Энтропия классическая и квантовая

Казанцева Владлена Владимировна
2-й год обучения, очная форма
Веденяпин Виктор Валентинович
01.01.03 математическая физика

Отчетная конференция аспирантов ИПМ им. М.В. Келдыша РАН
7-8 июня, 2016 г.

Выполнение учебно-методических планов

Год поступления: 2014

Год окончания: 2018

Выполнение учебного плана:

- сданы курсы в срок согласно учебному плану, в том числе кандидатские экзамены по философии, английскому языку, дисциплины по специальности

Мотивация

H-теорема впервые была рассмотрена в работе Больцмана «Weitere Studien Uber das Warmegleichgewicht unter Gasmolekulen» (Перев. «Дальнейшие исследования теплового равновесия между молекулами газа» (М.: Наука, 1984. С. 125 - 189). Эту теорему Больцман связал с законом возрастания энтропии.

Была проделана значительная работа по расширению классов уравнений, для которых справедлив закон возрастания энтропии в работах В.В. Веденяпина и С.З. Аджиева.

Постановка задачи

В работах Больцмана была введено понятие максимума энтропии при фиксированных линейных законах сохранения (экстремаль Больцмана). В работе Пуанкаре и Козлова-Трещова было показано, как выполняется закон роста энтропии для уравнений Лиувилля, а в работах одного из В.В.Веденяпина показано, что временные средние для уравнения Лиувилля совпадают с экстремалью Больцмана. Здесь мы доказываем это совпадение для представлений групп, вводя энтропию и изучая ее свойства в теории представлений.

Пусть G - конечная группа, $\varrho : G \to Aut(V)$ - представление группы, т.е. гомоморфизм G в группу линейных преобразований линейного пространства V (конечного или

Методы решения

Лемма 1. Энтропия сохраняется при действии G: если $S(gx) \geq S(x)$, то $S(gx) = S(x)$.

Доказательство. $S(x) = S(g^{-1}gx) \geq S(gx)$, и мы доказали обратное неравенство, а потому и равенство.

Введем понятие среднего (аналог временного среднего) для действия группы G:

$$[x] = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\rho(g)x = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} gx$$

Здесь $|G|$ - количество элементов в группе.

Лемма 2. Энтропия существует.

Доказательство. Если $K(x)$ - произвольный выпуклый функционал, то

$$S(x) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} K(gx)$$

- энтропия: $S(gx) = S(x)$.

Теорема 1. (H-теорема для представлений групп). $S([x]) \geq S(x)$.

Доказательство.

$$S([x]) = S\left(\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} gx\right) \geq \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} S(gx) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} S(x) = S(x)$$

Мы воспользовались выпуклостью $S(x)$. Это есть аналог теоремы Пуанкаре-Козлова-Трещова для уравнения Лиувилля.

Методы решения

Через разложение фон Неймана-Рисса доказываем, что среднее $[x]$ совпадает с проекцией x на подпространство I : $[x] = P_I(x)$, где $I \subset V$ - линейное подпространство инвариантов: $I=\{x \in V \mid gx=x \forall g \in G\}$.

Обозначим через V_x множество векторов пространства V таких, что их проекция на подпространство I вдоль W совпадает с проекцией на I вектора x. Пусть энтропия (строго выпуклый инвариантный при действии группы функционал) $S(x)$ имеет единственную точку максимума на V_x. Эту точку, где достигается этот максимум, мы будем называть экстремалью Больцмана $Ext^B(x)$:

$$Ext^B_S(x) = argmax_{y \in Vx} S(y).$$

Полученные результаты

Для представлений конечных групп определено понятие энтропии и временного среднего;

доказано совпадение временных средних и экстремалей Больцмана.

План на очередной год

В случае групп R и Z соответствующие результаты опираются на конструкции фон Неймана и Рисса. Представляет интерес обобщение этих результатов на более общие группы.

Особый интерес представляет группа R, случай уравнения Лиувилля для динамических систем и группа Z - случай отображений. В этих примерах из совпадения временного среднего и экстремали Больцмана следует, в частности, что эргодические компоненты есть линии уровня совместных законов сохранения, но законы сохранения - из L_2. Поэтому встаёт вопрос о выборе минимального функционального базиса за- конов сохранения. Здесь можно предположить, что существует локаль- но базис гладких законов сохранения, но если его дополнить кусочно-постоянными законами сохранения, то результат может быть и

Спасибо за внимание!