 исходов

4. Какие из перечисленных событий образуют полную систему событий: а) «одно попадание», «2 попадания» и «3 попадания» при трех выстрелах в мишень; б) «задумано четное число» и «задумано нечетное число» при задумывании целого числа; в) «задумано простое число» и «задумано составное число» при задумывании натурального числа. б

5. Являются ли противоположными события: а) «два промаха при двух выстрелах» и «хотя бы одно попадание при двух выстрелах»; б) «хотя бы один герб при двух бросаниях монеты» и «хотя бы одна цифра при двух бросаниях монеты»; в) «выпадение на игральной кости менее трех очков» и «выпадение на игральной кости более трех очков»; г) «выпадение в сумме 12 очков» и «выпадение в сумме не более 12 очков» при бросании двух костей.

а, в

Вероятность события – это число, которое показывает возможность наступления искомого события А в определенных условиях

Число бросков	отн. частота выпадения «орла»
4040	0,5070
4092	0,5005
10 000	0,4979
20 480	0,5068
24 000	0,5005

Определение вероятности

Статистическое (опыты)
P(A)~m/n
m – все исходы
n – нужные исходы

Классическое (логика)
P(A) = m/n
m – благоприятные исходы
n – равновозможные исходы

P(A)
probabilite

Решите задачи:

1\. $n = 6$, $m = 2$, $P(A) = 2 : 6 = 1/3$

2\. Равновозможные исходы $n = 4$, благоприятные исходы $m = 1$

<u>1 монета</u> о о р р о - орел

<u>2 монета</u> о р р о р – решка

$P(A) = 1 : 4 = 0{,}25 = 25\%$

3\. а) $n = 25$, $m = 25 – (8 + 11) = 6$, $P(A) = 6 : 25 = 0{,}24 = 24\%$

б) $n = 25$, $m = 8 + 11 = 19$, $P(A) = 19 : 25 = 0{,}76$

4\. а) $n = C_{36}^{3}$, $m = C_{35}^{3}$, $P(A) = 11/12$

б) для противоположных событий $P(A) + P(\overline{A}) = 1$,

значит $P(\overline{A}) = 1 – 11/12 = 1/12$

Вероятность события А при условии, что наступило событие В, называют ***условной вероятностью*** события А

Р(А/В) – *условная вероятность события А, или вероятность события А при условии, что наступило событие В*

Р(А/В) = Р(АВ) : Р(В)

Р(АВ) – вероятность одновременного наступления событий А и В

Пример: **пусть в корзине находится 30 последовательно пронумерованных шаров.**

Событие А: ***извлечен шар с номером, кратным трем.***

Событие В: ***извлечен шар с номером, большим 10.***

Как эти события связаны друг с другом?

Найдем вероятность наступления события А:

n = 30 – всего шаров,

m = 10 – число шаров, номер которых кратен 3,

P(A) = m/n = 10/30 = 1/3

Найдем вероятность события А при условии наступления события В, т. е. извлечен шар, с номером, кратным 3, но большим 10.

n = 20 – всего шаров с номером, большим 10,

m = 10 – 3 = 7 шаров с номером, большим 10, и кратных 3.

P(A) = m/n = 7/20, или P(A/B) = 7/20

P(A/B) > P(A)

Наступление события В повысило вероятность события А

P(AB) = 7/30

P(B) = 20/30

P(A/B) = 7/30 : 20/30 = 7/20

Сложение вероятностей

СУММОЙ конечного числа несовместных событий называется событие, состоящее в наступлении хотя бы одного из них
А или В

А + В – сумма двух событий

$A_1+A_2+...+A_n$ – сумма n событий

P(A + B) = P(A) + P(B)

P(A) + P(B) +...+ P(M) = 1 – вероятность суммы событий полной системы событий;
P(A) + P(A) = 1 – сумма вероятностей противоположных событий

Умножение вероятностей

Произведением **конечного числа независимых событий называется событие, состоящее в том, что каждое из них произойдёт.**

А и В

А · В – произведение двух событий

P(AB) = P(A)P(B)

P(ABC…N) = P(A)P(B)P(C)…P(N)

ПОЛНАЯ ВЕРОЯТНОСТЬ

Пусть полная система состоит из несовместных событий В1, В2, В3, …

Рассматриваемое событие А может произойти только вместе с одним из событий В1, В2, В3, …

В этом случае находят так называемую ПОЛНУЮ ВЕРОЯТНОСТЬ события А

P(A) = P(A/B1)P(B1) + P(A/B2)P(B2) + …