
π
Это загадочное
число Пи

Знаете ли вы, что эта обыкновенная, на первый взгляд, полузабытая буква из школьного курса геометрии намного интереснее при ближайшем рассмотрении и изучении, имеет свою историю, очень много значит для математиков — они без неё просто никуда, и [illegible] праздник?

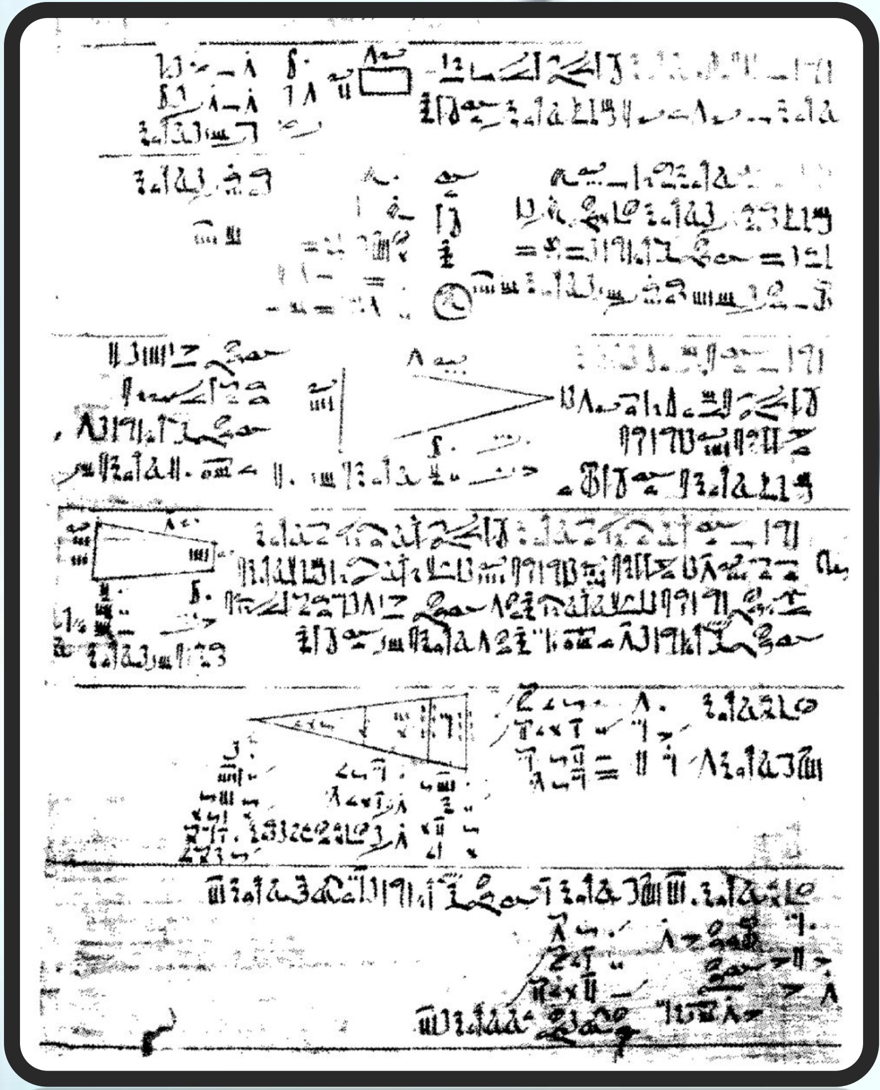
Неофициальный праздник «День числа Пи» (англ. Pi Day) отмечается 14 марта, которое в американском формате дат записывается как 3.14, что соответствует приближённому значению числа π.

Если принять диаметр окружности за единицу, то длина окружности — это число π.

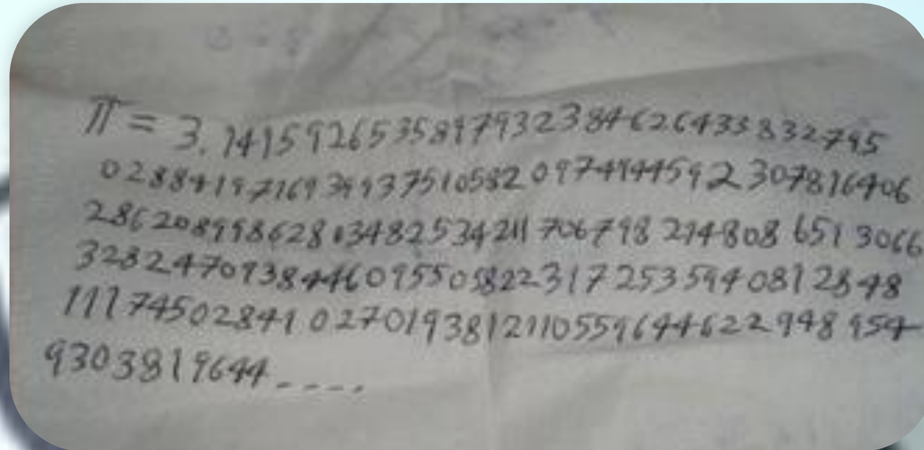
Запомни, что π =

π = 3.14159 26535 89793 23846 26433 83279 50288 41971 69399
37510 58209 74944 59230 78164 06286 20899 86280 34825 34211
70679 82148 08651 32823 06647 09384 46095 50582 23172 53594
08128 48111 74502 84102 70193 85211 05559 64462 29489 54930
38196 44288 10975 66593 34461 28475 64823 37867 83165 27120
19091 45648 56692 34603 48610 45432 66482 13393 60726 02491
41273 72458 70066 06315 58817 48815 20920 96282 92540 91715
36436 78925 90360 01133 05305 48820 46652 13841 46951 94151
16094 33057 27036 57595 91953 09218 61173 81932 61179 31051
18548 07446 23799 62749 56735 18857 52724 89122 79381 83011
94912 98336 73362 44065 66430 86021 39494 63952 24737 19070
21798 60943 70277 05392 17176 29317 67523 84674 81846 76694
05132 00056 81271 45263 56082 77857 71342 75778 96091 73637
17872 14684 40901 22495 34301 46549 58537 10507 92279 68925
89235 42019 95611 21290 21960 86403 44181 59813 62977 47713
09960 51870 72113 49999 99837 29780 49951 05973 17328 16096
31859 50244 59455 34690 83026 42522 30825 33446 85035 26193
11881 71010 00313 78387 52886 58753 32083 81420 61717 76691
47303 59825 34904 28755 46873 11595 62863 88235 37875 93751
95778 18577 80532 17122 68066 13001 92787 66111 95909 21642
01989...

История числа



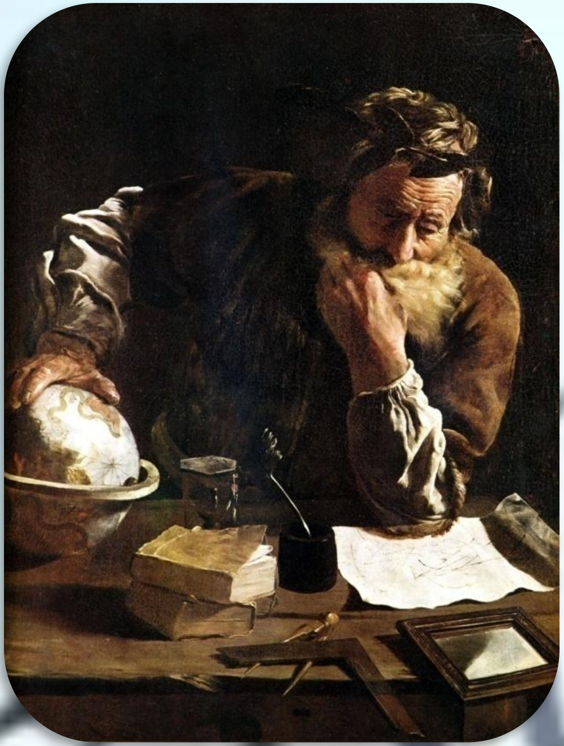
Проблеме π – 4000 лет. Исследователи древних пирамид установили, что частное, полученное от деления суммы двух сторон основания на высоту пирамиды, вырабатывается числом 3,1416. В знаменитом папирусе Ахмеса приводится такое указание для построения квадрата, равного по площади кругу: «Отбрось от диаметра его девятую часть и построй квадрат со стороной, равной остальной части, будет он эквивалентен кругу». Из этого следует, что у Ахмеса π ≈ 3,1605. Так началась письменная история π.



В Вавилоне в V в. до н.э. пользовались числом 3,1215, **а в Древней Греции числом** $(\sqrt{2}+\sqrt{3})$ **≈ 3,1462643. В индийских «сутрах» VI – V в. до н.э. имеются правила, из которых вытекает, что π = 3,008. Наиболее древняя формулировка нахождения приблизительного значения отношения длины окружности к диаметру содержится в стихах индийского математика Аршабхата (V – VI в.):**

Прибавь четыре к сотне и умножь на восемь,
Потом ещё шестьдесят две тысячи прибавь,
Как поделить результат на двадцать тысяч,
Тогда откроется тебе значение
Длины окружности к двум радиусам отношенья

т.е. $\dfrac{\text{äëèíàîêðóæ íîñòè}}{\text{äèàìåòð}} = \dfrac{62832}{20000} \approx 3{,}1416$

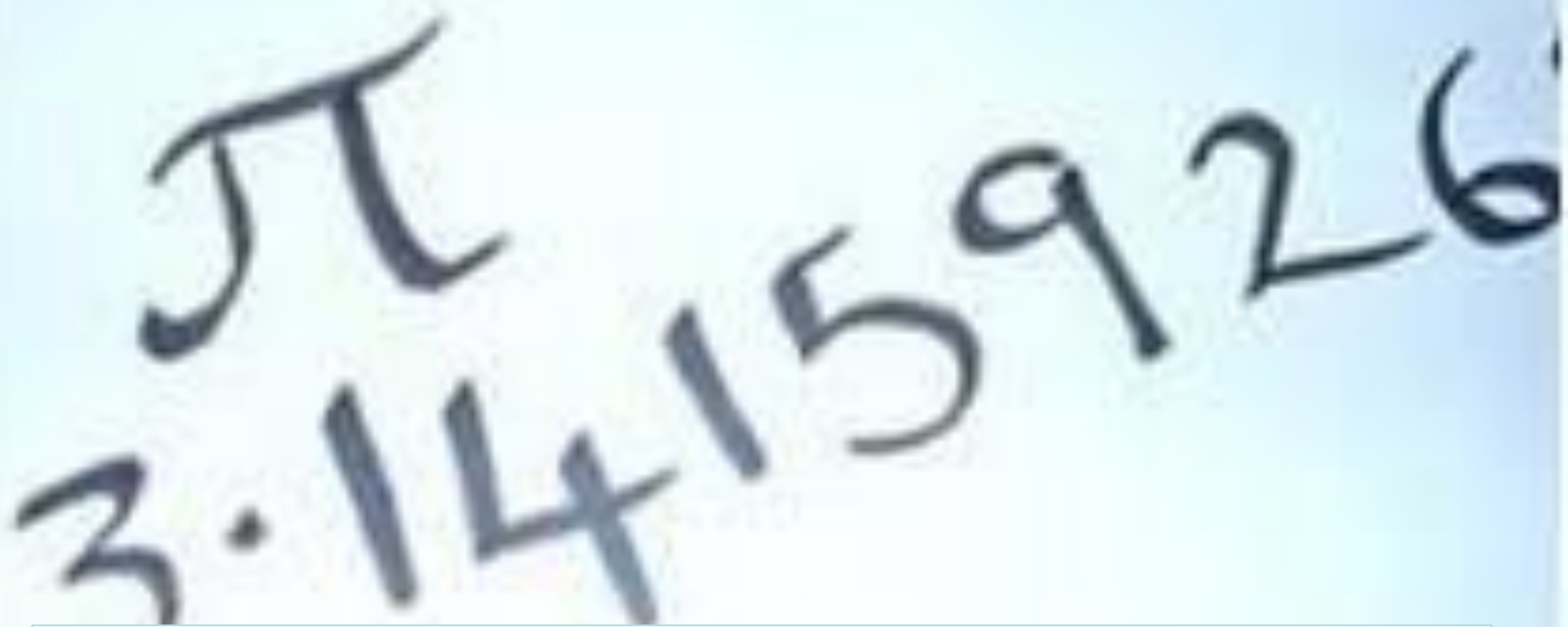


Долгое время все пользовались значением числа, равным

$$\frac{22}{7}$$

Архимед (III в. до н.э.) для оценки числа π вычислял периметры вписанных и описанных многоугольников от шести до 96-ти. Такой метод вычисления длины окружности посредством периметров вписанных и описанных многоугольников применялся многими видными математиками на протяжении почти 2000 лет. Архимед получил:

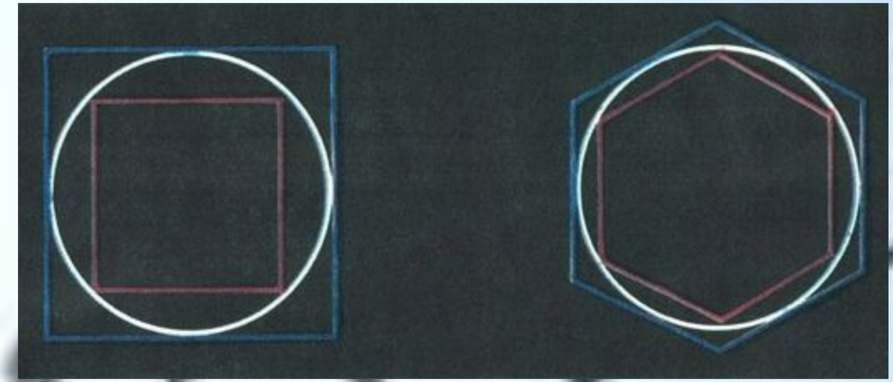
$$3\frac{10}{71}\langle\pi\langle 3\frac{1}{7}$$, т.е. π ≈ 3,1418



Индусы в V – VI пользовались числом 3,1611,
а китайцы - числом 3,1415927; это значение записывалось в виде именованного числа:
3 чжана 1 чи 4 цуня 1 фень 5 ме 9 хао 2 мяо 7 хо.

В XV веке иранский математик Аль-Каши нашёл значение π с 16-ю верными знаками, рассмотрев вписанный и описанный многоугольники с 80.035.168 сторонами.

Андриан Ван Ромен (Бельгия) в XVI в. с помощью 230-угольников получил 17 верных десятичных знаков



А голландский вычислитель – Лудольф Ван-Цейлен (1540 – 1610), вычисляя π, дошёл до многоугольников с 602 029 сторонами, и получил 35 верных знаков для π. Учёный обнаружил большое терпение и выдержку, несколько лет затратив на определение числа π. В его честь современники назвали π – «Лудольфово число». Согласно завещанию на его надгробном камне было высечено найденное им значение π.

Леонард Эйлер

Уильям Джонсон

Обозначение π (первая буква в греческом слове – окружность, периферия) впервые встречается у английского математика Уильяма Джонсона (1706 г.), а после опубликования работы Леонарда Эйлера (1736 г. Санкт-Петербург), вычислившего значение π с точностью до 153 десятичных знаков, обозначение π становится общепринятым.

Различные способы вычисления числа π

Библейское вычислен
числа π

Одно из ранних приближений для числа π можно извлечь из канонического текста Библии, датируемого примерно X-V веками до нашей эры. В третьей книге Царств подробно рассказывается о том, как мастер Хирам сооружал по заказу правителя Иудейского Израильского царства Соломона храм.

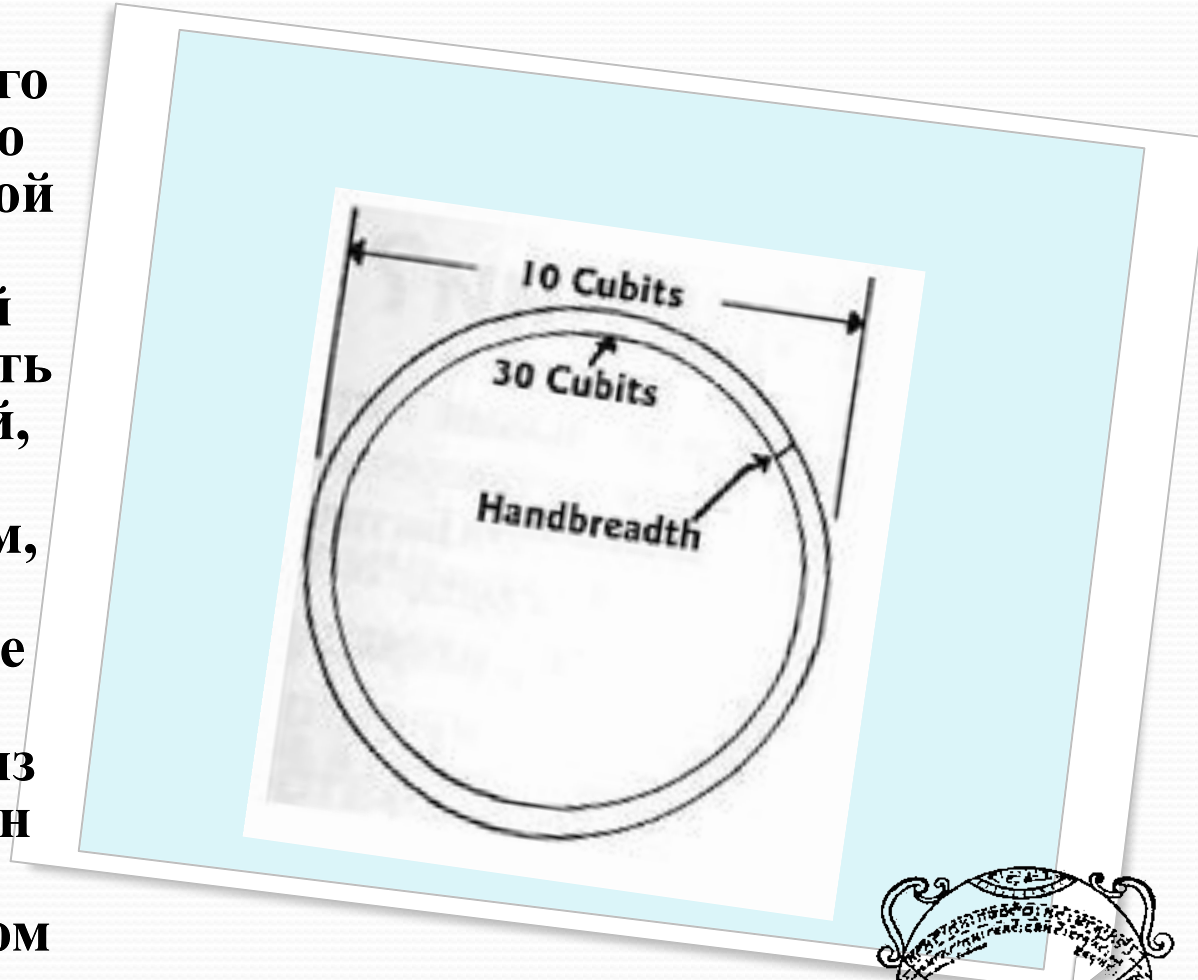
Царь Соломон, держащий в руках изображение храма

Это культовое сооружение украшал большой бассейн для омовения священнослужителей под названием «медного моря»: «И сделал литое из меди море, - от края его до края его десять локтей, - совсем круглое, вышиною в пять локтей, и снурок в тридцать локтей обнимал его кругом.» (Третья книга Царств. Гл. 7, стих 23.)

Если диаметром этого сосуда было 10 локтей, тогда длина окружности должна была быть 31,415926… локтей, а не просто 30 локтей как написано в библии! Любой школьник может сказать вам, что длину окружности круга можно найти, умножив диаметр на пи. Эта явная математическая ошибка заставила нас, как христиан, сомневаться в точности Библии.

Длина диаметра в 10 локтей является длиной от наружного обода до наружного обода, так, как любой человек и будет измерять круглый предмет. Окружность длиной в 30 локтей, однако, является внутренним кругом, после вычитания толщины меди (две ладони одна на каждую сторону), из которой был сделан сосуд. Это и будет необходимым числом для вычисления объема воды.



Экспериментальное определение числа пи. Погрешность измерения.

Воспримем этот текст как древний опыт по экспериментальному определению числа пи и на основании данных оценим погрешность измерения.

Формула для измерения очевидна:

где L - длина окружности,

а D - её диаметр.

$$\pi = \frac{L}{D}$$

Дано: L = 30 локтя, D = 10 локтей.

Из написания видно, что абсолютные погрешности каждой из величин составляют не менее 0,5 локтя. Мы тем самым берём половину последней значащей цифры, если считать, что каждое из чисел имеет две значащие. Вариант, что погрешность измерения была больше, обсудим в конце вычислений. Рассчитаем измеренное число пи

$$\pi = \frac{30}{10} = 3.0$$

Итак, систематическая погрешность измерений равна

$$\Delta L = 0.5, \Delta D = 0.5$$

Оценим относительную погрешность измерения числа пи как среднеквадратичное от относительных погрешностей данных величин:

$$e_\pi = \sqrt{(\frac{0.5}{10})^2 + (\frac{0.5}{30})^2} = 0.053$$

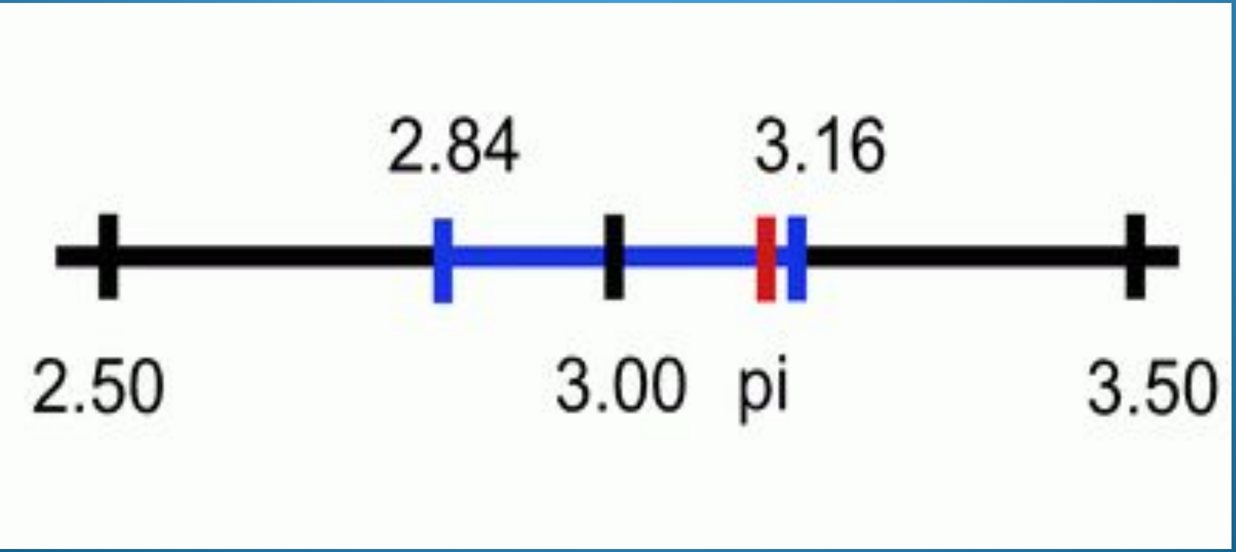
Рассчитаем абсолютную погрешность измерения с учётом этой формулы

$$\Delta\pi = e_\pi * \pi = 0.16$$

следовательно ответ записывается в виде

$$\pi = 3.00 \pm 0.16$$

Значение числа пи, известное нам сейчас с огромной точностью, вполне укладывается в ответ, полученный экспериментально несколько тысяч лет назад. Выходит, что если рассуждать не поверхностно, а с точки зрения методов науки, противоречия между текстом Писания и действительностью нет.



В Библии не содержится ни одной ошибки. Кстати, Соломон сделал это открытие тысячу лет до нашей эры, задолго до того как греки снова нашли число пи.

Начертим на плотном картоне окружность диаметра d (15 см), вырежем получившийся круг и обмотаем вокруг него тонкую нить. Измерив длину L (46,5 см) одного полного оборота нити, разделим L на длину диаметра окружности. Получившееся частное будет приближенны$\frac{L}{2R}$ значением числа π, т.е.

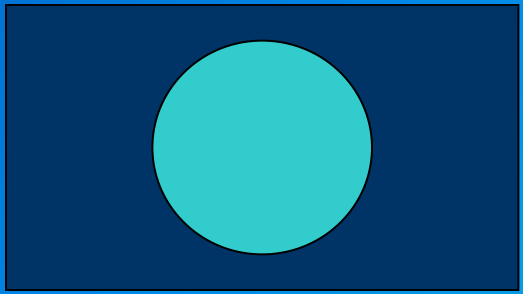
$\pi =$, π = 46,5 см / 15 см.

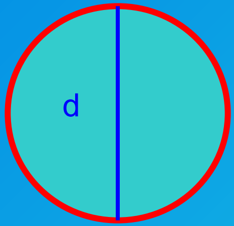
π = 3,1. Данный довольно грубый способ даёт в обычных условия приближённое значение числа

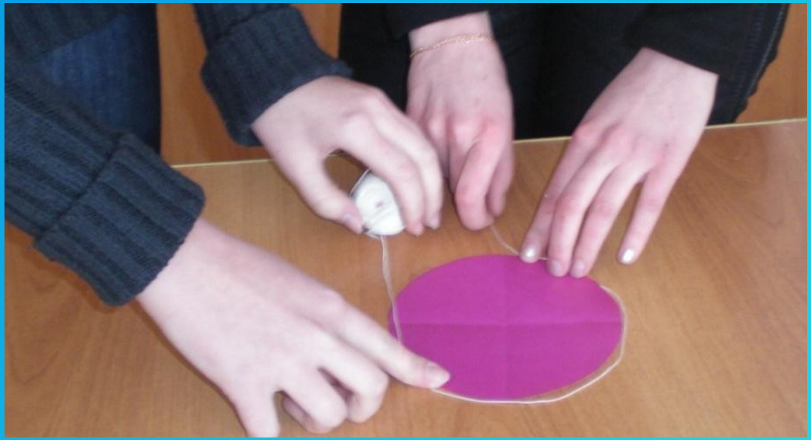
π с точностью до 1.

Простейшие вычисления

Простейшие вычисления





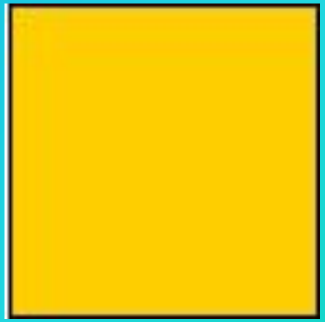


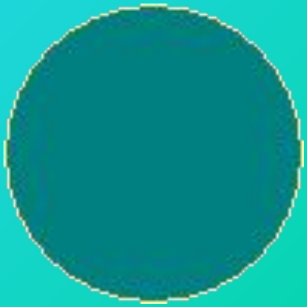
Следуя данным рекомендациям, мы выполнили измерения и вычислили число π. Получили результаты представленные в таблице:

Номер измерения	Диаметр	Длина окружности	Число π
I	20	63	3,15
II	15	47,3	3,153
III	10	31	3,1

Измерение с помощью взвешивания

На листе картона начертим квадрат. Впишем в него круг. Вырежем квадрат. Вырежем из квадрата круг.





Измерение с помощью взвешивания

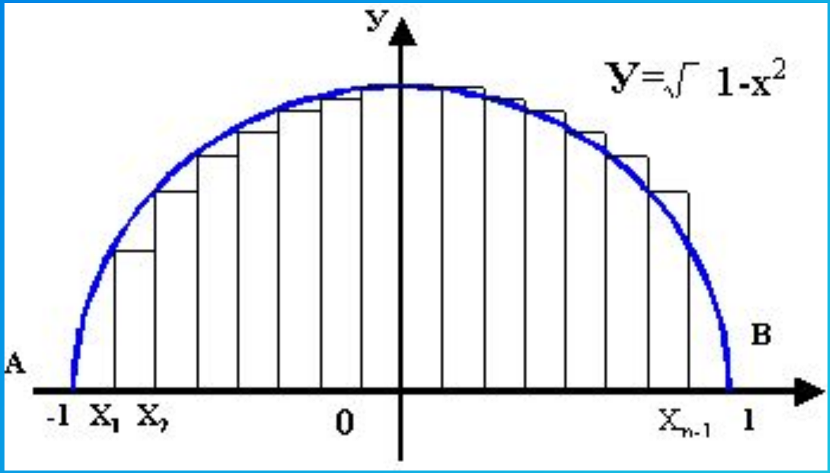
Определим массу картонного квадрата с помощью школьных весов. Взвесим круг. Зная массы квадрата $m_{кв}$ (10 г) и вписанного в него круга $m_{кр}$ (7,8 г), воспользуемся формулами $m=rV$, $V=Sh$, где r и h-соответственно плотность и толщина картона, S-площадь фигуры. Рассмотрим равенства: $m_{кв} = r\,S_{кв}\,h = r\,4\,R^2\,h$,

$m_{кр} = r\,S_{кр}\,h = r\,\pi\,R^2\,h$.

Отсюда $m_{кр} : m_{кв} = \pi : 4$, $\pi = 4\,m_{кр} : m_{кв}$.

$$\pi = 4\,m_{кр} / m_{кв} = 4 * 7{,}8 / 10 = 3{,}12.$$

Суммирование площадей прямоугольников, вписанных в полукруг.



Пусть A (a,0), B (b,0). Опишем на AB полуокружность как на диаметре. Разделим отрезок AB на n равных частей точками $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ и восстановим из них перпендикуляры до пересечения с полуокружностью. Длина каждого такого перпендикуляра - это значение функции f(x) = $\sqrt{1-x^2}$

Площадь S полукруга можно вычислить по формуле

$$S = \frac{b-a}{n}(f(x_0) + f(x_1) + \ldots + f(x_{n-1}))$$

В нашем случае b = 1, a = -1. Тогда π ≈ 2S.

Программа

```
10 REM *** ВЫЧИСЛЕНИЕ p***
20 REM *** МЕТОД ПРЯМОУГОЛЬНИКОВ ***
30 INPUT N
40 DX 1/N
50 FOR I=0 TO N-1
60 F=SQR(1-X^2)
70 X=X+DX
80 A=A+F
90 NEXT I
100 P=4*DX*A
110 PRINT «ЗНАЧЕНИЕ p РАВНО»; P
120 STOP
```

Полученные значения числа записаны в таблице

n	1000	2000	3000	4000	5000	6000
π	3.292	3.216	3.190667	3.181	3.1848	3.192

n	7000	8000	9000	10000	11000	12000
π	3.193714	3.1935	3.192889	3.196	3.192	3.193667

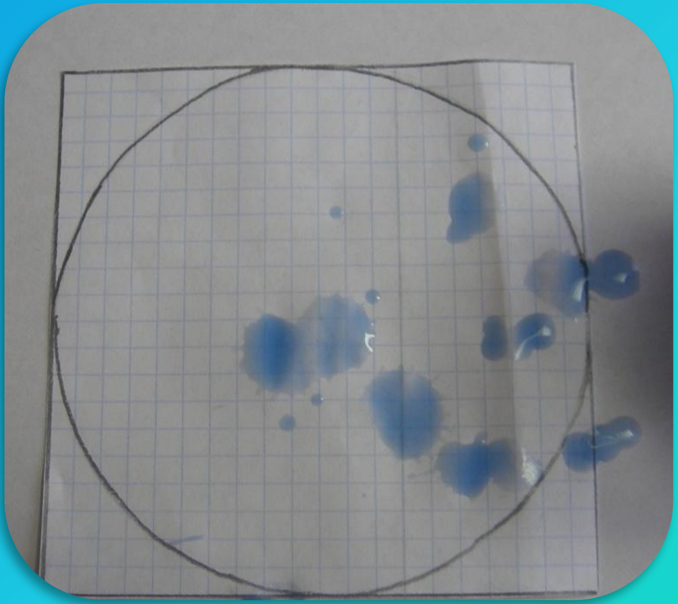
Суммирование площадей прямоугольников, вписанных в полукруг.

Метод Монте-Карло

Это фактически метод статистических испытаний. Свое экзотическое название он получил от города Монте-Карло в княжестве Монако, знаменитого своими игорными домами. Дело в том, что метод требует применения случайных чисел, а одним из простейших приборов, генерирующих случайные числа, может служить рулетка. Впрочем, можно получить и при помощи … дождя.

Метод Монте-Карло

Для опыта приготовим кусок картона, нарисуем на нём квадрат и впишем в квадрат круг. Если такой чертёж некоторое время подержать под дождём, то на его поверхности останутся следы капель.



Метод Монте-Карло

Подсчитаем число следов внутри квадрата и внутри круга. Очевидно, что их отношение будет приближенно равно отношению площадей этих фигур, так как попадание капель в различные места чертежа равновероятно. Пусть $N_{кр}$ - число капель в круге, $N_{кв}$ – число капель в квадрате, тогда

$$\pi=4N_{кр}/N_{кв}$$

Применение метода Монте-Карло стало возможным только благодаря компьютерам

Программа 2

```
10 REM  *** ВЫЧИСЛЕНИЕ ПИ ***
20 REM *** МЕТОД МОНТЕ-КАРЛО ***
30 INPUT N
40 M=0
50 FOR I=1 TO N
60 T=INT (RND(1)*10000)
70 X=INT(T/100)
80 Y=T-X*100
90 IF X^2+Y^2<10000 THEN M=M+1
100 NEXT I
110 P=4*M/N
120 PRINT  " ЗНАЧЕНИЕ ПИ РАВНО" ; P
130 STOP
```

Полученные значения числа записаны в таблице

n	1000	2000	3000	4000	5000	6000
π	3.14357	3.14253	3.14231	3.14214	3.14212	3.14206

n	7000	8000	9000	10000	11000	12000
π	3.14184	3.14197	3.14193	3.14169	3.14203	3.14193

Вычисление с помощью ряда Тейлора

Обратимся к рассмотрению произвольной функции f(x). Предположим, что для неё в точке x_0 существуют производные всех порядков до n-го включительно. Тогда для функции f(x) можно записать ряд Тейлора:

$$f(x) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0)^1 + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + \ldots$$

Вычисление с помощью ряда Тейлора

Программа

```
REM "Вычисление пи"
REM "Разложение в ряд Тейлора "
INPUT n
a = 1
FOR i = 1 TO n
d = 1 / (i + 2)
f = (-1) ^ i * d
a = a + f
NEXT i
p = 4 * a
PRINT "значение пи равно"; p
END
```

Вычисление с помощью ряда Тейлора

n	1000	2000	3000	4000	5000	6000
π	3.22941	3.22841	3.22809	3.22792	3.22782	3.22776

n	7000	8000	9000	10000	11000	12000
π	3.22771	3.22767	3.22765	3.22763	3.22761	3.22759

С праздником!