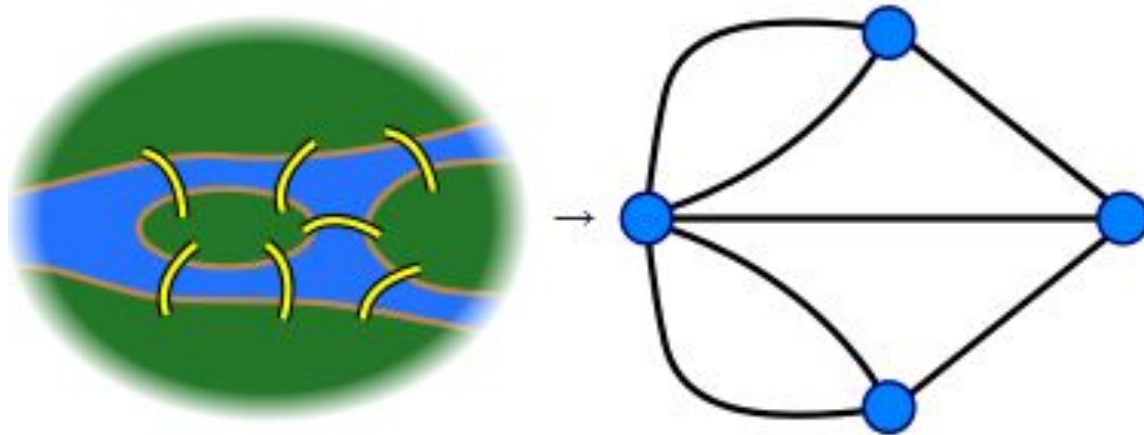


***Лекція 9.***  
**Ейлерові графи.**  
**Гамільтонові графи**

# §/ Ейлерові графи

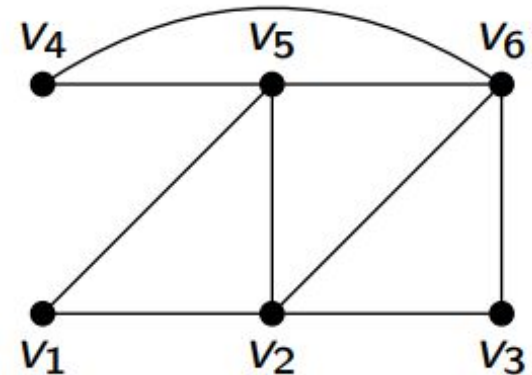
Однією з перших задач теорії графів у працях видатного математика XVIII сторіччя Л. Ейлера була задача щодо кенігсберзьких мостів.



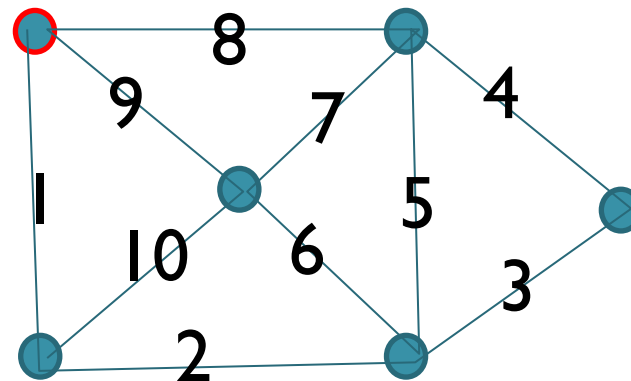
Якщо існує цикл у графі, в якому кожне ребро графа брало участь один раз, то такий цикл називається **ейлеровим циклом**, а граф, який містить такий цикл, – **ейлеровим графом**.

Скінченний граф  $G$  є ейлеровим графом тоді й лише тоді, коли:

- 1)  $G$  – зв'язний;
- 2) усі його вершини мають парні степені.



Графи, що не мають ейлерового циклу, але мають ейлеровий ланцюг називають напівейлеровими. Такі графи мають дві вершини непарного степеню, ланцюг починається в одній з них, а закінчується в іншій.



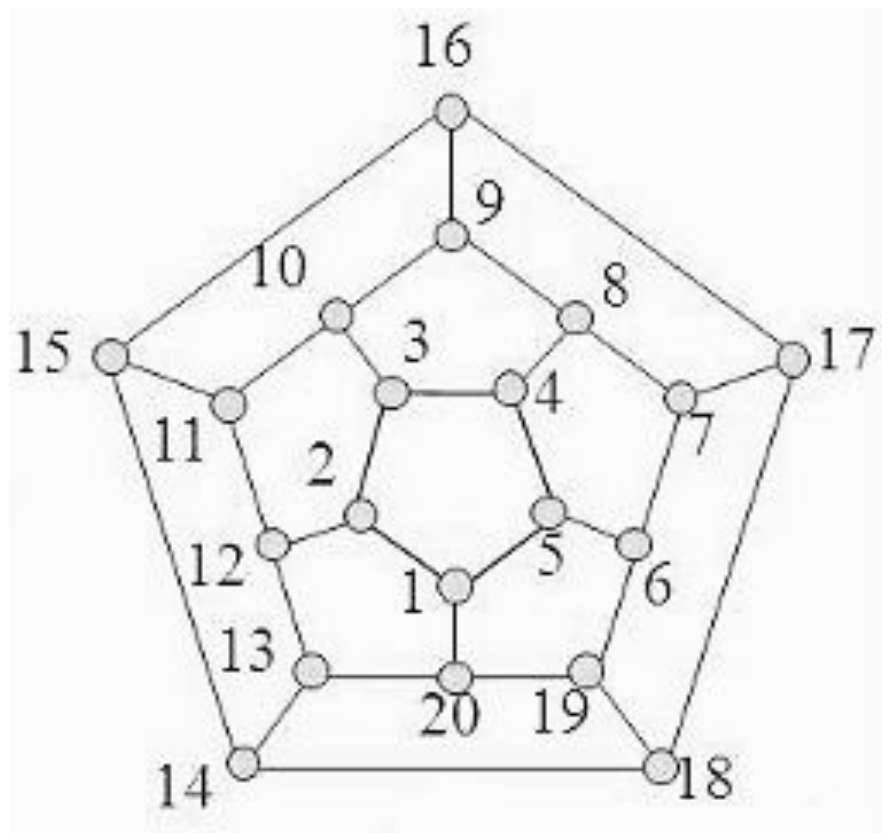
## §2 Гамільтонові графи

**Гамільтоновим циклом** називається простий цикл, що проходить через усі вершини розглянутого графа.

Гамільтонів цикл названо іменем ірландського математика Вільямса Гамільтона, який 1859 року вперше почав вивчати ці питання. Він розглядав задачу мандрівника: обійти всі столиці заданих країн (вершини графа) по одному разу і повернутися в першу.

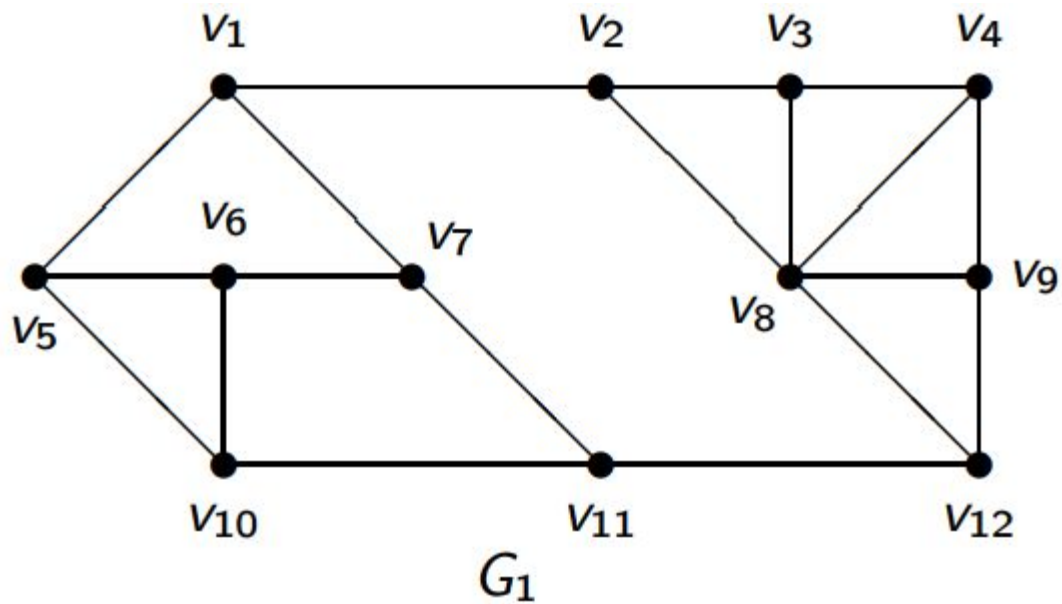
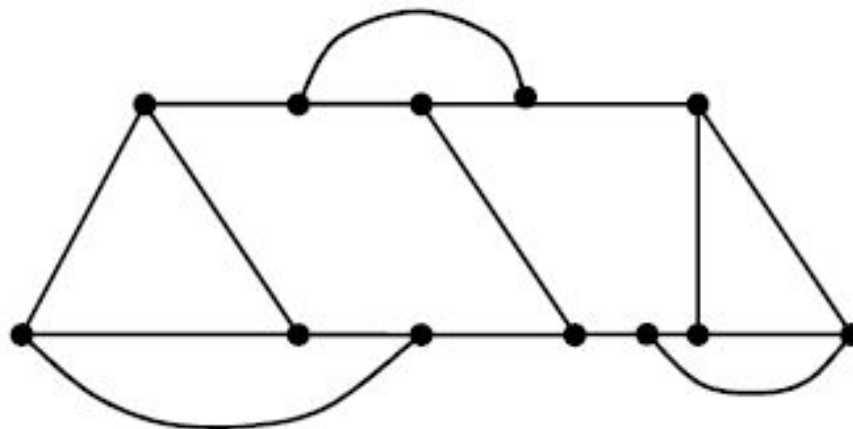
**ЗАУВАЖЕННЯ.** Гамільтонів цикл існує далеко не в кожному графі. Через кожні дві вершини графа може проходити простий цикл, а гамільтонів цикл при цьому може бути відсутній.

Для 20 країн задача є обходом додекаедра:

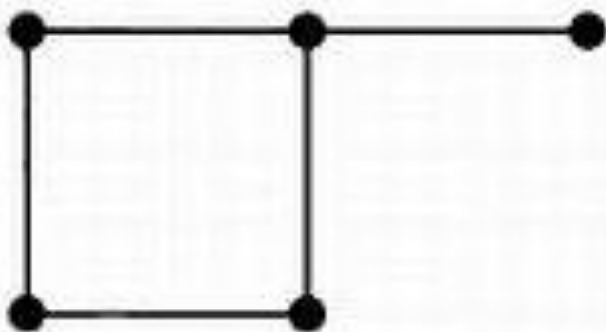
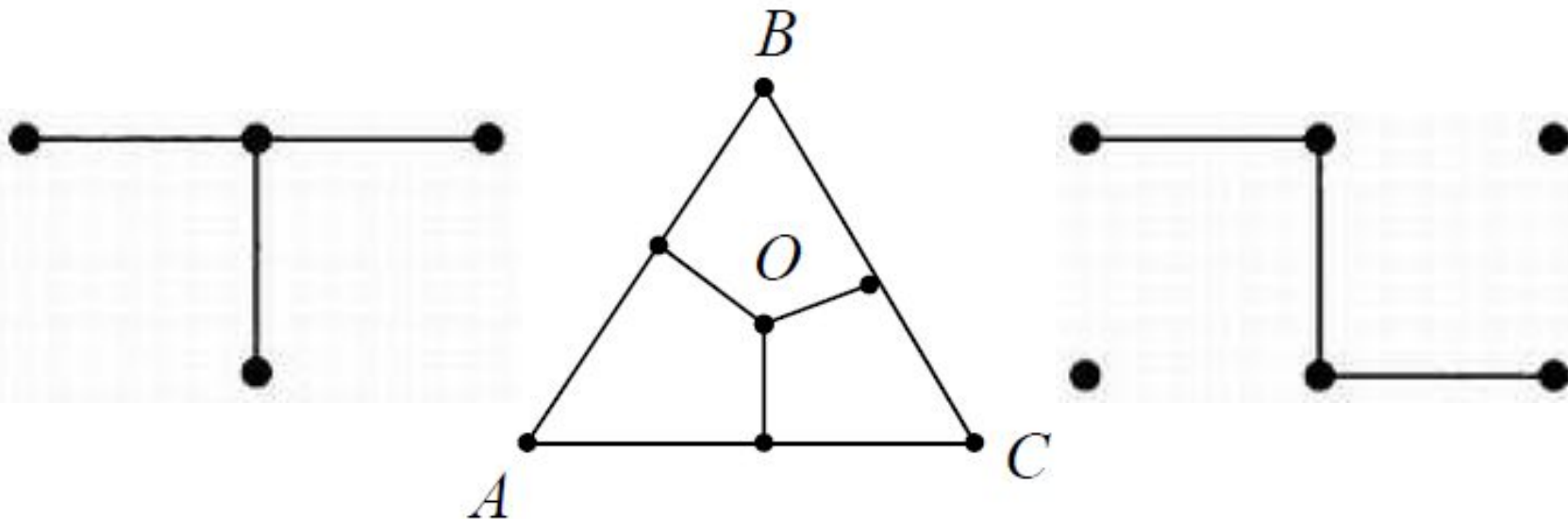


1-2-3-4-5-6-7-8-9-10-11-12-13-14-15-16-17-18-19-20-  
1

# Гамільтонові графи



# Графи, які не мають гамільтонових циклів



Граф, який має гамільтонів ланцюг називають напівгамільтоновим.



***Дерева.***



## §1 Основні визначення

**Деревом** називається зв'язний граф без циклів.

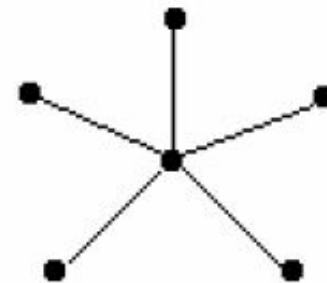
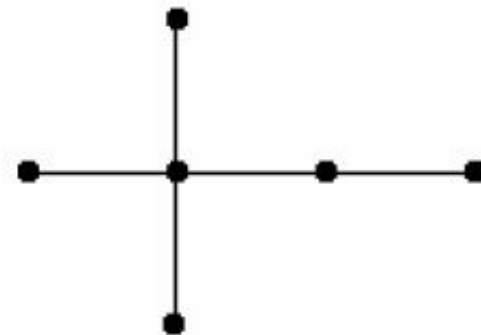
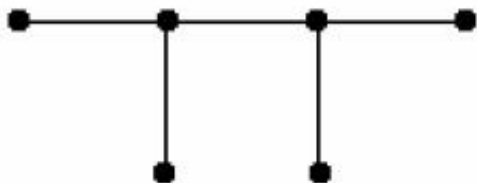
Дерево не може мати ані кратних ребер, ані петель, ані ізольованих вершин.

Кожний ланцюг у дереві є простий, через те що в іншому разі дерево містило б цикл, що є неможливе.

При додаванні до дерева ребра утворюється цикл, а при вилученні хоча б одного ребра дерево розпадається на компоненти, кожна з яких є або деревом, або ізольованою вершиною.

Дерева називаються **істотно різними**, якщо вони не є ізоморфні.

Усі можливі дерева з шістьма вершинами – неізоморфні.



**Теорема (перелічуються властивості дерев, кожна з яких повністю характеризує дерево).**

Еквівалентні є такі означення дерева:

а) **дерево** – це зв'язний граф без циклів;

б) **дерево** – це зв'язний граф, у якому кожне ребро є перешийком;

в) **дерево** – це зв'язний граф, цикломатичне число якого дорівнює нулеві;

$m - n + 1 = 0$  або  $m = n - 1$ , тобто у кожному дереві кількість ребер є на одиницю менша за кількість вершин.

г) **дерево** – це граф, у якому для кожних двох вершин існує лише один з'єднувальний ланцюг.

## §2 Остовне (Кістякове) дерево графа

Вилучання з довільного зв'язного графа всіх циклових ребер дає в наслідок дерево

$T = (X', U')$  таке, що:

- 1)  $X' = X$ , тобто множина вершин дерева  $T$  збігається з множиною вершин графа  $G$ ;
- 2)  $U' \subseteq U$ , тобто кожне ребро дерева є водночас ребром графа  $G$ .

Кожне дерево  $T$ , яке задовольняє умовам 1) та 2) називається **кістяковим деревом** графа  $G$ .

**ЗАУВАЖЕННЯ.** Через те, що вилучання циклових ребер можна провадити у різні способи, то **один і той самий граф має багато кістякових**

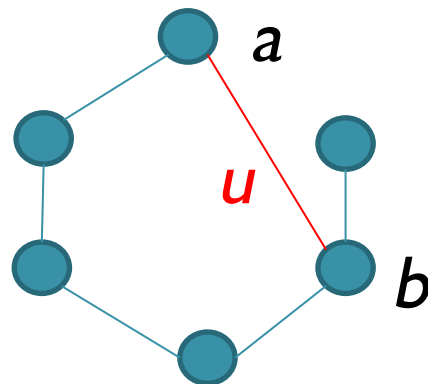
Нехай у графі  $G$  виокремлено остовне дерево  $T$ . Ребра графа, які не ввійшли до  $T$ , називатимемо **хордами**.

**Теорема.** Якими б не були остовне дерево і хорда  $u$  цього дерева, у графі  $G$  існує єдиний цикл, який має хорду  $u$  і не має інших хорд.

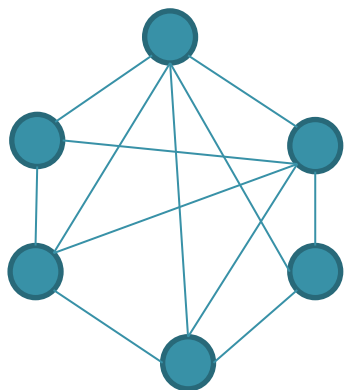
Д о в е д е н н я.

Нехай  $u = \{a, b\}$ . У дереві  $T$  є єдиний ланцюг, який з'єднує вершини  $a$  та  $b$ .

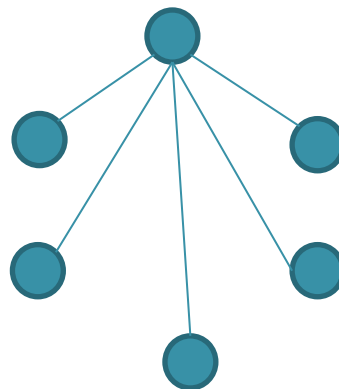
Долучаючи до цього ланцюга ребро  $u$ , здобуваємо потрібний цикл.



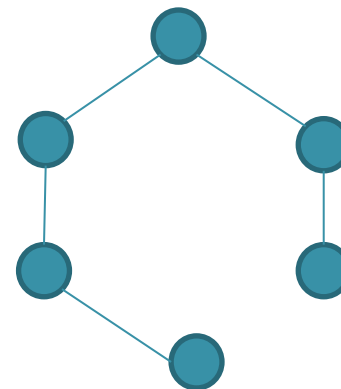
Граф  $G$



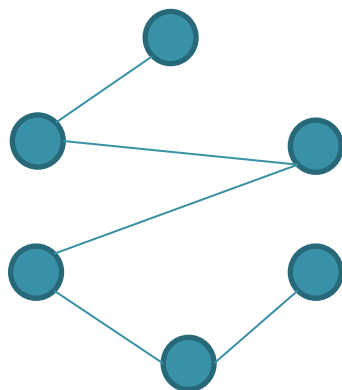
Остовні дерева  $T$



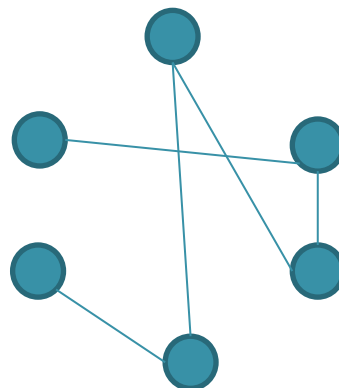
$T_1$



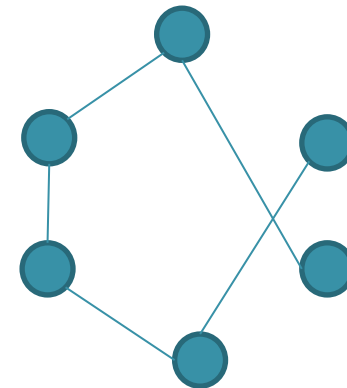
$T_2$



$T_3$



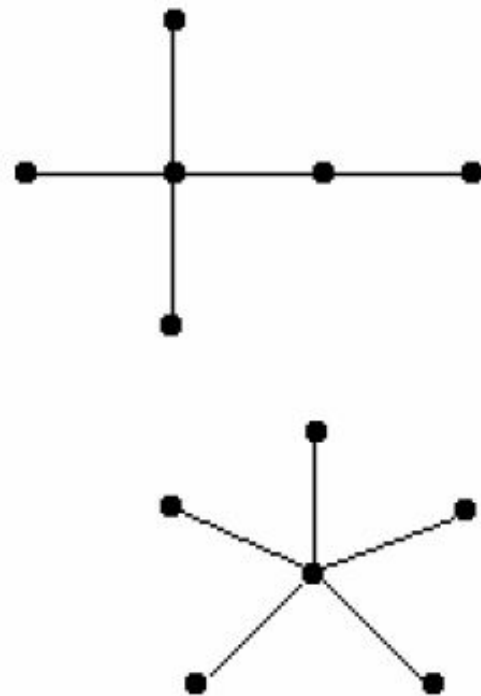
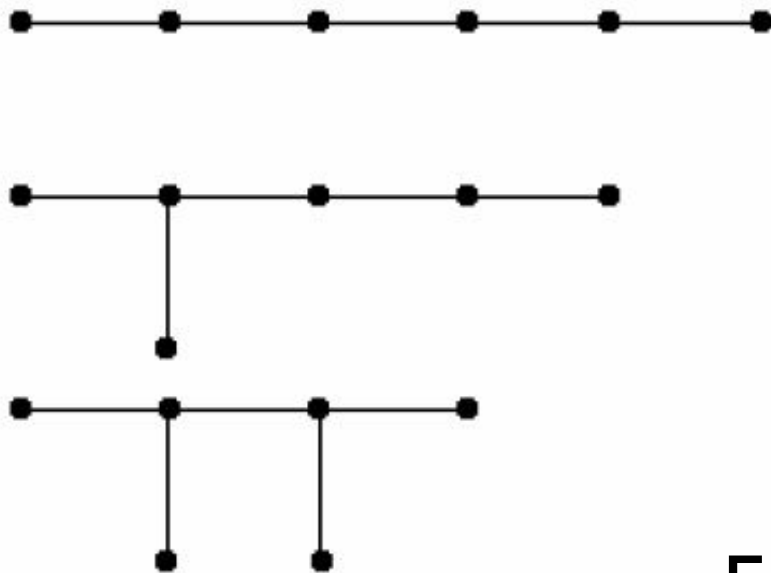
$T_4$



$T_5$

Довільний незв'язний граф, який не містить циклів, називається **лісом**.

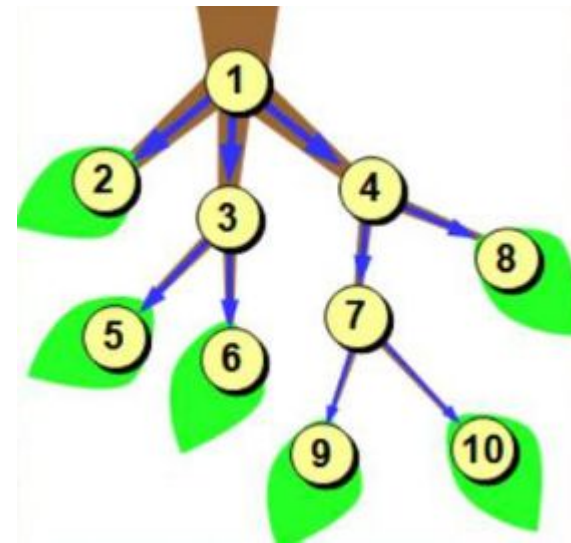
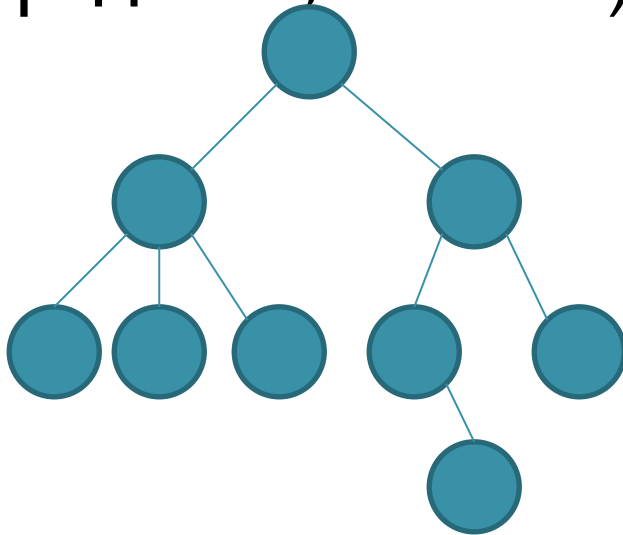
**Еквівалентне визначення лісу:** граф  **$G$** , усі компоненти зв'язності якого є деревами, називається **лісом**.



Граф  $G$

## §3 Кореневі дерева

**Дерево** – це сукупність елементів, що називаються вузлами (один з яких корінь), та відношень („батьківських”), що утворюють ієрархічну структуру вузлів. Вузли можуть бути елементами будь-якого типу (літерами, рядками, числами).



Піддерево, корінь якого знаходиться в лівому (правому) нащадку вершини, називається **ЛІВИМ** (**ПРАВИМ**) **піддеревом** цієї вершини.



**Висота вузла** дерева - це довжина самого довгого шляху з цього вузла до будь-якого листа.

**Висота дерева** співпадає з висотою кореня.

**Глибина вузла** – це довжина шляху від кореня до цього вузла.

**Степінь вузла** – це кількість дуг, що з нього виходить.

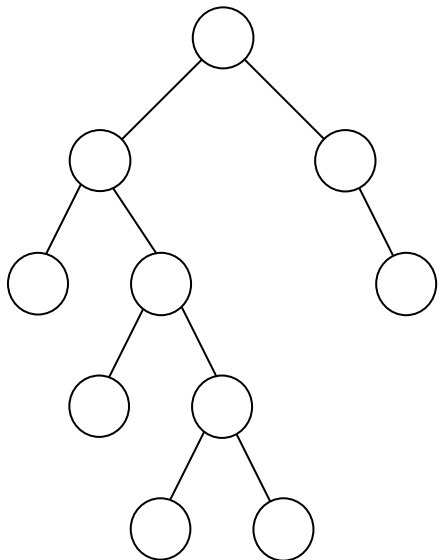
**Степінь дерева** дорівнює максимальному степеню вузла, що входить у дерево.

**Листя** в дереві - це вузли, що мають степінь нуль.

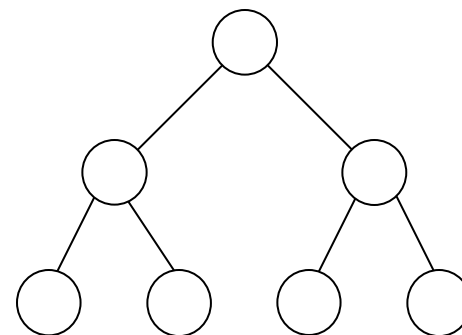
**Бінарне дерево** – це дерево степінь якого дорівнює два .

Дерева, степінь яких більше двох, називаються **розгалуженими**.

**Повне бінарне** дерево - це дерево для якого на всіх рівнях менше чим  $n$  вузли мають степінь 2, а на рівні  $n$  – степінь 0.



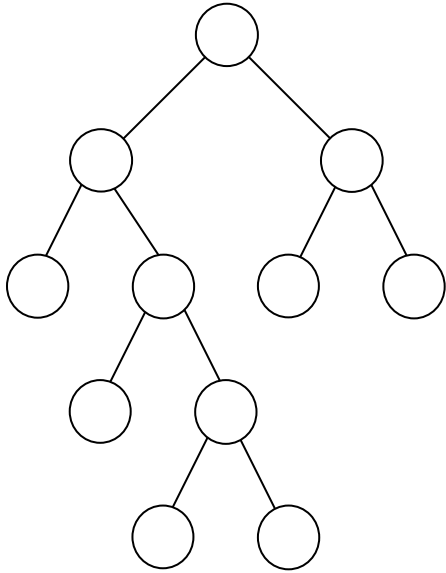
а) неповне  
бінарне  
дерево



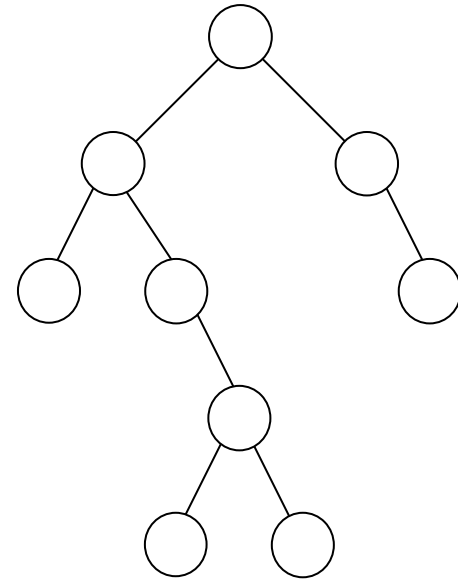
б) повне  
бінарне  
дерево

**Строго бінарне** дерево складається тільки з вузлів, що мають степінь 2 або 0.

**Нестрого бінарне** дерево містить вузли зі степенем 1.



а) строго бінарне дерево

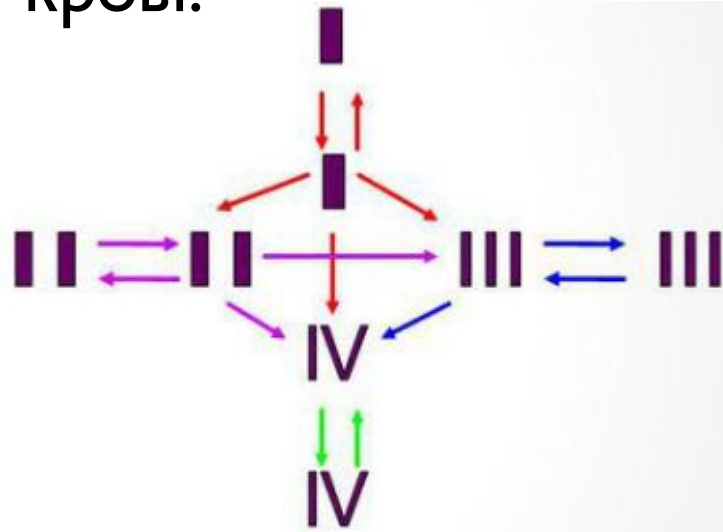


б) нестрого бінарне дерево





8) План діяльності або план виконання певних робіт (розклад). Наприклад, можливість переливання крові:

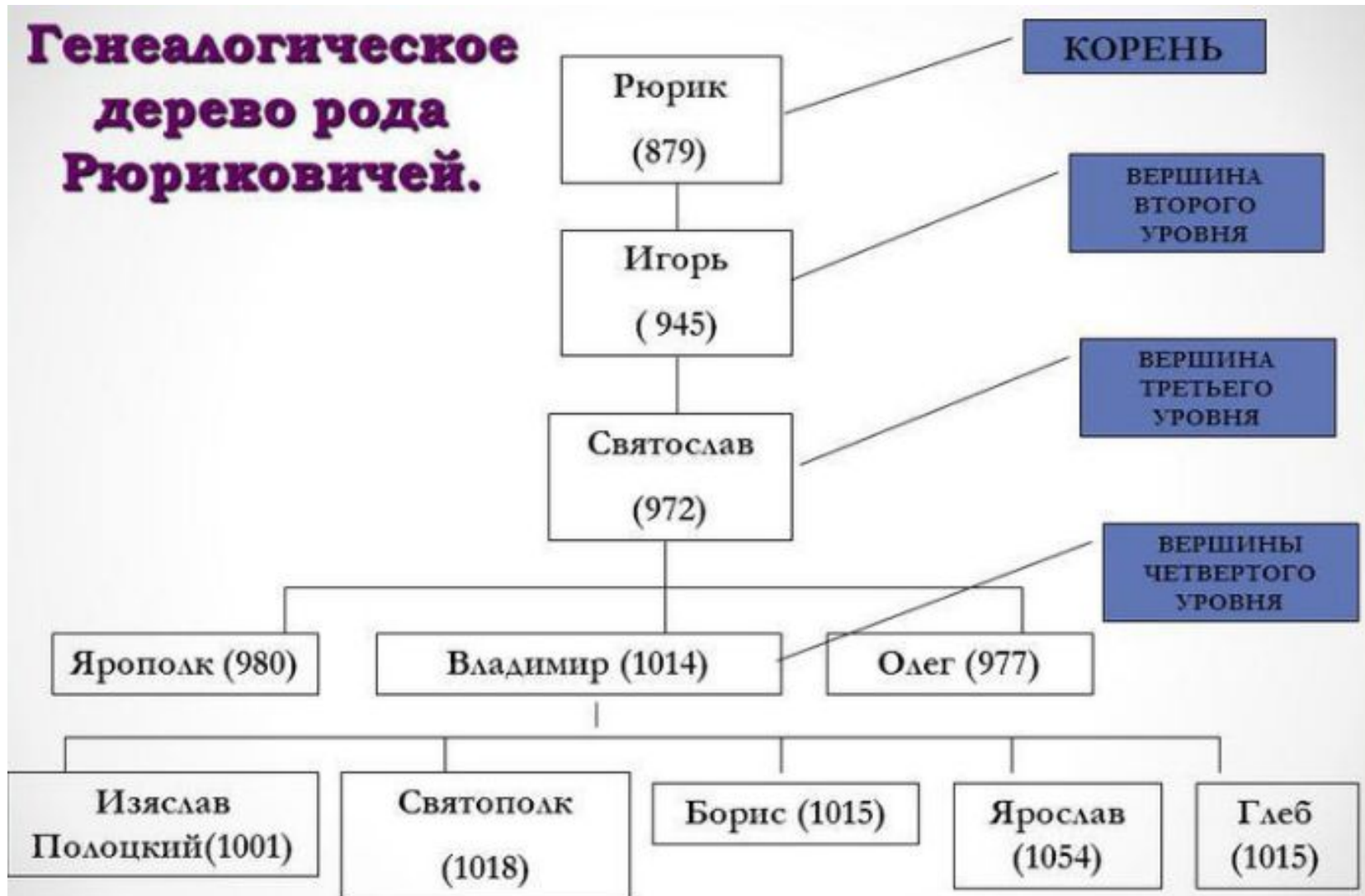


9) Лабіринти;

10) Різні математичні об'єкти (відношення, алгоритми, програми тощо)

## II) Генеалогічні дерева.

### Генеалогическое дерево рода Рюриковичей.



## **4.2 Задачі, які розв'язують за допомогою графів:**

- 1) Доставка (товари, послуги) – необхідно визначити маршрути мінімальної довжини, мінімальної вартості тощо.
- 2) Інспектування розподілених систем (електромереж, телефонних, залізничних ліній).
- 3) Теорія ігор, головоломки.
- 4) Комунальне господарство, планування.
- 5) Складання розкладу.
- 6) Проектування комп'ютерних мереж.