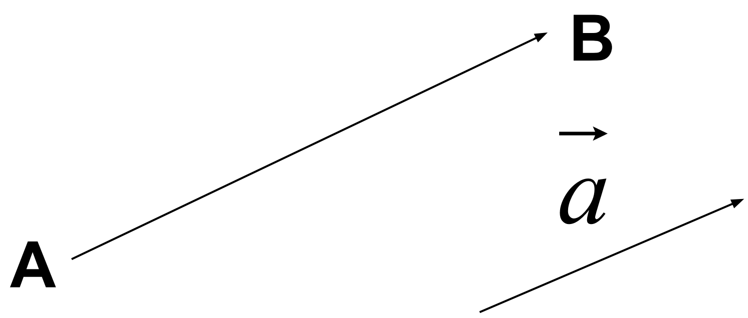
Элементы векторной алгебры.

Лекции5-7

$\overline{a}$

Вектором называется направленный отрезок.

Обозначают векторы символами $\vec{a}$ или $\overline{AB}$, где A- начало, а B-конец направленного отрезка .



Нулевым вектором (обозначается $\overline{0}$) называется вектор, начало и конец которого совпадают.

Расстояние между началом и концом вектора называется его *длиной*, или модулем или абсолютной величиной.

Векторы называются *коллинеарными*, если они расположены на одной прямой или на параллельных прямых

Векторы называются *компланарными*, если они параллельны одной плоскости.

Векторы называются *равными*, если они сонаправлены и имеют равные длины.

Два вектора, имеющие равные длины, коллинеарные и противоположно направленные, наз. *противоположными.*

Вектор, длина которого равна 1, называется *единичным* вектором или *ортом.*

Ортом вектора $\vec{a}$ называется сонаправленный ему вектор и обозначается

$$\vec{a}_0$$

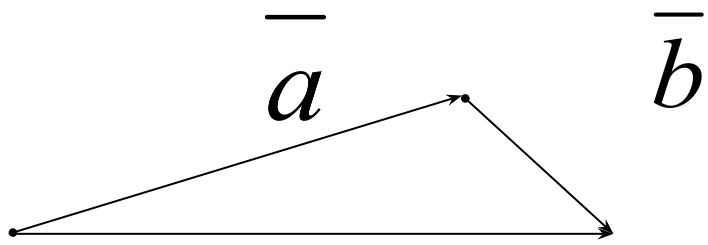
Линейные операции над векторами

Линейными операциями называют операции сложения и вычитания векторов и умножения вектора на число.

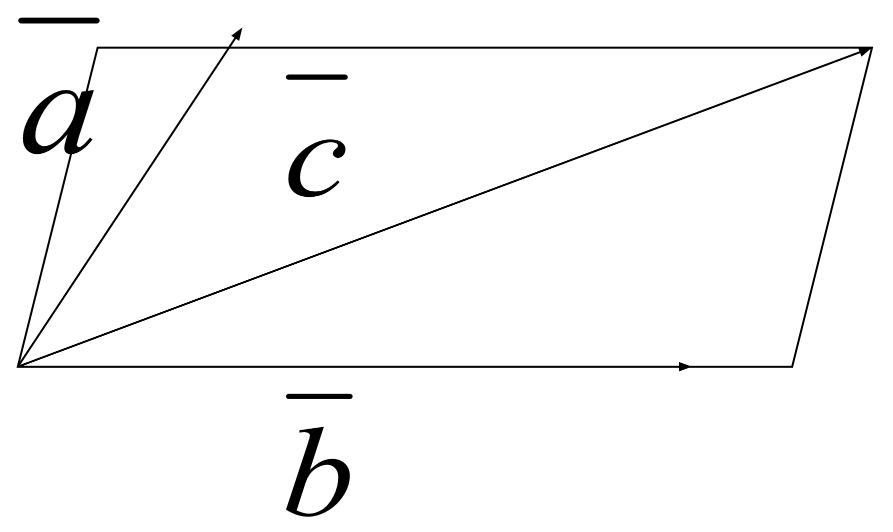
Сложение векторов

$$\bar{c} = \bar{a} + \bar{b}$$

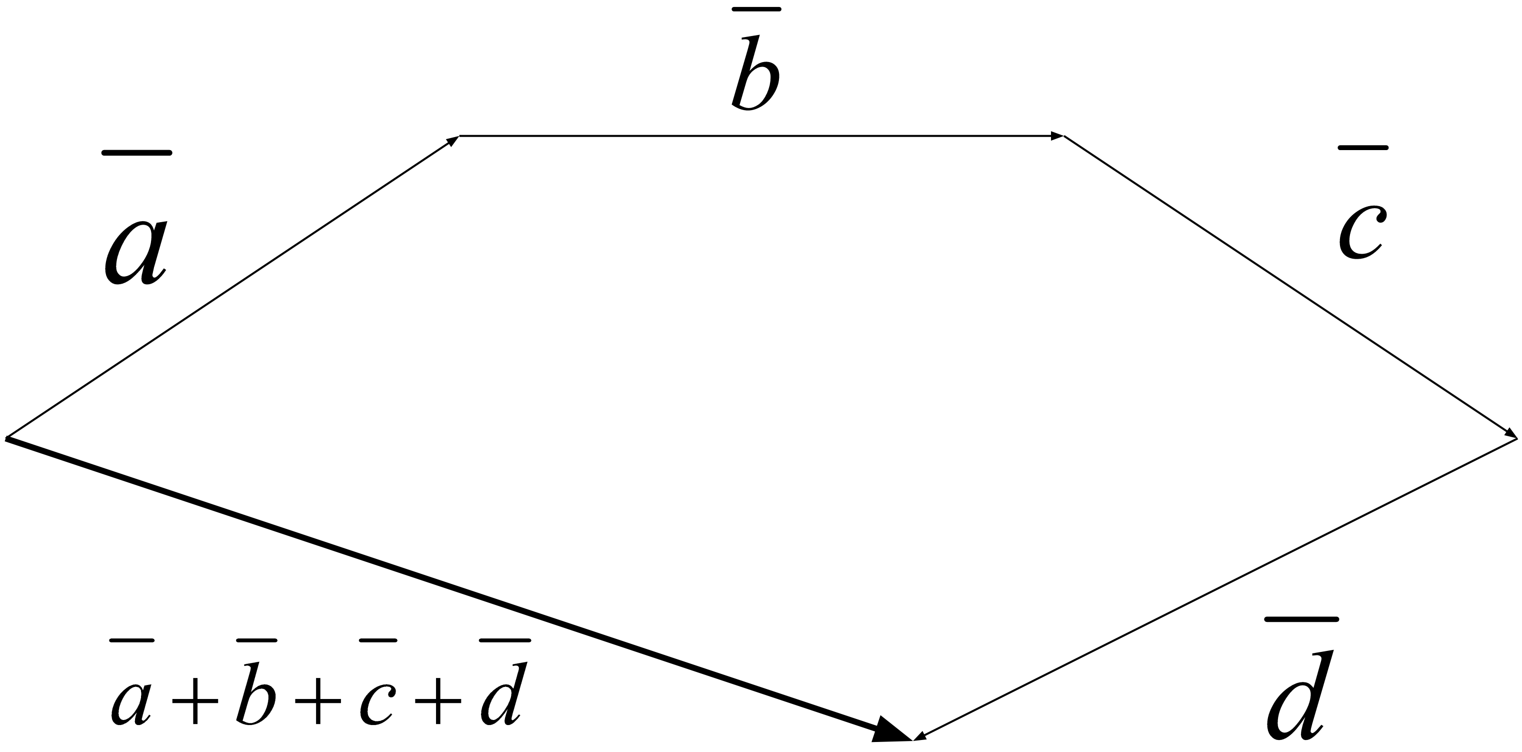
Правило треугольника.



Правило параллелограмма

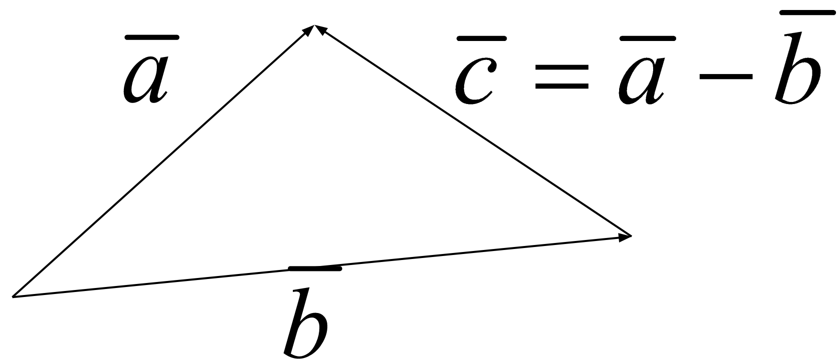


Сумма нескольких векторов



Вычитание векторов

Разностью векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ называется вектор $\overline{c} = \overline{a} - \overline{b}$ такой, что $\overline{b} + \overline{c} = \overline{a}$



Свойства

$$\overline{a}+\overline{b}=\overline{b}+\overline{a}$$

$$\overline{a}+\overline{0}=\overline{a}$$

$$\overline{a} + (\overline{b} + \overline{c}) = (\overline{a} + \overline{b}) + \overline{c}$$

$$\overline{a} + (-\overline{a}) = \overline{0}$$

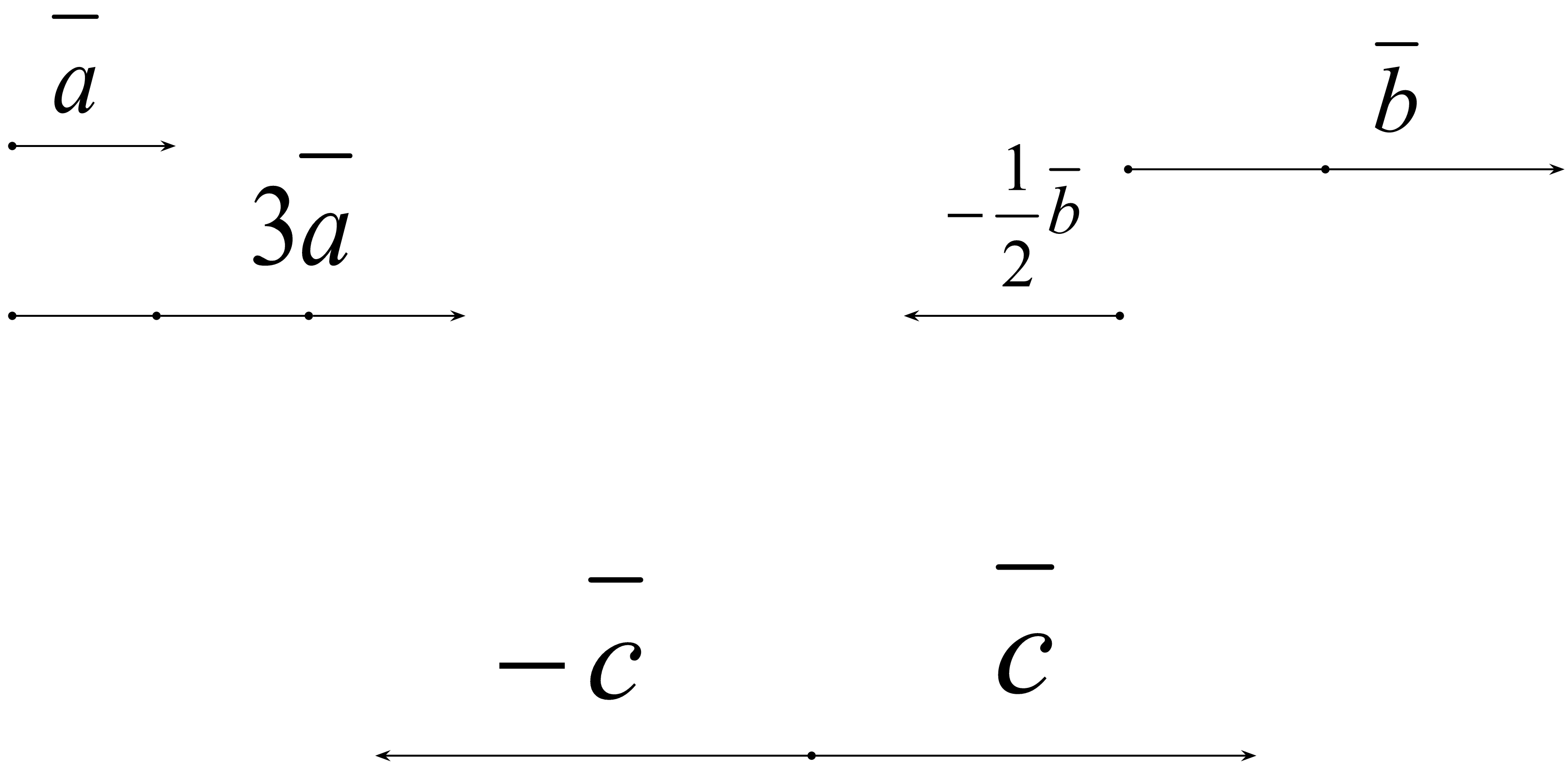
Умножение вектора на число

Произведением вектора $\overline{a}$ на действительное число α называется вектор $\overline{b}$ (обозначают $\overline{b} = \alpha \overline{a}$), определяемый следующими условиями:

1. $\left|\vec{b}\right| = |\alpha| \cdot \left|\vec{a}\right|$,

2. $\overline{b} \uparrow\uparrow \overline{a}$ при $\alpha > 0$ и $\overline{b} \uparrow\downarrow \overline{a}$ при $\alpha < 0$.

Умножение вектора на число



Свойства

$$(\alpha\beta)\overline{a} = \alpha(\beta\overline{a}) = \beta(\alpha\overline{a})$$

$$(\alpha + \beta)\overline{a} = \alpha\overline{a} + \beta\overline{a}$$

$$\alpha(\overline{a}+\overline{b})=\alpha\overline{a}+\alpha\overline{b}$$

$$1\cdot\overline{a}=\overline{a}$$

$$(-1)\cdot\overline{a}=-\overline{a}$$

Отсюда вытекает условие коллинеарности векторов: два ненулевых вектора коллинеарны тогда и только тогда, когда имеет место равенство

$$\vec{b} = \alpha \cdot \vec{a}, \;\; \alpha \neq 0.$$

Если $\vec{a}_0$ орт вектора $\vec{a}$, то

$$\vec{a} = |\vec{a}| \cdot \overrightarrow{a_0}$$

и тогда

$$\overrightarrow{a_0} = \frac{1}{|\vec{a}|}\vec{a}$$

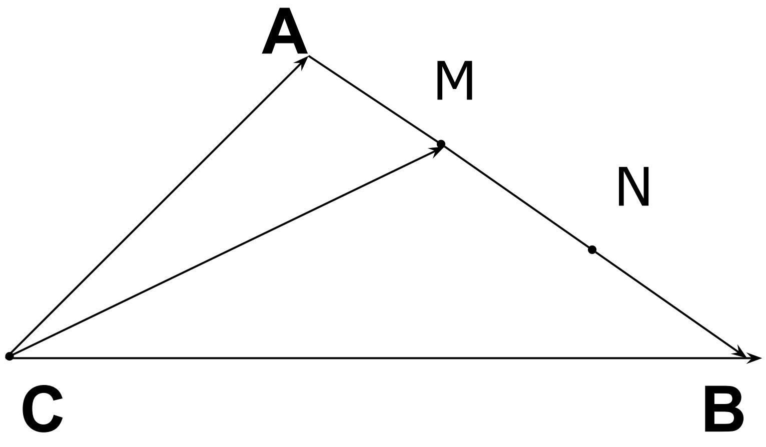
Пример

В треугольнике ABC сторона AB разделена на три равные части точками M и N.

Пусть $\overline{CA} = \overline{a}, \overline{CB} = \overline{b}$, выразить вектор $\overline{CM}$

через $\overline{a}$ и $\overline{b}$.

Решение



$$\overline{AM} = \frac{1}{3}\overline{AB},$$

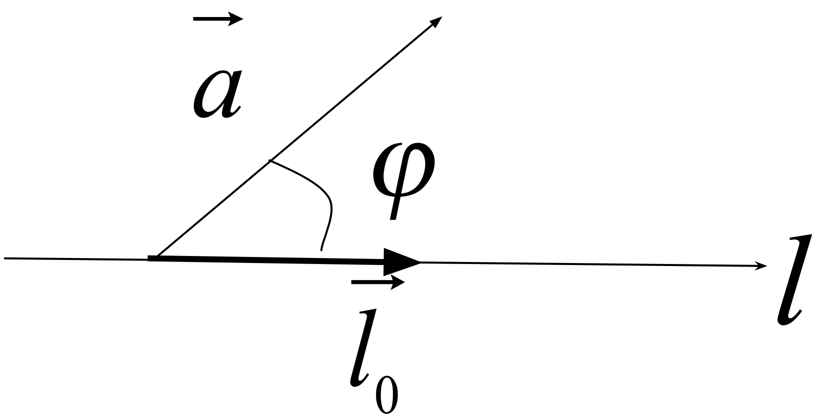
$$\overline{AB} = \overline{b} - \overline{a},$$

$$\overline{CM} = \overline{CA} + \overline{AM} = \overline{a} + \frac{1}{3}\left(\overline{b} - \overline{a}\right).$$

Угол между двумя векторами

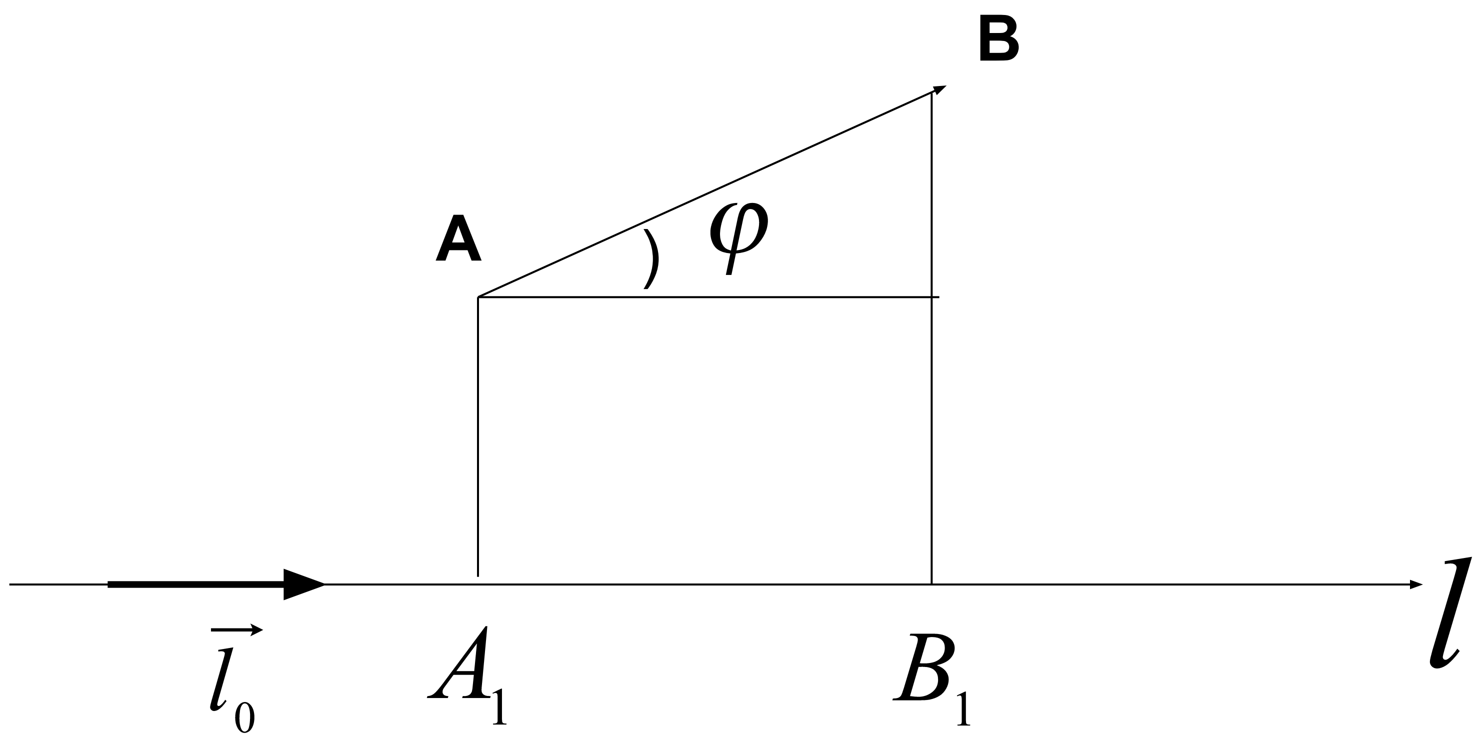
Углом между векторами называется наименьший угол $\varphi\left(0 \le \varphi \le \pi\right)$, на который надо повернуть один из векторов до его совпадения со вторым.

Под углом между *вектором и осью* понимают угол между этим вектором и единичным вектором, расположенным на оси



Проекция вектора на ось

A



$$np_l \overline{AB} = \left|\overline{AB}\right| \cos(\overline{AB}, l)$$

Линейная зависимость векторов

Векторы $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ наз-ся линейно

зависимыми, если существуют числа

$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$,не все равные 0, для

которых имеет место равенство

$$\alpha_1 \cdot \vec{a}_1 + \alpha_2 \cdot \vec{a}_2 + \ldots + \alpha_n \cdot \vec{a}_n = 0$$

Векторы $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ называются

линейно независимыми, если равенство

$$\alpha_1 \cdot \vec{a}_1 + \alpha_2 \cdot \vec{a}_2 + \ldots + \alpha_n \cdot \vec{a}_n = 0$$

выполняется только при

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$$

Если векторы линейно зависимы, то один из них можно выразить через другие, представив его в виде линейной комбинации этих векторов.

$$\vec{a}_1 = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\vec{a}_2 - \frac{\alpha_3}{\alpha_1}\vec{a}_3 - \dots - \frac{\alpha_n}{\alpha_1}\vec{a}_n$$

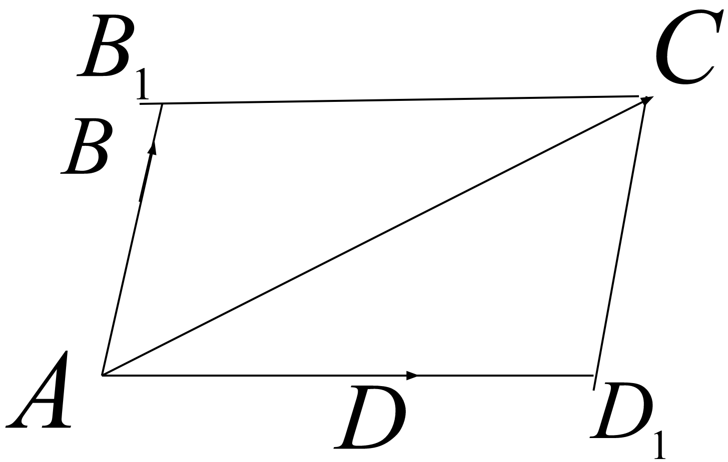
$$\overrightarrow{a_1} = \mu_2\overrightarrow{a_2} + \mu_3\overrightarrow{a_3} + \dots + \mu_n\overrightarrow{a_n}$$

$\mu_2\overrightarrow{a_2} + \mu_3\overrightarrow{a_3} + \dots + \mu_n\overrightarrow{a_n}$ – *линейная комбинация векторов*

Для того чтобы векторы были линейно зависимы, необходимо и достаточно, чтобы хотя бы один из этих векторов можно было представить в виде линейной комбинации остальных.

Всякие три вектора на плоскости линейно зависимы.

Рассмотрим три вектора на плоскости. Выразим через один из них другие :



$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB_1} + \overrightarrow{AD_1}$$

$$\overrightarrow{AB_1} = \alpha_1 \cdot \overrightarrow{AB} \qquad \overrightarrow{AD_1} = \alpha_2 \cdot \overrightarrow{AD}$$

$$\overrightarrow{AC} = \alpha_1 \cdot \overrightarrow{AB} + \alpha_2 \cdot \overrightarrow{AD}$$

Для того чтобы два вектора были *линейно независимы*, необходимо и достаточно, чтобы они были неколлинеарны.

Для того чтобы три вектора в пространстве были линейно независимы, необходимо и достаточно, чтобы они были некомпланарны.

Максимальное число линейно независимых векторов на плоскости равно двум.

Максимальное число линейно независимых векторов в пространстве равно трём.

Базис на плоскости и в пространстве

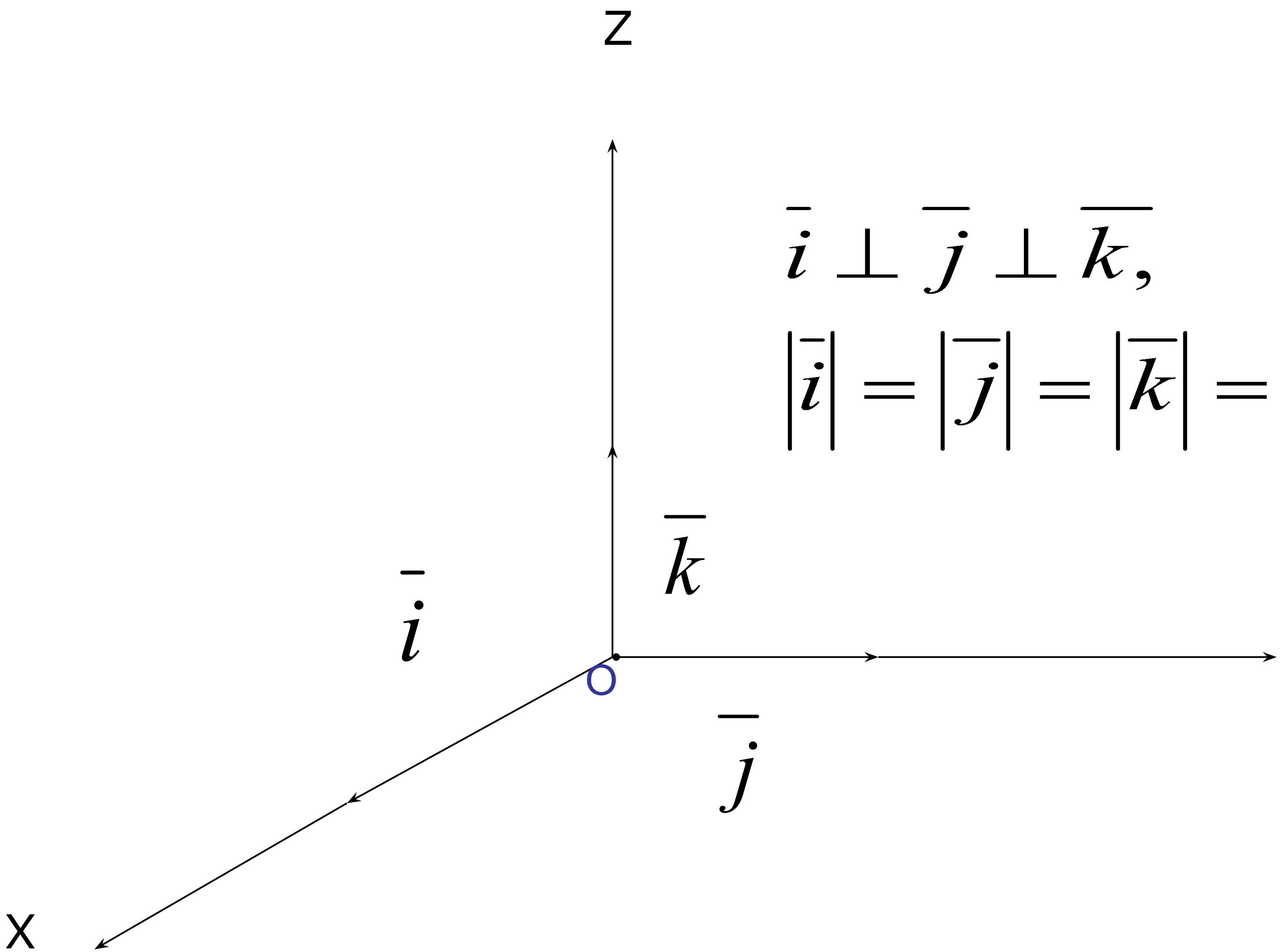
Базисом на плоскости называют два любых линейно независимых вектора.

Т. Разложение любого вектора $\vec{a}$ на плоскости по базису $\vec{b}, \vec{c}$ является единственным

Базисом в пространстве называют три любых линейно независимых вектора.

Т. Разложение любого вектора $\vec{a}$ в пространстве по базису $\vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ является единственным

Прямоугольный декартовый базис

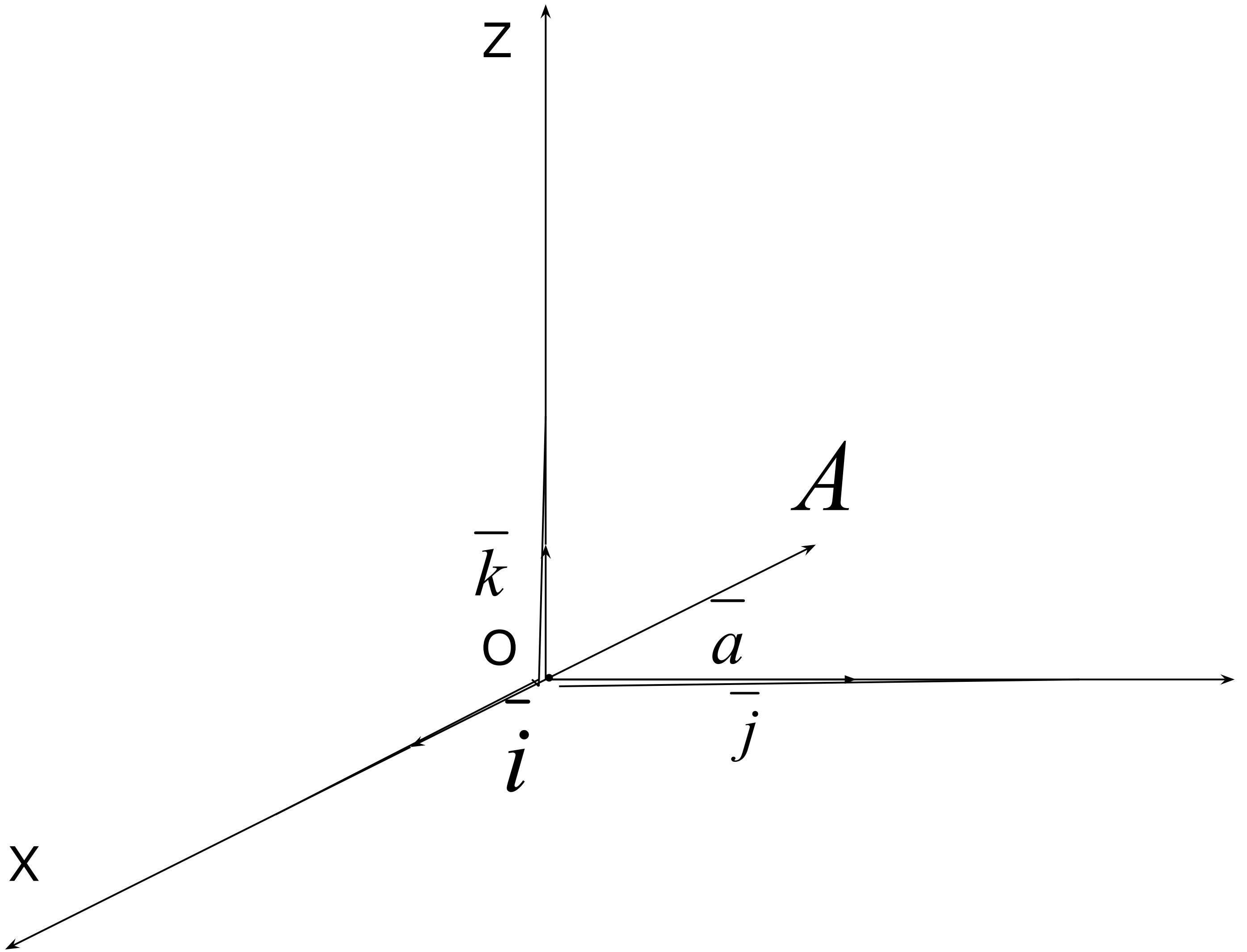


$$\bar{i} \perp \bar{j} \perp \bar{k},$$

$$|\bar{i}| = |\bar{j}| = |\bar{k}| = 1.$$

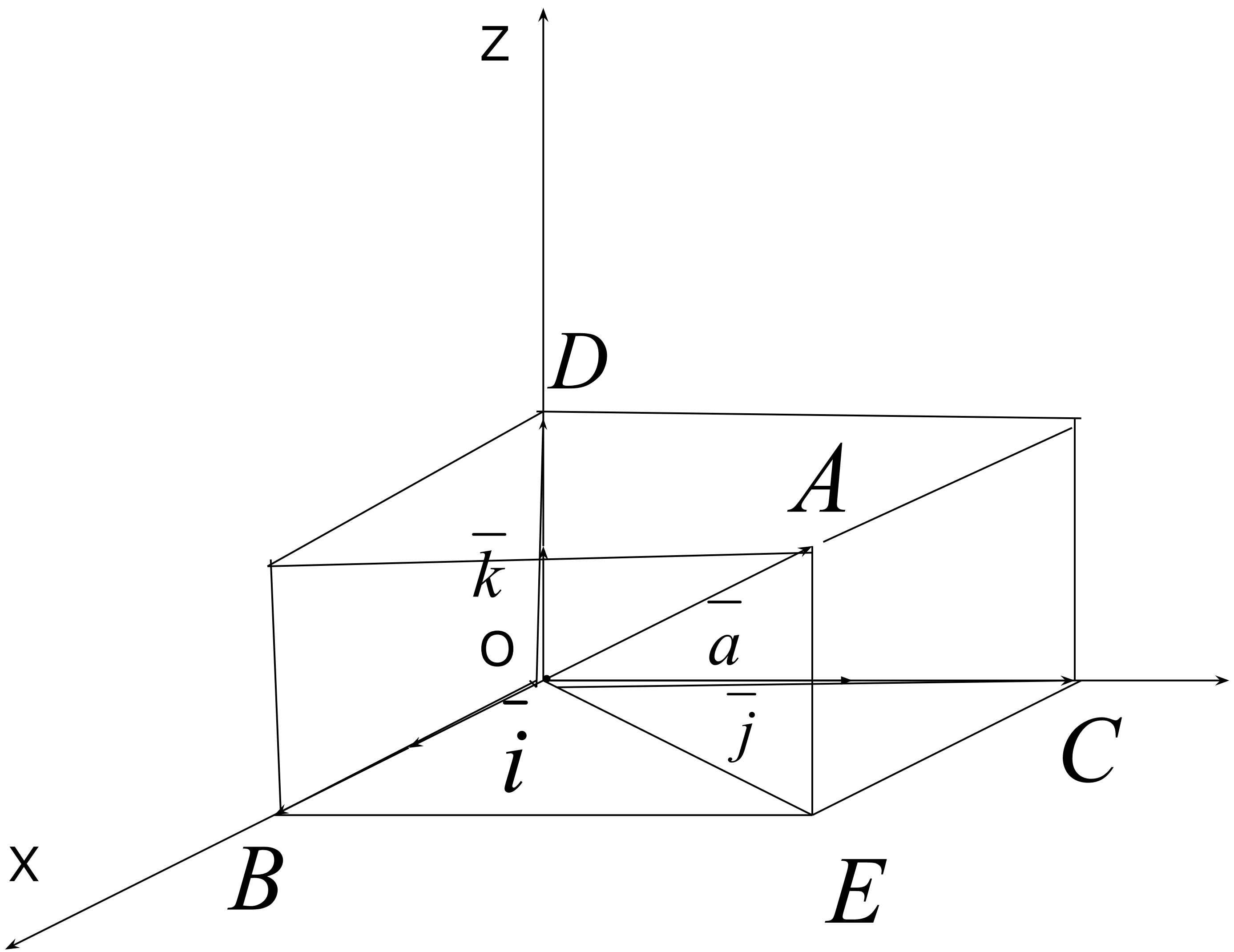
Прямоугольной декартовой системой координат называется совокупность точки О и прямоугольного единичного базиса.

Прямые, проходящие в направлении базисных векторов , называются осями координат.



O

O



$$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OC}$$

$$\overrightarrow{OB} = np_{ox}\vec{a} \cdot \vec{i} \qquad np_{ox}\vec{a} = a_x$$

$$\overrightarrow{OC} = np_{oy}\vec{a} \cdot \vec{j} \qquad np_{oy}\vec{a} = a_y$$

$$\overrightarrow{OD} = np_{oz}\vec{a} \cdot \vec{k} \qquad np_{oz}\vec{a} = a_z$$

$$\vec{a} = a_x \cdot \vec{i} + a_y \cdot \vec{j} + a_z \cdot \vec{k}$$

Линейные операции над векторами в координатной форме

Пусть $\vec{a} = a_x \cdot \vec{i} + a_y \cdot \vec{j} + a_z \cdot \vec{k}$

$\vec{b} = b_x \cdot \vec{i} + b_y \cdot \vec{j} + b_z \cdot \vec{k}$

тогда:

1) $\vec{a} \pm \vec{b} = (a_x \pm b_x) \cdot \vec{i} + (a_y \pm b_y) \cdot \vec{j} + (a_z \pm b_z) \cdot \vec{k}$

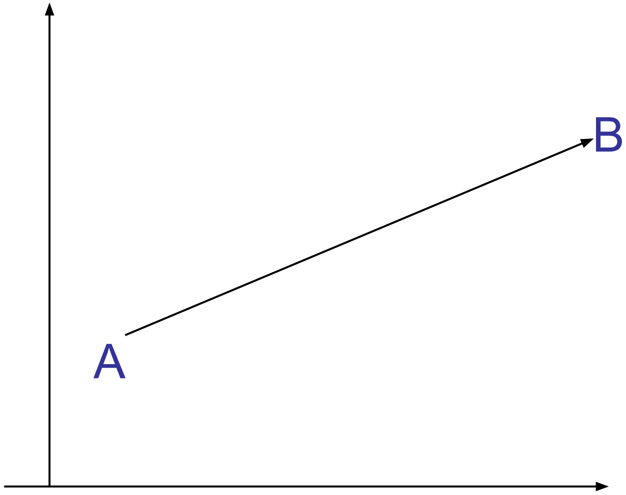
2) $\overrightarrow{\lambda a} = \lambda a_x \cdot \vec{i} + \lambda a_y \cdot \vec{j} + \lambda a_z \cdot \vec{k}$

3) $\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \dfrac{a_x}{b_x} = \dfrac{a_y}{b_y} = \dfrac{a_z}{b_z} = \lambda$

4) $\left|\vec{a}\right| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$

Вычисление координат вектора

Пусть даны точки $A(x_1; y_1; z_1)$ и $B(x_2; y_2; z_2)$



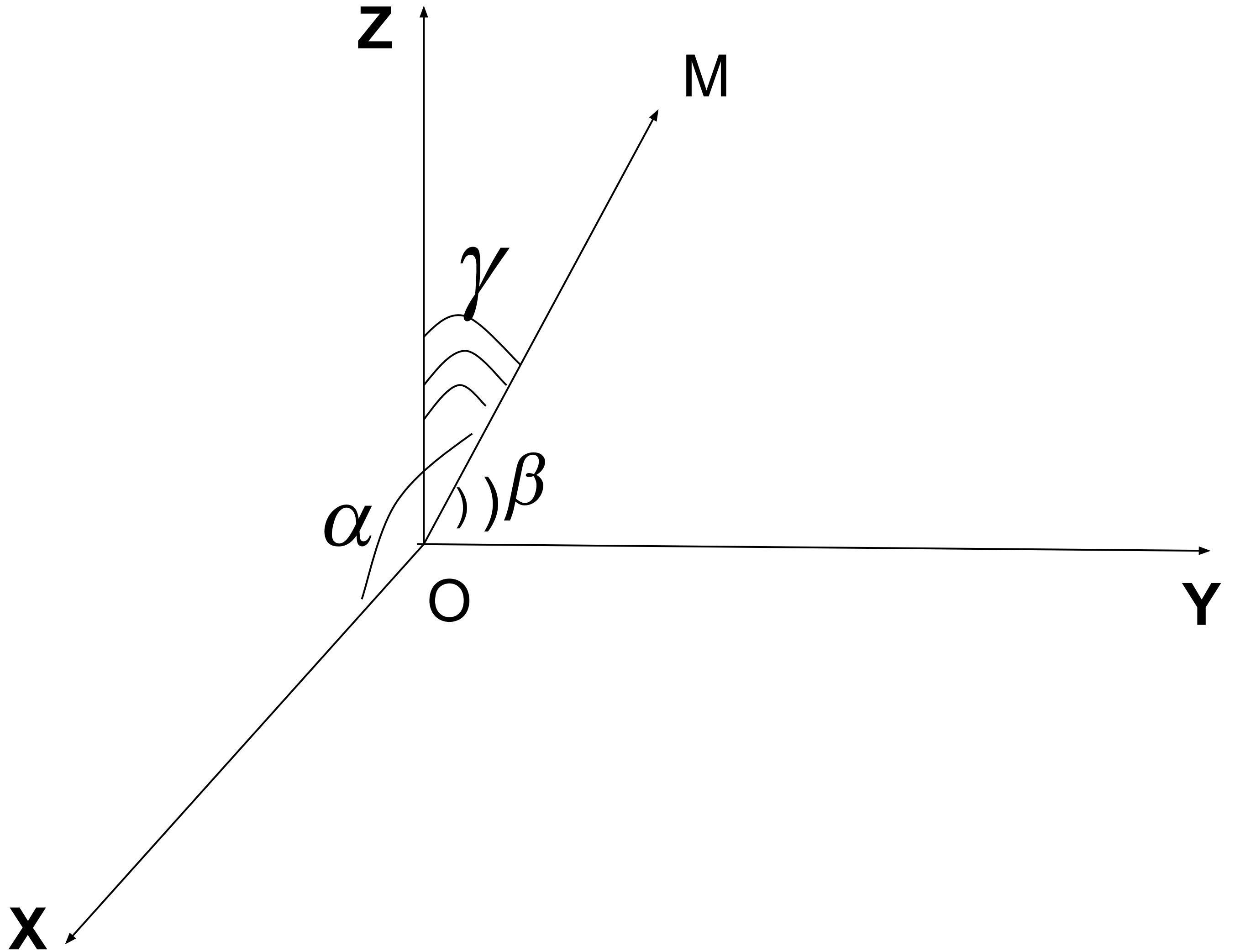
Тогда координаты вектора равны разности координат его конца и начала:

$$\overrightarrow{AB}=\left(x_2-x_1\right)\vec{i}+\left(y_2-y_1\right)\vec{j}+\left(z_2-z_1\right)\vec{k}$$

Длину вектора вычисляют по формуле

$$\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{\left(x_2-x_1\right)^2+\left(y_2-y_1\right)^2+\left(z_2-z_1\right)^2}$$

Направляющие косинусы


Z
M
γ
α
β
O
Y
X

Пусть дан вектор

$$\vec{a} = a_x \cdot \vec{i} + a_y \cdot \vec{j} + a_z \cdot \vec{k}$$

$$a_x = np_{ox}\vec{a} = \left|\vec{a}\right| \cos\alpha$$

$$a_y = np_{oy}\vec{a} = \left|\vec{a}\right| \cos\beta$$

$$a_z = np_{oz}\vec{a} = \left|\vec{a}\right| \cos\gamma$$

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{|\bar{a}|}$$

$$\cos\beta = \frac{a_y}{|\bar{a}|}$$

$$\cos\gamma = \frac{a_z}{|\bar{a}|}$$

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

Координаты единичного вектора

$$\overline{a}_0 = \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\},$$

Пример

Найти косинусы углов, которые, вектор $\overline{AB}$ составляет с осями координат, если А (1,2,3) и В (2,4,5).

Решение.

$$\overline{AB} = \{2-1;4-2;5-3\} = \{1;2;2\},$$

$$\left|\overline{AB}\right| = \sqrt{1^2+2^2+2^2} = 3,$$

$$\textit{тогда}$$

$$\cos\alpha = \frac{1}{3}, \cos\beta = \frac{2}{3}, \cos\gamma = \frac{2}{3}$$

Деление отрезка в данном отношении

Пусть точка М делит отрезок АВ в некотором отношении.

$$A_2\left(x_2\,;y_2\,;z_2\right)$$

$$M\left(x;y;z\right)$$

$$A_1\left(x_1\,;y_1\,;z_1\right)$$

Тогда

$$\frac{|A_1M|}{|MA_2|} = \lambda$$

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}$$

$$y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}$$

$$z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}$$

Деление отрезка пополам

Если $\lambda = 1$, то $\left|A_1M\right| = \left|MA_2\right|$, т. е. точка М –середина отрезка, имеем

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} \qquad y = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

$$z = \frac{z_1 + z_2}{2}$$

Скалярное произведение векторов

Скалярным произведением векторов называется произведение их модулей на косинус угла между ними.

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = \left|\bar{a}\right| \cdot \left|\bar{b}\right| \cdot \cos\varphi$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \left|\vec{a}\right| \cdot np_{\vec{a}}\vec{b}$$

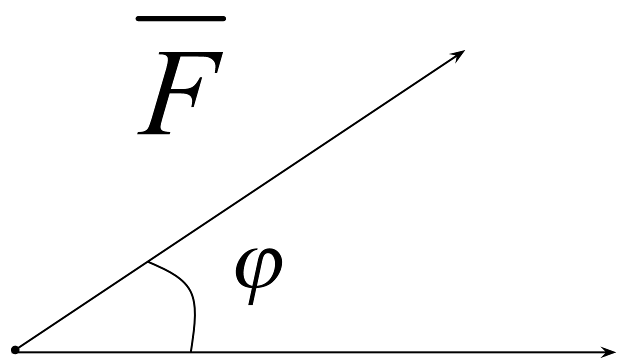
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \left|\vec{b}\right| \cdot np_{\vec{b}}\vec{a}$$

Проекция вектора на вектор

$$пр_{\bar{b}}\bar{a} = \frac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{\left|\bar{b}\right|}$$

Физический смысл скалярного произведения

Работа постоянной силы на прямолинейном участке пути равна скалярному произведению вектора силы на вектор перемещения.



$$A = \overline{F} \cdot \overline{e}$$

Геометрические свойства скалярного произведения

Если векторы взаимно перпендикулярны, то их скалярное произведение равно нулю, и если скалярное произведение ненулевых векторов равно нулю, то эти векторы взаимно перпендикулярны.

$$\overline{a} \cdot \overline{b} = ab\cos\varphi = ab\cos\frac{\pi}{2} = 0.$$

Свойства скалярного произведения (продолжение)

Скалярный квадрат вектора равен квадрату его длины

$$\bar{a}^2 = \left|\bar{a}\right|^2$$

$$\left|\bar{a}\right| = \sqrt{\bar{a}^2}$$

Свойства скалярного произведения

$$\overline{a}\cdot\overline{b}=\overline{b}\cdot\overline{a}$$

$$\lambda(\overline{a}\cdot\overline{b})=(\lambda\overline{a})\cdot\overline{b}=\overline{a}\cdot(\lambda\overline{b})$$

Скалярные произведения базисных векторов

$$\vec{i}\cdot\vec{i}=\vec{i}^{\,2}=\left|\vec{i}\right|^2=1$$

$$\vec{j}\cdot\vec{j}=\vec{j}^{\,2}=\left|\vec{j}\right|^2=1$$

$$\vec{k}\cdot\vec{k}=\vec{k}^{\,2}=\left|\vec{k}\right|^2=1$$

$$\vec{i}\cdot\vec{j}=0$$

$$\vec{j}\cdot\vec{k}=0$$

$$\vec{i}\cdot\vec{k}=0$$

Скалярное произведение в координатной форме.

Если

$$\overline{a} = x_1 \cdot \overline{i} + y_1 \cdot \overline{j} + z_1 \cdot \overline{k}, \overline{b} = x_2 \cdot \overline{i} + y_2 \cdot \overline{j} + z_2 \cdot \overline{k},$$

то

$$\overline{a} \cdot \overline{b} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2.$$

Пример

Дан вектор $\overline{c} = 2\overline{a} + 3\overline{b}$, причем $|\overline{a}| = 4$, $|\overline{b}| = 5$,

угол φ между векторами $\overline{a}$ и $\overline{b}$ равен 60^0.

Найти модуль вектора $\overline{c}$.

Решение

$$|\overline{c}| = \sqrt{\overline{c}^2} = \sqrt{\left(2\overline{a} + 3\overline{b}\right)^2} = \sqrt{4\overline{a}^2 + 12\overline{a} \cdot \overline{b} + 9\overline{b}^2}.$$

Так как $\overline{a}^2 = |\overline{a}|^2 = 4^2 = 16$ и $\overline{b}^2 = |\overline{b}|^2 = 5^2 = 25,$

$$\overline{a} \cdot \overline{b} = |\overline{a}||\overline{b}| \cos\varphi = 4 \cdot 5 \cos 60^0 = 10,$$

то

$$|\overline{c}| = \sqrt{4 \cdot 16 + 12 \cdot 10 + 9 \cdot 25} = \sqrt{409}.$$

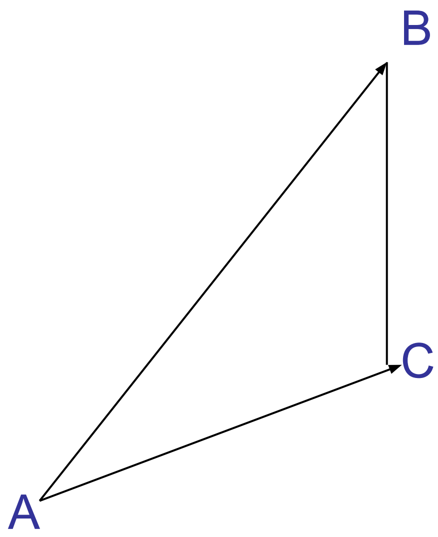
Пример

Найти величину угла при вершине *A* треугольника с вершинами

$$A(-1,-2,4),\ B(-4,-2,0),\ C(3,-2,1).$$

Решение

Изобразим треугольник ABC



$$\cos A = \frac{\overline{AB}\cdot\overline{AC}}{AB\cdot AC}.$$

$$\overline{AB} = (-4+1;-2+2;0-4) = (-3;0;-4),$$

$$\overline{AC} = (3+1;-2+2;1-4) = (4;0;-3).$$

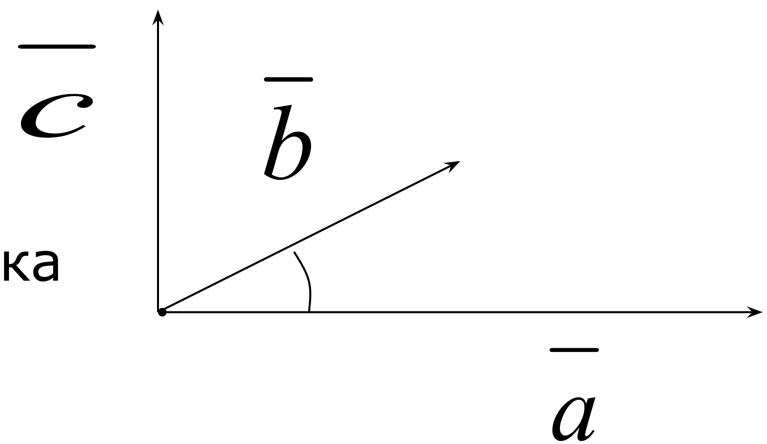
$$\cos A = \frac{-3\cdot 4+0+(-4)\cdot(-3)}{\sqrt{9+16}\cdot\sqrt{16+9}} = 0, \quad \angle A = \frac{\pi}{2}.$$

Векторное произведение векторов

Понятие «правой» тройки векторов

Тройку векторов $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ называют *правой*, если направление вектора $\overline{c}$ таково, что, смотря из его конца вдоль вектора, кратчайший поворот от вектора $\overline{a}$ к вектору $\overline{b}$ будет виден против движения часовой стрелки.

$\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ - *правая* тройка



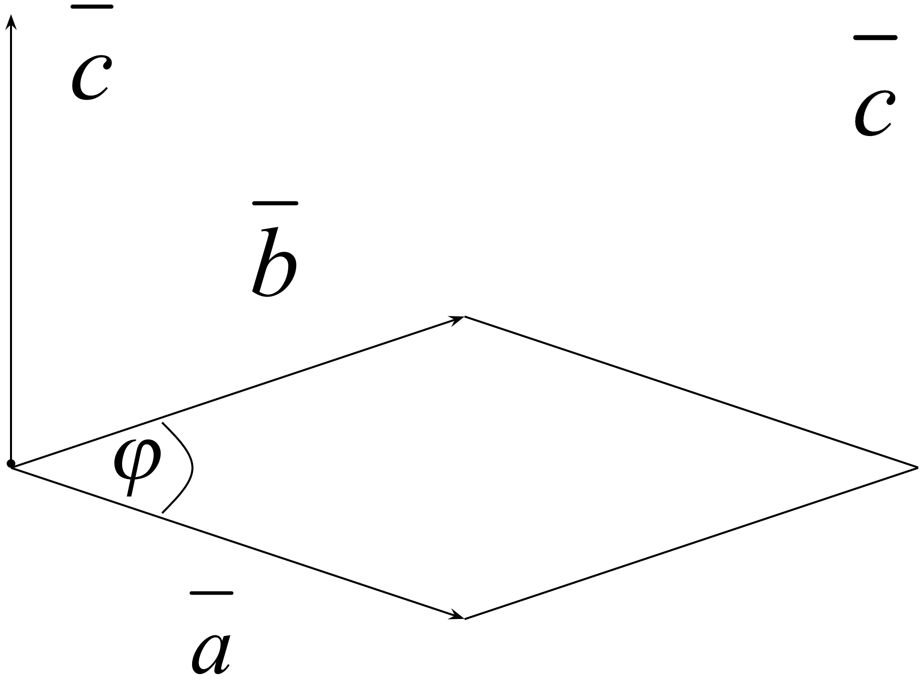
Векторным произведением вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ наз. вектор $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$, удовлетворяющий следующим условиям:

1) $$\left|\vec{c}\right| = \left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot \sin\varphi$$

2) $\vec{c} \perp \vec{a}$ $\quad$ $\vec{c} \perp \vec{b}$

3)векторы образуют правую тройку

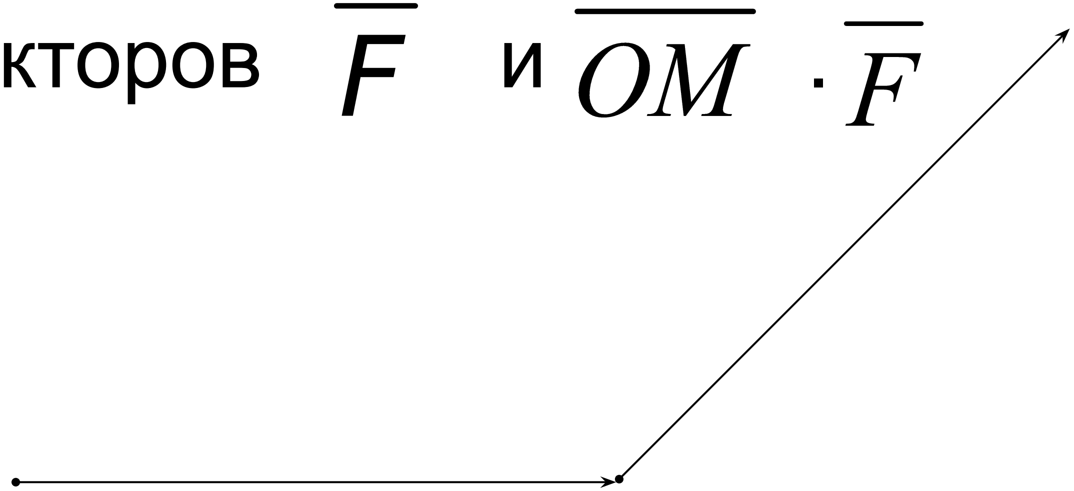
Обозначение векторного произведения векторов



$$\overline{c} = \overline{a} \times \overline{b}$$

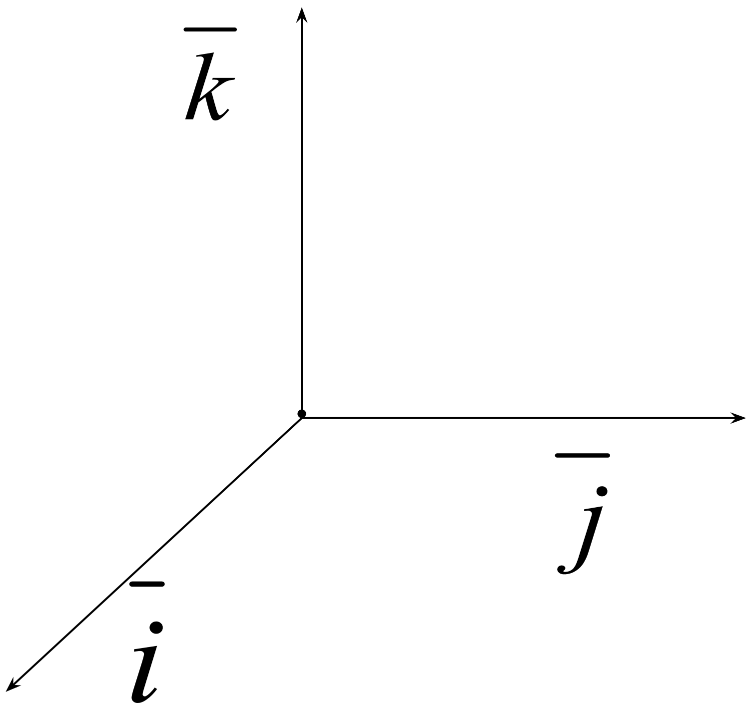
Физический смысл векторного произведения

Если $\overline{F}$ – сила, приложенная к точке *M*, то момент этой силы относительно точки *O* равен векторному произведению векторов $\overline{F}$ и $\overline{OM} \cdot \overline{F}$



O M

Векторные произведения координатных векторов



$$\bar{i}\times\bar{j}=\bar{k},\qquad \bar{j}\times\bar{i}=-\bar{k},$$

$$\bar{k}\times\bar{i}=\bar{j},\qquad \bar{i}\times\bar{k}=-\bar{j},$$

$$\bar{j}\times\bar{k}=\bar{i}.\qquad \bar{k}\times\bar{j}=-\bar{i}.$$

Векторное произведение в координатной форме

$$\bar{a} \times \bar{b} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

Площадь параллелограмма

С помощью векторного произведения можно вычислить площадь параллелограмма, построенного на $\overline{a}$ и $\overline{b}$ как на сторонах:

$$S = \left| \overline{a} \times \overline{b} \right|$$

Площадь треугольника

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2}\left|\bar{a} \times \bar{b}\right|$$

Геометрические свойства векторного произведения

Если поменять местами сомножители, то тройка векторов станет левой и тогда

$$\bar{a} \times \bar{b} = -\bar{b} \times \bar{a}$$

Векторное произведение ненулевых векторов равно нулю тогда и только тогда, когда векторы коллинеарны.

$$\overline{a} \times \overline{b} = \overline{0} \Leftrightarrow \overline{a} \parallel \overline{b}$$

Алгебраические свойства векторного произведения

Векторное произведение удовлетворяет

$$(\bar{a}+\bar{b})\times\bar{c}=\bar{a}\times\bar{c}+\bar{b}\times\bar{c}$$

$$\lambda(\bar{a}\times\bar{b})=(\lambda\bar{a})\times\bar{b}=\bar{a}\times(\lambda\bar{b})$$

Пример

Найти $\left|\left(2\bar{a}+3\bar{b}\right)\times\left(\bar{a}-2\bar{b}\right)\right|,$ если $\left|\bar{a}\right|=2, \left|\bar{b}\right|=1, \varphi=90^0.$

Решение

$$\left|\left(2\bar{a}+3\bar{b}\right)\times\left(\bar{a}-2\bar{b}\right)\right|=$$

$$=\left|2\left(\bar{a}\times\bar{a}\right)+3\left(\bar{b}\times\bar{a}\right)-4\left(\bar{a}\times\bar{b}\right)-6\left(\bar{b}\times\bar{b}\right)\right|=$$

$$=7\left|\bar{b}\times\bar{a}\right|=7\left|\bar{b}\right|\cdot\left|\bar{a}\right|\sin\varphi=$$

$$=7\cdot 1\cdot 2\cdot\sin 90^0=14.$$

Пример

Найти площадь треугольника ABC ,
если известны координаты его вершин:
$A(-2, 4, -6), B(0, 2, -4), C(-5, 8, -6).$

:

Смешанное произведение

Смешанным произведением трёх

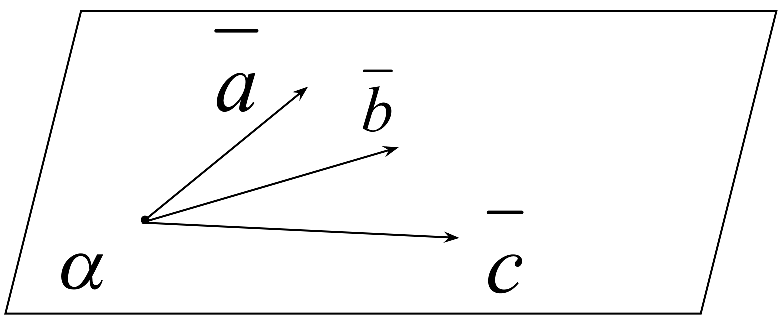
векторов называется произведение

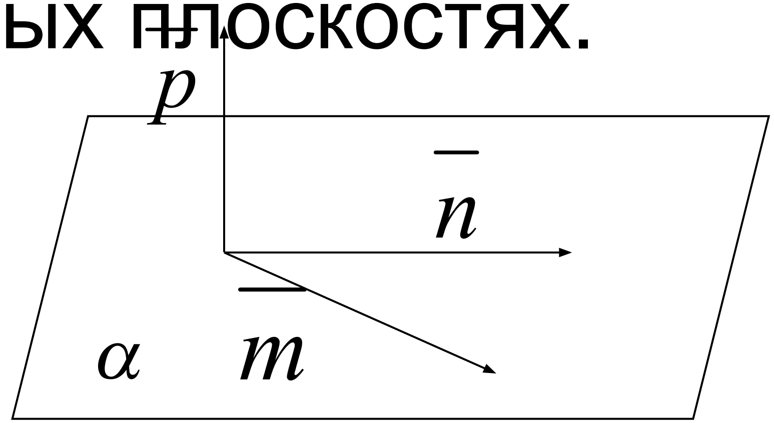
вида : $(\overline{a} \times \overline{b}) \cdot \overline{c}$

Смешанное произведение вычисляют по формуле

$$\overline{a}\overline{b}\overline{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$

Известно, что три вектора называются компланарными, если они лежат в одной или параллельных плоскостях.





$\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ – *компланарны,*

$\overline{m}, \overline{n}, \overline{p}$ – *некомпланарны.*

Условие компланарности трёх векторов

Если $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ компланарны, то

$$\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = 0.$$

Элементами определителя являются координаты векторов $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$

Объём параллелепипеда

Если параллелепипед построен на трех векторах как на сторонах , то его объем равен модулю смешанного произведения этих векторов:

$$V = \left|\overline{a}\overline{b}\overline{c}\right|$$

Объём тетраэдра

Тетраэдр, т.е. пирамида , составляет одну шестую часть параллелепипеда и поэтому

$$V_{тет} = \frac{1}{6}\left|\overline{a}\overline{b}\overline{c}\right|$$