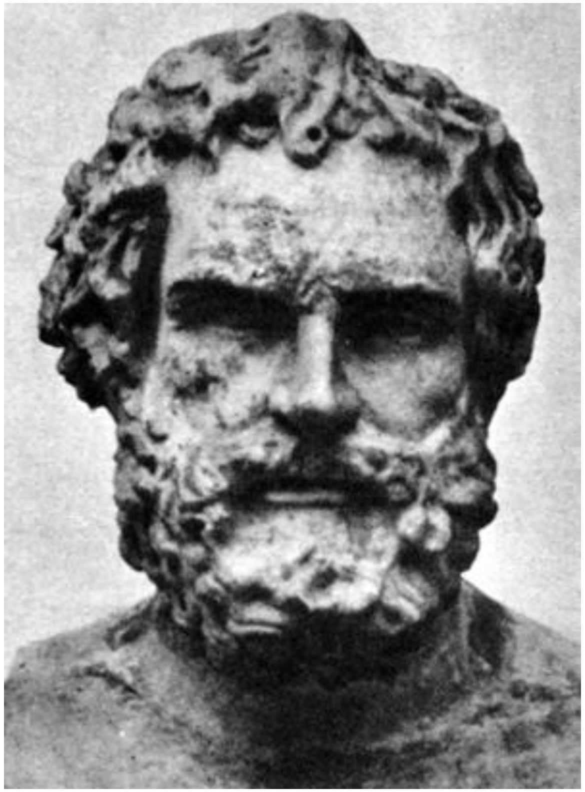
Фалес Милетский VI век до н. э.



Фалес первым сформулировал и доказал несколько геометрических теорем, среди которых:

1) вертикальные углы равны;

2) имеет место равенство треугольников по одной стороне и двум прилегающим к ней углам;

3) углы при основании равнобедренного треугольника равны;

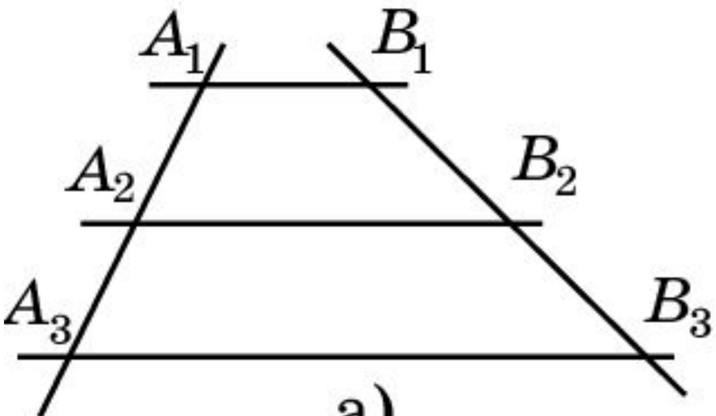
Фалес научился определять расстояние от берега до корабля. В основе этого способа лежит теорема, названная впоследствии теоремой Фалеса:

Если параллельные прямые, пересекающие стороны угла, отсекают равные отрезки на одной его стороне, то они отсекают равные отрезки и на другой его стороне.

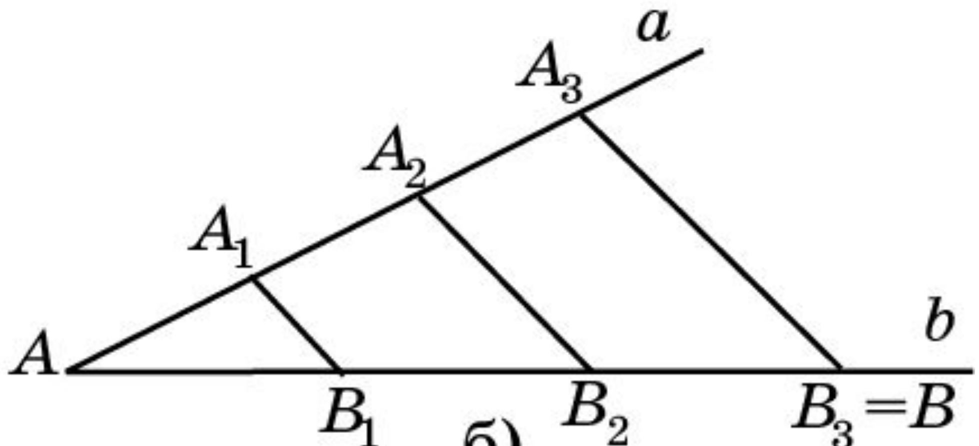
Легенда рассказывает о том, что Фалес, будучи в Египте, поразил фараона Амасиса тем, что сумел точно установить высоту пирамиды, дождавшись момента, когда длина тени палки становится равной её высоте, и тогда измерил длину тени пирамиды.

Теорема Фалеса

Теорема. Если параллельные прямые, пересекающие стороны угла, отсекают на одной его стороне равные отрезки, то они отсекают равные отрезки и на другой его стороне (рис. а).



а)



б)

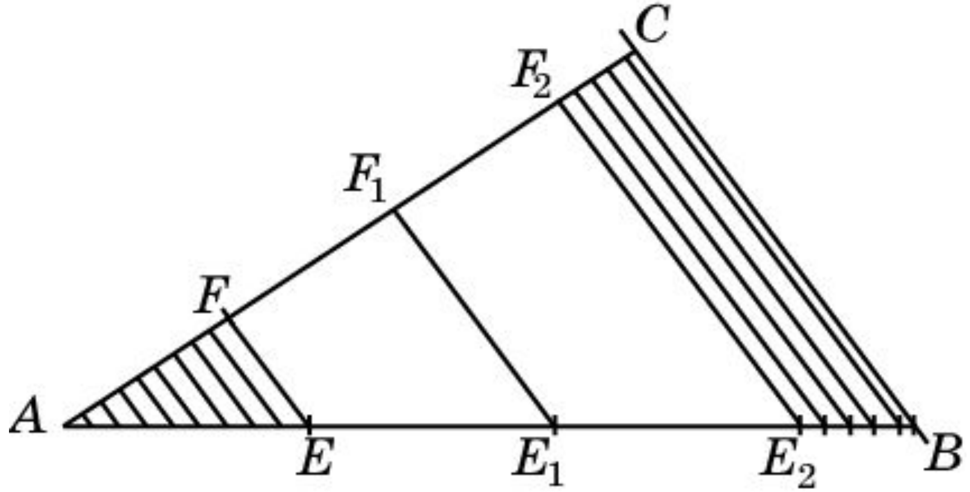
Теорему Фалеса можно применять для деления отрезка на n равных частей (рис. б).

Теорема о пропорциональных отрезках

Отношением $\frac{AB}{CD}$ двух отрезков AB и CD называется число, показывающее сколько раз отрезок CD и его части укладываются в отрезке AB.

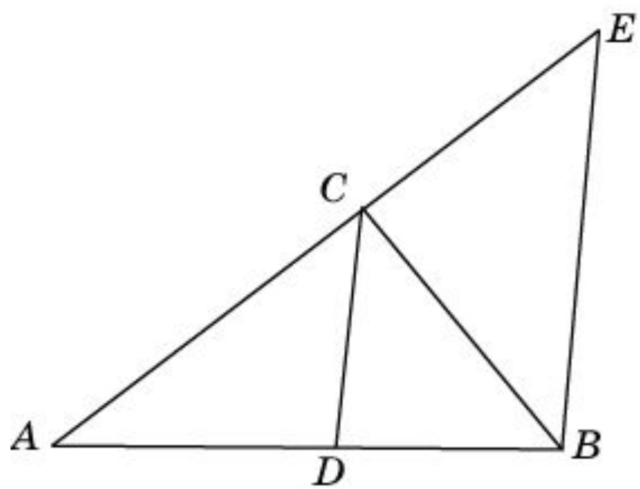
Говорят, что отрезки AB, CD пропорциональны отрезкам A_1B_1, C_1D_1, если равны их отношения

Теорема. (О пропорциональных отрезках.) Параллельные прямые, пересекающие стороны угла, отсекают от сторон угла пропорциональные отрезки.



Свойство биссектрисы треугольника

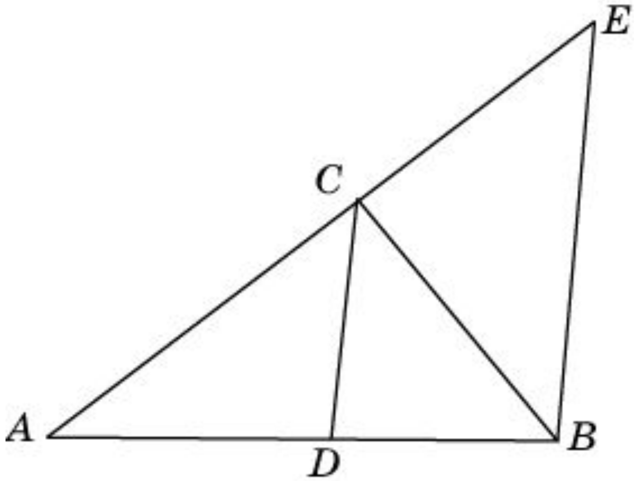
Биссектриса угла треугольника делит противоположную сторону на части, пропорциональные прилежащим сторонам, т.е. если CD – биссектриса треугольника ABC, то $AD : DB = AC : BC$.



Доказательство: Проведем прямую BE, параллельную CD. В треугольнике BEC угол B равен углу E. Следовательно, $BC = EC$. По теореме о пропорциональных отрезках, $AD : DB = AC : CE = AC : BC$.

Обратное свойство

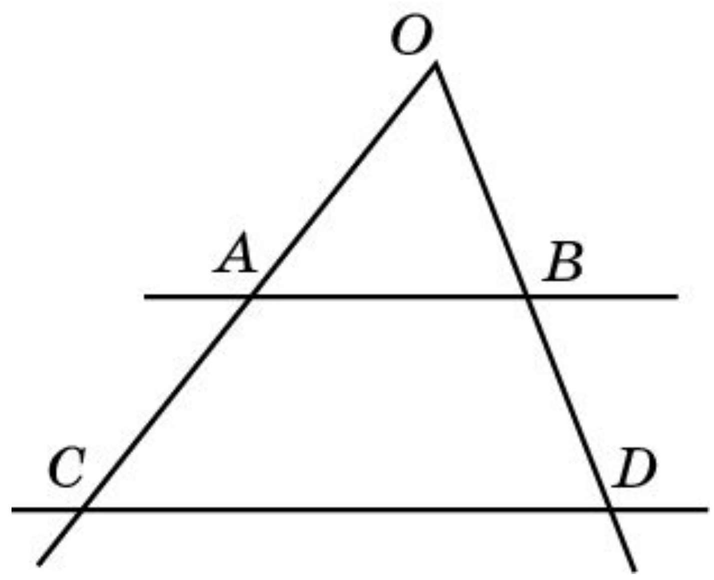
Если луч, проведенный из вершины угла треугольника, делит противоположную сторону на части, пропорциональные сторонам треугольника, прилежащим к лучу, то этот луч является биссектрисой угла треугольника.



Доказательство: Пусть для луча CD выполняется равенство $AD : DB = AC : BC$. Проведем прямую BE, параллельную CD. По теореме о пропорциональных отрезках, $AD : DB = AC : CE$. Сравнивая эти два равенства, получаем равенство $BC = CE$, из которого следует равенство углов CBE и BEC. Но угол CBE равен углу BCD, а угол BEC равен углу ACD. Значит, CD – биссектриса треугольника ABC.

Упражнение 1

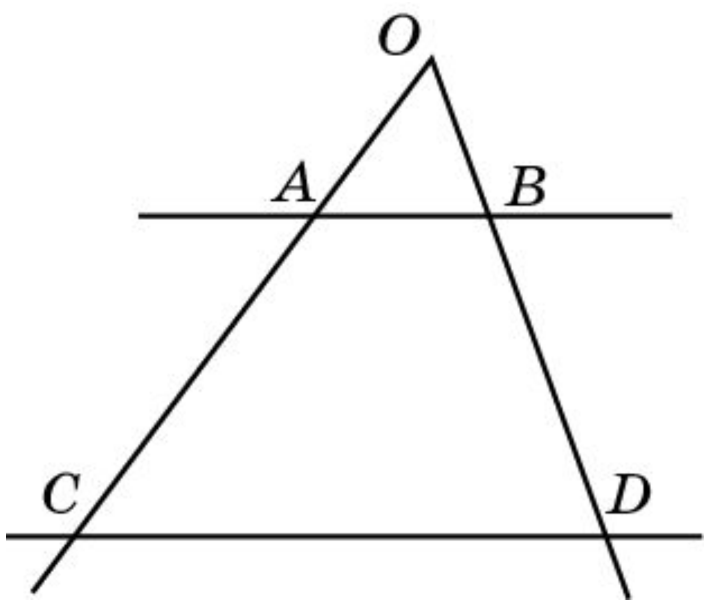
Стороны угла с вершиной O пересечены двумя параллельными прямыми в точках A, C и B, D соответственно. Найдите OC, если $OB = BD = 5$ и $OA = 6$.



Ответ: 12.

Упражнение 2

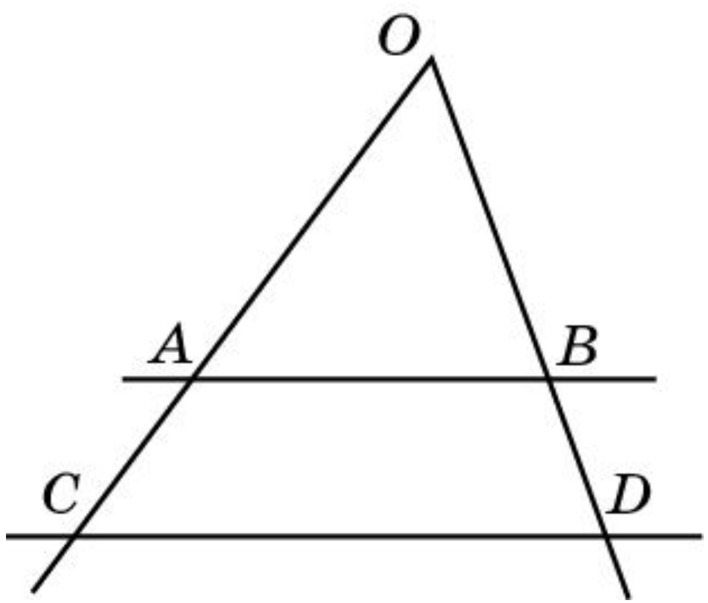
Стороны угла с вершиной O пересечены двумя параллельными прямыми в точках A, C и B, D соответственно. Найдите OD, если $OA = 6$, $AC = 12$ и $OB = 5$.



Ответ: 15.

Упражнение 3

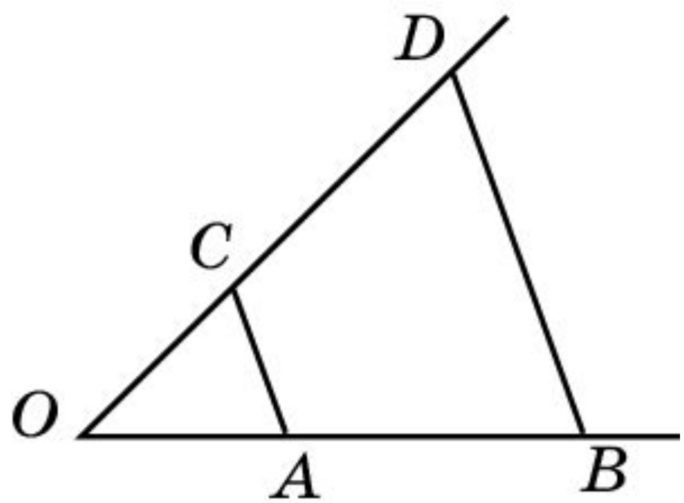
Стороны угла с вершиной O пересечены двумя параллельными прямыми в точках A, C и B, D соответственно. Найдите OA, если $OC = 24$ и $OB : OD = 2 : 3$.



Ответ: 16.

Упражнение 4

Стороны угла с вершиной O пересечены двумя параллельными прямыми в точках A, B и C, D соответственно. Найдите OA, если $OB = 15$ см и $OC : OD = 2 : 5$.



Ответ: 6 см.

Упражнение 5

Определите, пропорциональны ли пары отрезков a, b и c, d, если:

а) $a = 0{,}8$ см, $b = 0{,}3$ см, $c = 2{,}4$ см, $d = 0{,}9$ см;

б) $a = 50$ мм, $b = 6$ см, $c = 10$ см, $d = 18{,}5$ см.

Ответ: а) Да; б) нет.

Упражнение 6

Среди отрезков a, b, c, d, e выберите пары пропорциональных отрезков, если $a = 2$ см, $b = 17{,}5$ см, $c = 16$ см, $d = 35$ см, $e = 4$ см.

Ответ: a, e и b, d.

Упражнение 7

Даны три отрезка: a, b, и c. Какова должна быть длина четвертого отрезка d, чтобы из них можно было образовать две пары пропорциональных отрезков, если $a = 6$ см, $b = 3$ см, $c = 4$ см, и отрезок d больше каждого из этих отрезков.

Ответ: 8 см.

Упражнение 8

На одной из сторон угла расположены два отрезка 3 см и 4 см. Через их концы проведены параллельные прямые, образующие на другой стороне также два отрезка. Больший из отрезков равен 6 см. Чему равен другой отрезок?

Ответ: 4,5 см.

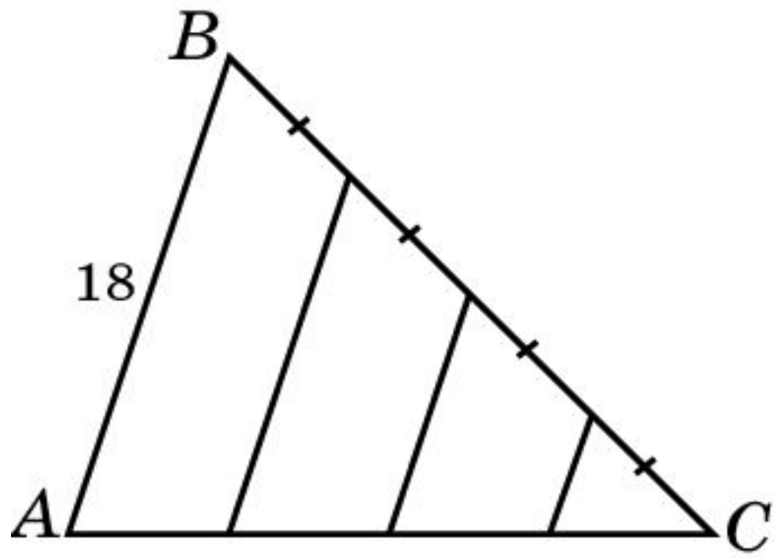
Упражнение 9

Стороны угла с вершиной O пересечены двумя параллельными прямыми в точках A_1, A_2 и B_1, B_2 соответственно. Найдите: а) B_1B_2, если $OA_1 = 8$ см, $A_1A_2 = 4$ см, $OB_2 = 6$ см; б) OB_1 и OB_2, если $OA_1 : OA_2 = 3 : 5$ и $OB_2 - OB_1 = 8$ см; в) OA_1 и OA_2, если $OB_1 : B_1B_2 = 2 : 3$ и $OA_1 + OA_2 = 14$ см.

Ответ: а) 2 см; б) 12 см и 20 см; в) 4 см и 10 см.

Упражнение 10

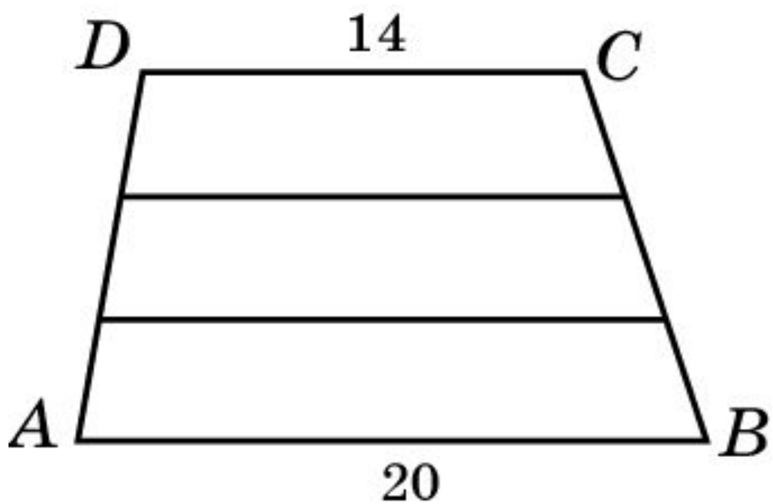
В треугольнике ABC сторона BC разделена на четыре равные части и через полученные точки деления проведены прямые, параллельные стороне AB, равной 18 см. Найдите отрезки этих прямых, заключенные внутри треугольника.



Ответ: 4,5 см, 9 см, 13,5 см.

Упражнение 11

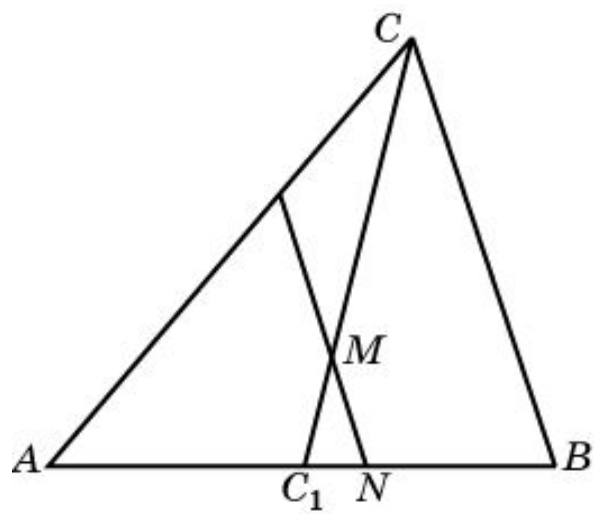
Основания трапеции равны 14 см и 20 см. Одна из боковых сторон разделена на три равные части и через точки деления проведены прямые, параллельные основаниям трапеции. Найдите отрезки этих прямых, заключенные внутри трапеции.



Ответ: 16 см и 18 см.

Упражнение 12

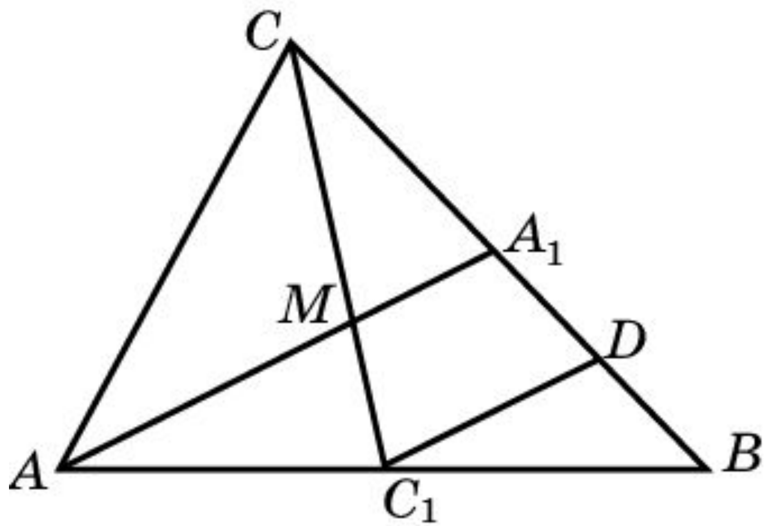
На медиане CC_1 треугольника ABC взята точка M, $CM:MC_1 = 3:1$. Через нее проведена прямая, параллельная стороне BC, пересекающая сторону AB в точке N. Найдите отношение $AN:NB$.



Решение. $C_1N:NB = 1:3$, $AC_1 = C_1B$, следовательно, $AN:NB = 5:3$.

Упражнение 13

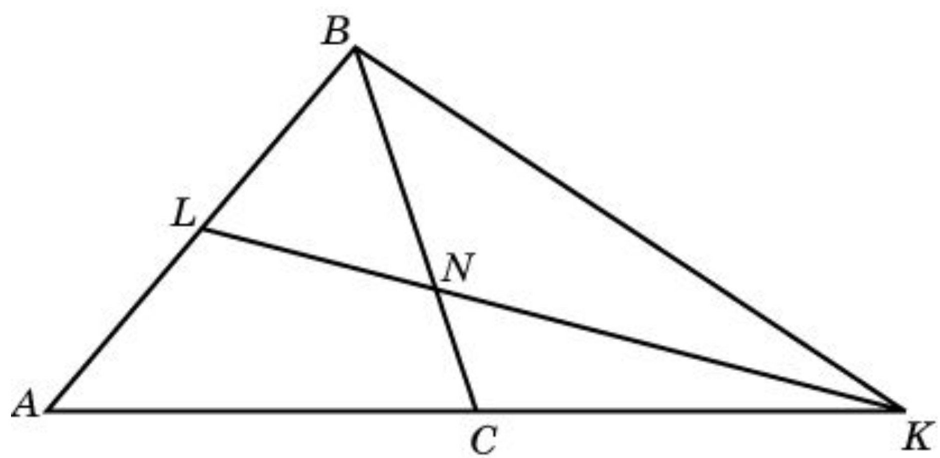
В треугольнике ABC проведены медианы AA_1 и CC_1, которые пересекаются в точке M. Найдите отношение $CM : MC_1$.



Решение. Проведем отрезок C_1D, параллельный отрезку AA_1. Он является средней линией треугольника AA_1B, следовательно, $A_1D = DB$. В треугольнике CC_1D $CA_1 : A_1D = 1:0,5$. Значит, $CM : MC_1 = 2:1$.

Упражнение 14

На продолжении стороны AC треугольника ABC взята точка K, $AC = CK$. Через нее и середину L стороны AB проведена прямая, пересекающая сторону BC в точке N. Найдите отношение $BN:NC$.

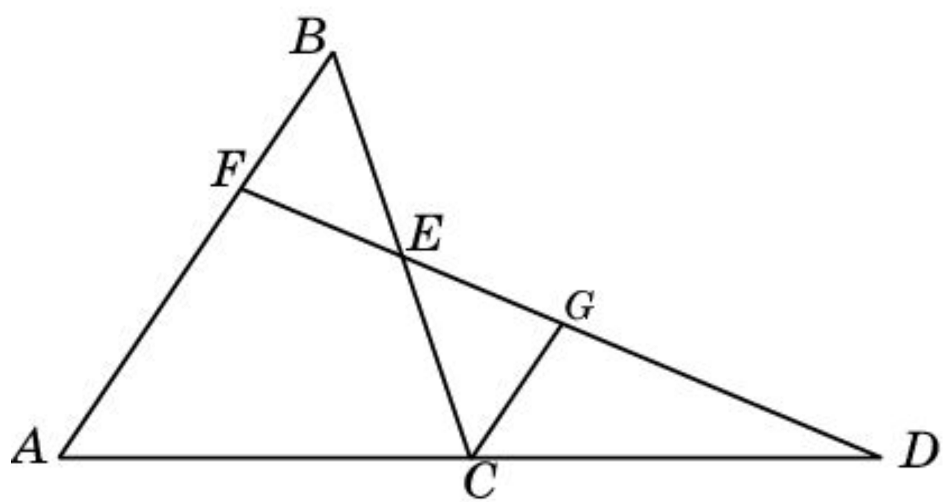


Решение. Проведем отрезок BK.

В треугольнике ABK отрезки BC и KL являются медианами. В силу предыдущей задачи, $BN:NC = 2:1$.

Упражнение 15

На продолжении стороны AC треугольника ABC взята точка D, $AC = CD$. Через нее и середину E стороны BC проведена прямая, пересекающая сторону AB в точке F. Найдите отношение $AF:FB$.

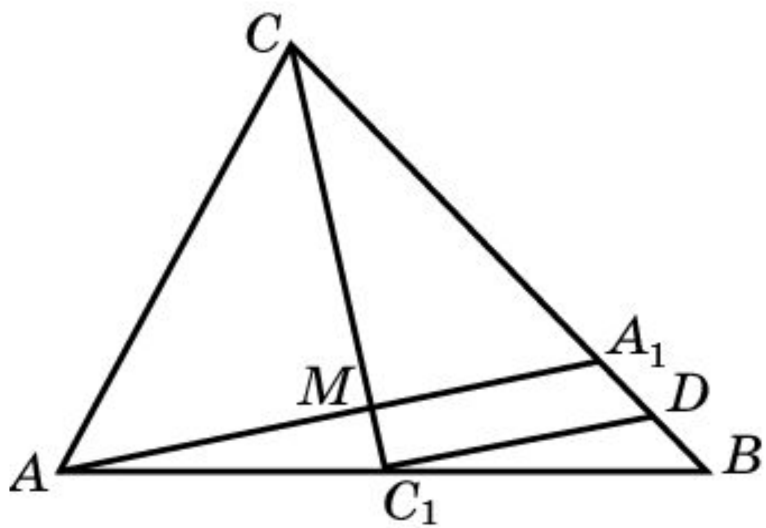


Решение. Проведем среднюю линию CG треугольника ADF.

Треугольнике BEF и CEG равны по 2-му признаку. Следовательно, $AF = 2CG = 2FB$, значит, $AF:FB = 2:1$.

Упражнение 16

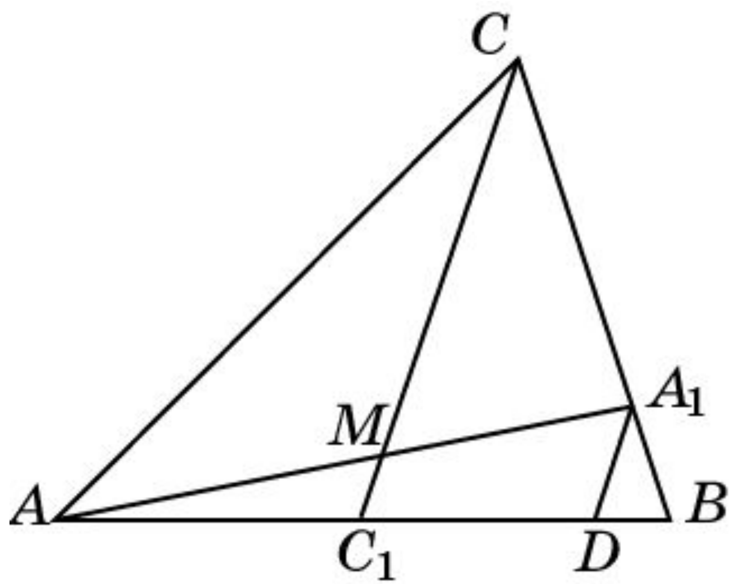
В треугольнике ABC проведена медиана CC_1 и отрезок AA_1, пересекающий CC_1 в точке M, для которого $CA_1{:}A_1B = 3{:}1$. Найдите отношение $CM : MC_1$.



Решение. Проведем отрезок C_1D, параллельный отрезку AA_1. Он является средней линией треугольника AA_1B, следовательно, $A_1D = DB$. В треугольнике CC_1D $CA_1 : A_1D = 3{:}0{,}5$. Значит, $CM : MC_1 = 6{:}1$.

Упражнение 17

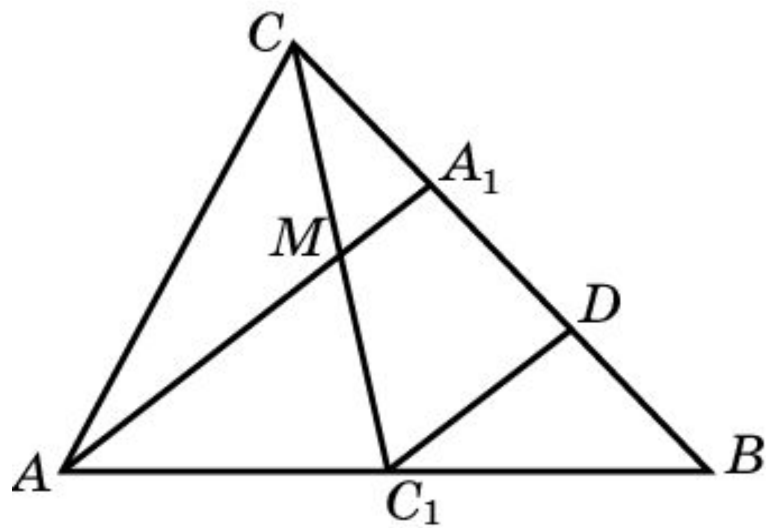
В треугольнике ABC проведена медиана CC_1 и отрезок AA_1, пересекающий CC_1 в точке M, для которого $CA_1{:}A_1B = 3{:}1$. Найдите отношение $AM : MA_1$.



Решение. Проведем отрезок A_1D, параллельный отрезку CC_1. Имеем, $C_1D{:}\ DB = 3{:}1$. Следовательно, $AC_1 : C_1D = 4{:}3$. Значит, $AM : MA_1 = 4{:}3$.

Упражнение 18

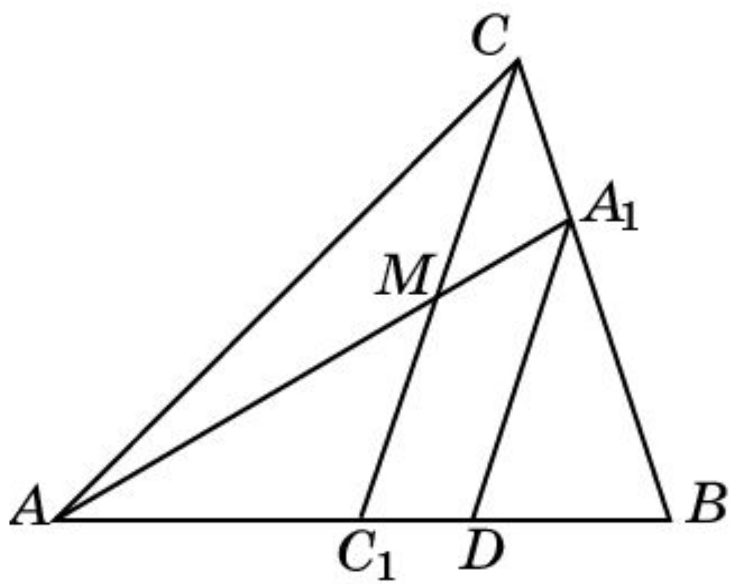
В треугольнике ABC проведена медиана CC_1 и отрезок AA_1, пересекающий CC_1 в точке M, для которого $CA_1:A_1B = 1:2$. Найдите отношение $CM : MC_1$.



Решение. Проведем отрезок C_1D, параллельный отрезку AA_1. Он является средней линией треугольника AA_1B, следовательно, $A_1D = DB$. В треугольнике CC_1D $CA_1: A_1D = 1:1$. Значит, $CM : MC_1 = 1:1$.

Упражнение 19

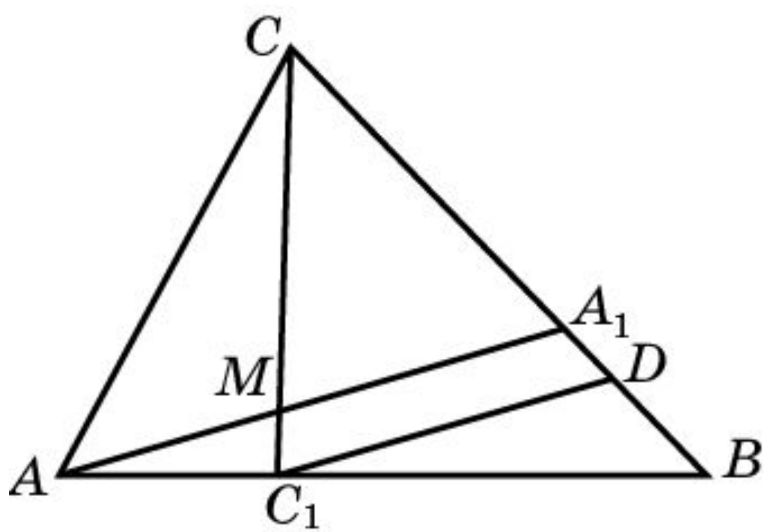
В треугольнике ABC проведена медиана CC_1 и отрезок AA_1, пересекающий CC_1 в точке M, для которого $CA_1{:}A_1B = 1{:}2$. Найдите отношение $AM : MA_1$.



Решение. Проведем отрезок A_1D, параллельный отрезку CC_1. Имеем, $C_1D : DB = 1{:}2$. Следовательно, $AC_1 : C_1D = 3{:}1$. Значит, $AM : MA_1 = 3{:}1$.

Упражнение 20

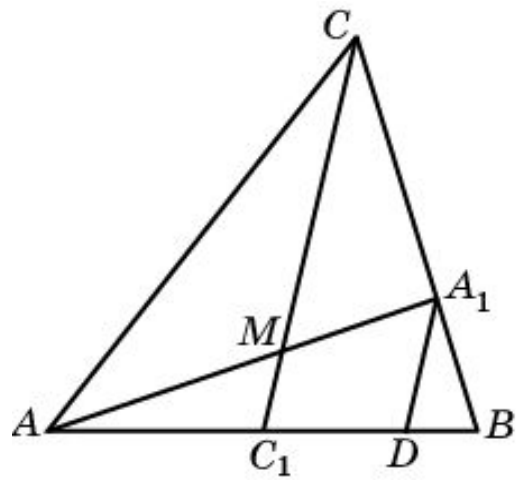
В треугольнике ABC проведена отрезки AA_1 и отрезок CC_1, пересекающиеся в точке M, для которых $AC_1{:}C_1B = 1{:}2$, $CA_1{:}A_1B = 2{:}1$. Найдите отношение $CM : MC_1$.



Решение. Проведем отрезок C_1D, параллельный отрезку AA_1. Тогда $A_1D{:}DB = AC_1{:}C_1B = 1{:}2$. В треугольнике CC_1D $CA_1 : A_1D = 2 : 1/3$. Значит, $CM : MC_1 = 6{:}1$.

Упражнение 21

В треугольнике ABC проведена медиана CC_1 и отрезок AA_1, пересекающий CC_1 в точке M, для которого $CA_1:A_1B = 2:1$. Найдите отношение $AM : MA_1$.

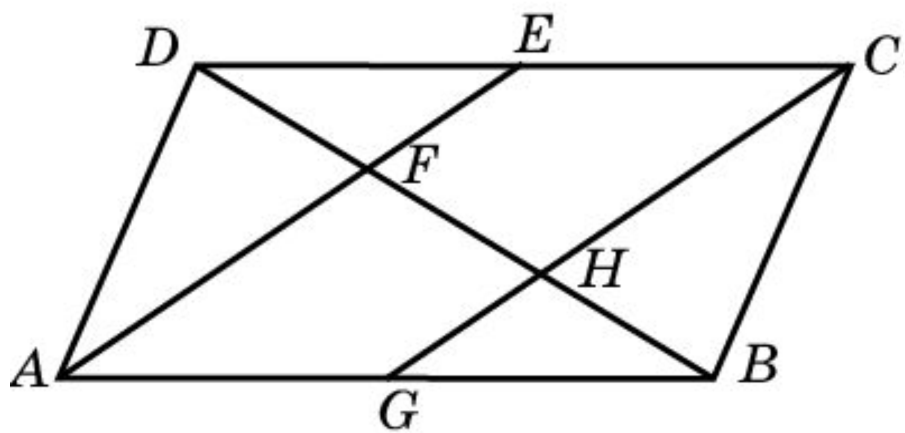


b

Решение. Проведем отрезок A_1D, параллельный отрезку CC_1. Тогда $C_1D:DB = 2:1$, $AC_1 = C_1B$. Следовательно, $AC_1 : C_1D = 3:2$. Значит, $AM:MA_1 = 3:2$.

Упражнение 22

В параллелограмме $ABCD$ точка E – середина стороны CD. Отрезок AE пересекает диагональ BD в точке F. Найдите отношение $DF : FB$.

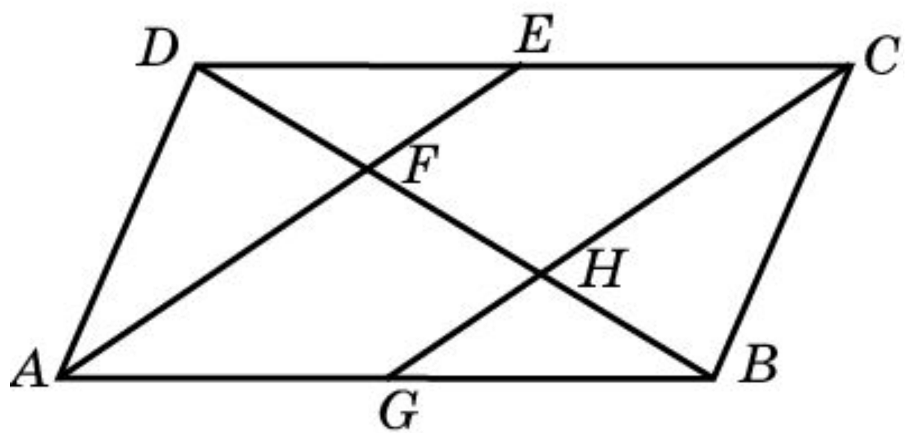


Решение. Проведем отрезок CG, параллельный отрезку AE. Обозначим H его точку пересечения с диагональю BD.

В треугольнике CDH EF – средняя линия. Следовательно, $DF = FH$. В треугольнике ABF GH – средняя линия. Следовательно, $BH = HG$. Значит, $DF : FB = 1 : 2$.

Упражнение 23

В параллелограмме $ABCD$ точка E – середина стороны CD. Отрезок AE пересекает диагональ BD в точке F. Найдите отношение $AF : FE$.

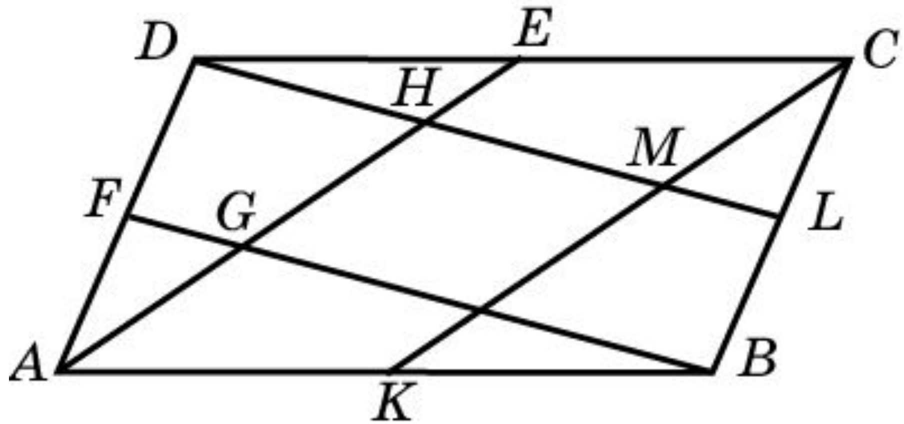


Решение. Проведем отрезок CG, параллельный отрезку AE. Обозначим H его точку пересечения с диагональю BD.

В треугольнике CDH EF – средняя линия. Следовательно, $AF = CH = 2FE$. Значит, $AF : FE = 2 : 1$.

Упражнение 24

В параллелограмме $ABCD$ точки E и F – середины сторон соответственно CD и AD. Отрезки AE и BF пересекаются в точке G. Найдите отношение $AG : GE$.



Решение. Проведем отрезки CK и DL, Соединяющие вершины параллелограмма с серединами сторон соответственно AB и BC. Обозначим M их точку пересечения, H – точку пересечения отрезков AE и DL.

В треугольнике ADH FG – средняя линия. Следовательно, $AG = GH$. В треугольнике CDM EH – средняя линия. Следовательно, $EH = CM/2 = AG/2$. Значит, $AG : GE = 2 : 3$.