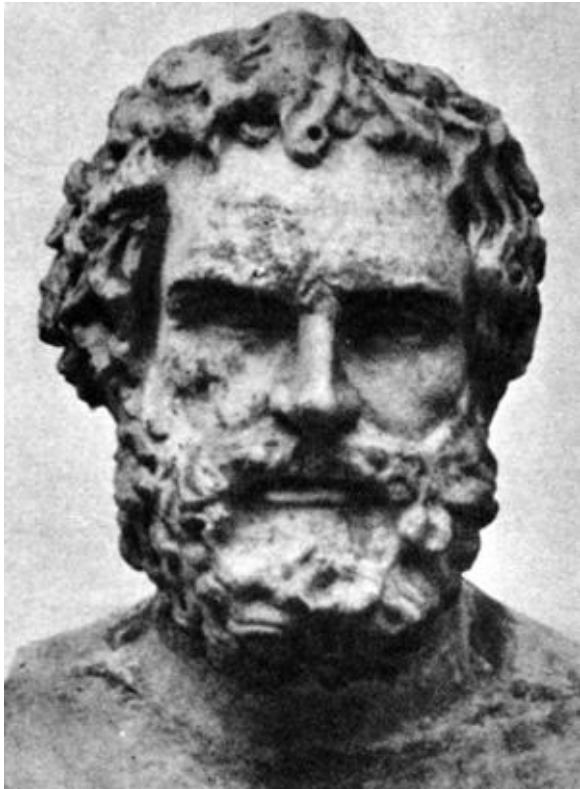


# Фалес Милетский VI век до н. э.



Фалес первым сформулировал и доказал несколько геометрических теорем, среди которых:

- 1) вертикальные углы равны;
- 2) имеет место равенство треугольников по одной стороне и двум прилежающим к ней углам;
- 3) углы при основании равнобедренного треугольника равны;

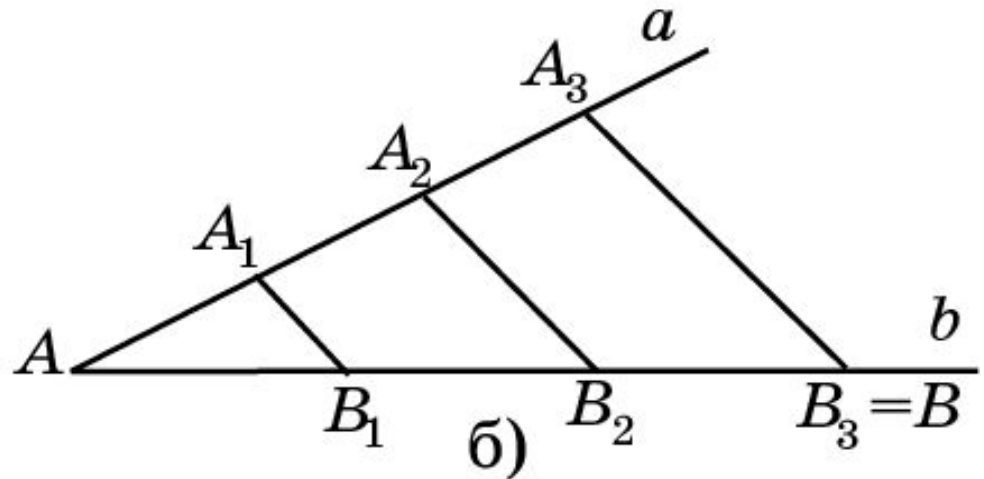
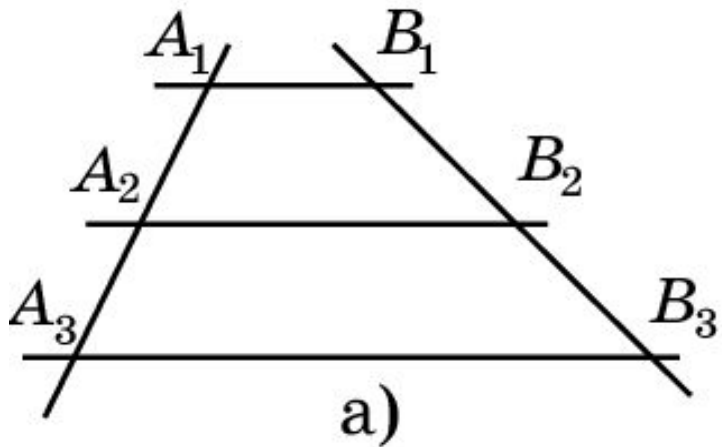
Фалес научился определять расстояние от берега до корабля. В основе этого способа лежит теорема, названная впоследствии теоремой Фалеса:

Если параллельные прямые, пересекающие стороны угла, отсекают равные отрезки на одной его стороне, то они отсекают равные отрезки и на другой его стороне.

Легенда рассказывает о том, что Фалес, будучи в Египте, поразил фараона Амасиса тем, что сумел точно установить высоту пирамиды, дождавшись момента, когда длина тени палки становится равной её высоте, и тогда измерил длину тени пирамиды.

# Теорема Фалеса

**Теорема.** Если параллельные прямые, пересекающие стороны угла, отсекают на одной его стороне равные отрезки, то они отсекают равные отрезки и на другой его стороне (рис. а).



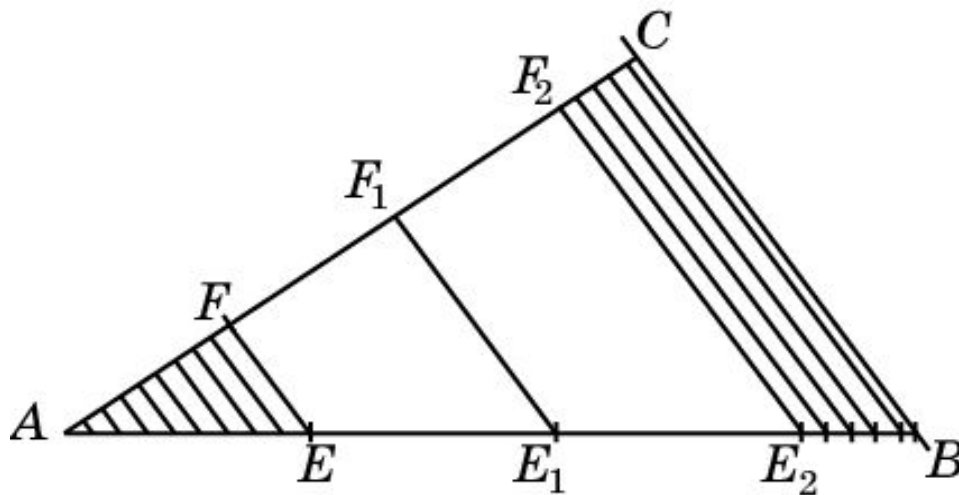
Теорему Фалеса можно применять для деления отрезка на  $n$  равных частей (рис. б).

# Теорема о пропорциональных отрезках

Отношением  $\frac{AB}{CD}$  двух отрезков  $AB$  и  $CD$  называется число, показывающее сколько раз отрезок  $CD$  и его части укладываются в отрезке  $AB$ .

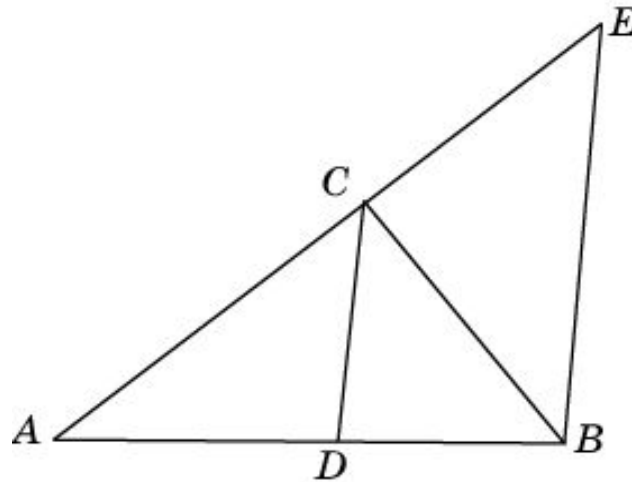
Говорят, что отрезки  $AB$ ,  $CD$  пропорциональны отрезкам  $A_1B_1$ ,  $C_1D_1$ , если равны их отношения

**Теорема.** (О пропорциональных отрезках.) Параллельные прямые, пересекающие стороны угла, отсекают от сторон угла пропорциональные отрезки.



## Свойство биссектрисы треугольника

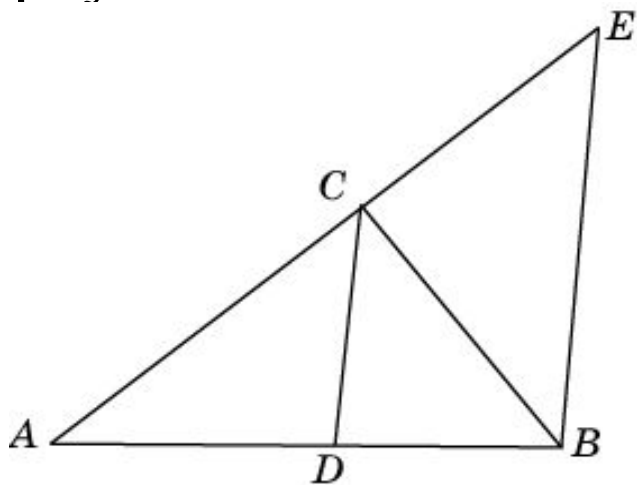
Биссектриса угла треугольника делит противоположную сторону на части, пропорциональные прилежащим сторонам, т.е. если  $CD$  – биссектриса треугольника  $ABC$ , то  $AD : DB = AC : BC$ .



**Доказательство:** Проведем прямую  $BE$ , параллельную  $CD$ . В треугольнике  $BEC$  угол  $B$  равен углу  $E$ . Следовательно,  $BC = EC$ . По теореме о пропорциональных отрезках,  $AD : DB = AC : CE = AC : BC$ .

# Обратное свойство

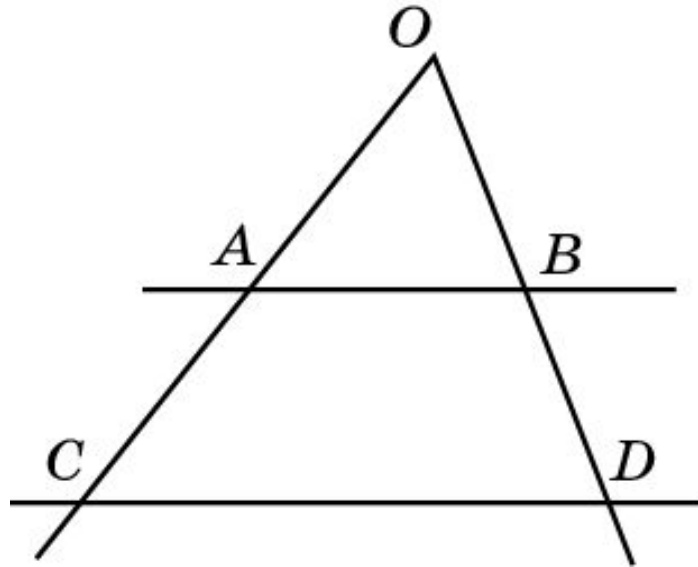
Если луч, проведенный из вершины угла треугольника, делит противоположную сторону на части, пропорциональные сторонам треугольника, прилежащим к лучу, то этот луч является биссектрисой угла треугольника.



**Доказательство:** Пусть для луча  $CD$  выполняется равенство  $AD : DB = AC : BC$ . Проведем прямую  $BE$ , параллельную  $CD$ . По теореме о пропорциональных отрезках,  $AD : DB = AC : CE$ . Сравнивая эти два равенства, получаем равенство  $BC = CE$ , из которого следует равенство углов  $CBE$  и  $BEC$ . Но угол  $CBE$  равен углу  $BCE$ , а угол  $BEC$  равен углу  $ACE$ . Значит,  $CD$  – биссектриса треугольника  $ABC$ .

## Упражнение 1

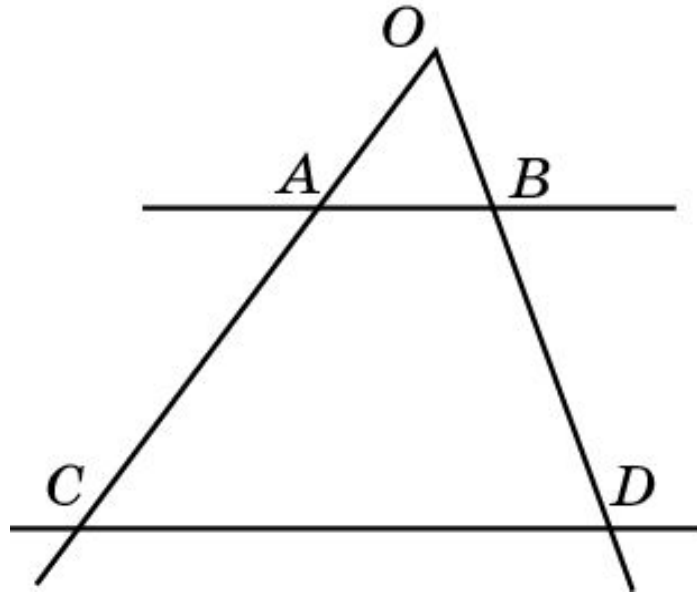
Стороны угла с вершиной  $O$  пересечены двумя параллельными прямыми в точках  $A, C$  и  $B, D$  соответственно. Найдите  $OC$ , если  $OB = BD = 5$  и  $OA = 6$ .



Ответ: 12.

## Упражнение 2

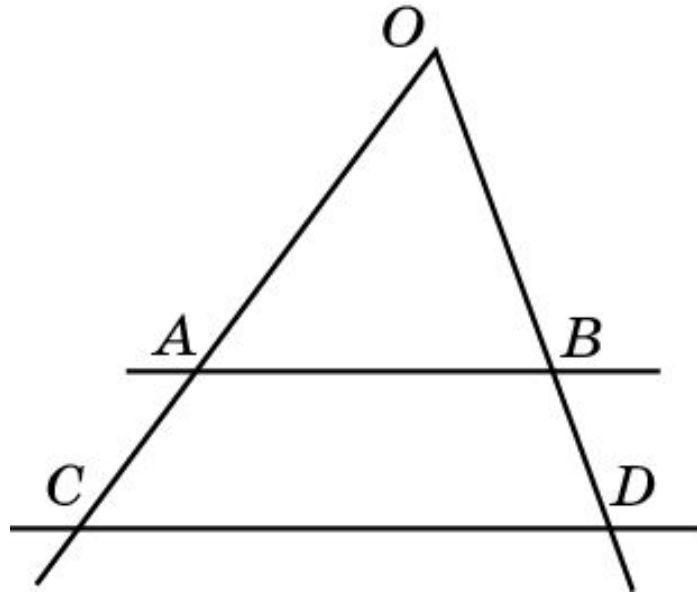
Стороны угла с вершиной  $O$  пересечены двумя параллельными прямыми в точках  $A, C$  и  $B, D$  соответственно. Найдите  $OD$ , если  $OA = 6$ ,  $AC = 12$  и  $OB = 5$ .



Ответ: 15.

### Упражнение 3

Стороны угла с вершиной  $O$  пересечены двумя параллельными прямыми в точках  $A, C$  и  $B, D$  соответственно. Найдите  $OA$ , если  $OC = 24$  и  $OB : OD = 2 : 3$ .

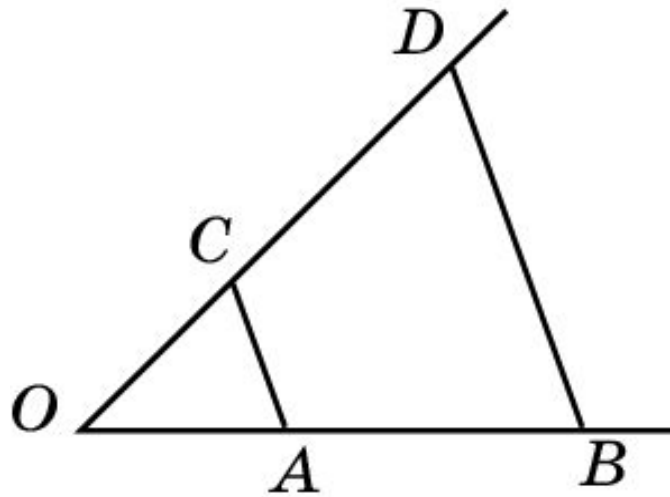


Ответ: 16.



## Упражнение 4

Стороны угла с вершиной  $O$  пересечены двумя параллельными прямыми в точках  $A, B$  и  $C, D$  соответственно. Найдите  $OA$ , если  $OB = 15$  см и  $OC : OD = 2 : 5$ .



**Ответ:** 6 см.

## Упражнение 5

Определите, пропорциональны ли пары отрезков  $a$ ,  $b$  и  $c$ ,  $d$ , если:

а)  $a = 0,8$  см,  $b = 0,3$  см,  $c = 2,4$  см,  $d = 0,9$  см;

б)  $a = 50$  мм,  $b = 6$  см,  $c = 10$  см,  $d = 18,5$  см.

**Ответ:** а) Да; б) нет.

## Упражнение 6

Среди отрезков  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$ ,  $e$  выберите пары пропорциональных отрезков, если  $a = 2$  см,  $b = 17,5$  см,  $c = 16$  см,  $d = 35$  см,  $e = 4$  см.

Ответ:  $a$ ,  $e$  и  $b$ ,  $d$ .

## Упражнение 7

Даны три отрезка:  $a$ ,  $b$ , и  $c$ . Какова должна быть длина четвертого отрезка  $d$ , чтобы из них можно было образовать две пары пропорциональных отрезков, если  $a = 6$  см,  $b = 3$  см,  $c = 4$  см, и отрезок  $d$  больше каждого из этих отрезков.

Ответ: 8 см.

## Упражнение 8

На одной из сторон угла расположены два отрезка 3 см и 4 см. Через их концы проведены параллельные прямые, образующие на другой стороне также два отрезка. Большой из отрезков равен 6 см. Чему равен другой отрезок?

**Ответ:** 4,5 см.

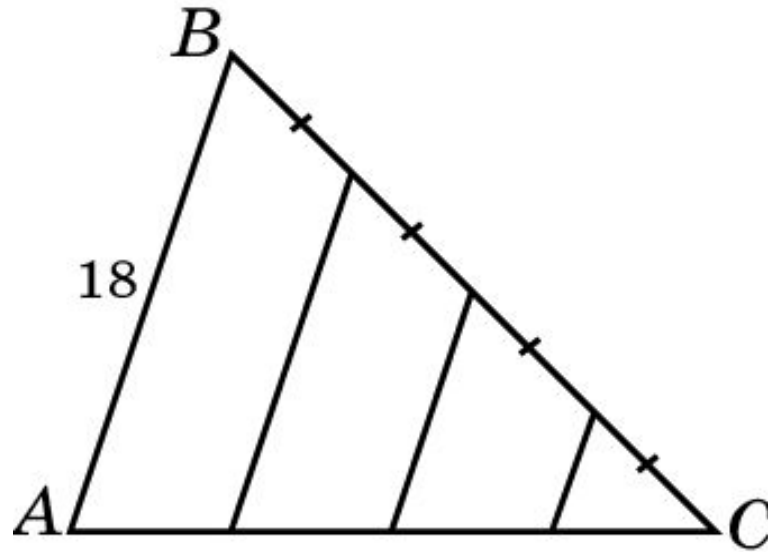
## Упражнение 9

Стороны угла с вершиной  $O$  пересечены двумя параллельными прямыми в точках  $A_1, A_2$  и  $B_1, B_2$  соответственно. Найдите: а)  $B_1B_2$ , если  $OA_1 = 8$  см,  $A_1A_2 = 4$  см,  $OB_2 = 6$  см; б)  $OB_1$  и  $OB_2$ , если  $OA_1 : OA_2 = 3 : 5$  и  $OB_2 - OB_1 = 8$  см; в)  $OA_1$  и  $OA_2$ , если  $OB_1 : B_1B_2 = 2 : 3$  и  $OA_1 + OA_2 = 14$  см.

**Ответ:** а) 2 см; б) 12 см и 20 см; в) 4 см и 10 см.

## Упражнение 10

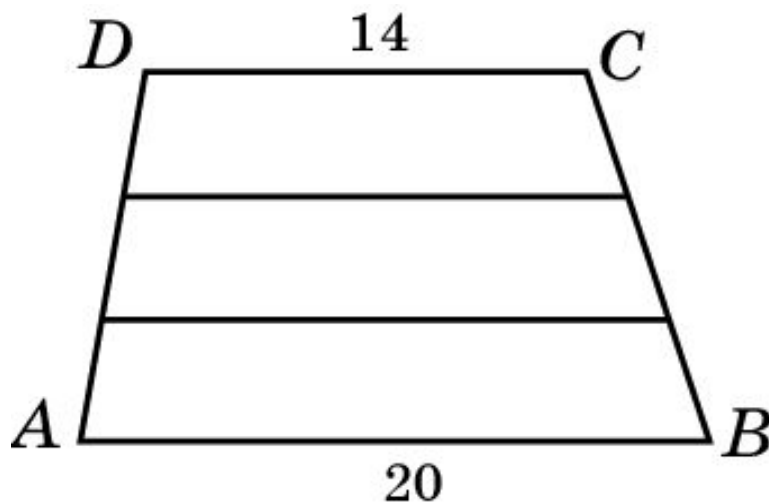
В треугольнике  $ABC$  сторона  $BC$  разделена на четыре равные части и через полученные точки деления проведены прямые, параллельные стороне  $AB$ , равной 18 см. Найдите отрезки этих прямых, заключенные внутри треугольника.



**Ответ:** 4,5 см, 9 см, 13,5 см.

## Упражнение 11

Основания трапеции равны 14 см и 20 см. Одна из боковых сторон разделена на три равные части и через точки деления проведены прямые, параллельные основаниям трапеции. Найдите отрезки этих прямых, заключенные внутри трапеции.

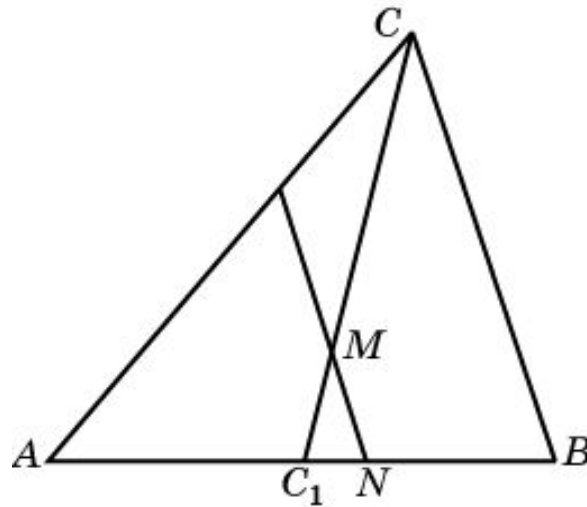


**Ответ:** 16 см и 18 см.



## Упражнение 12

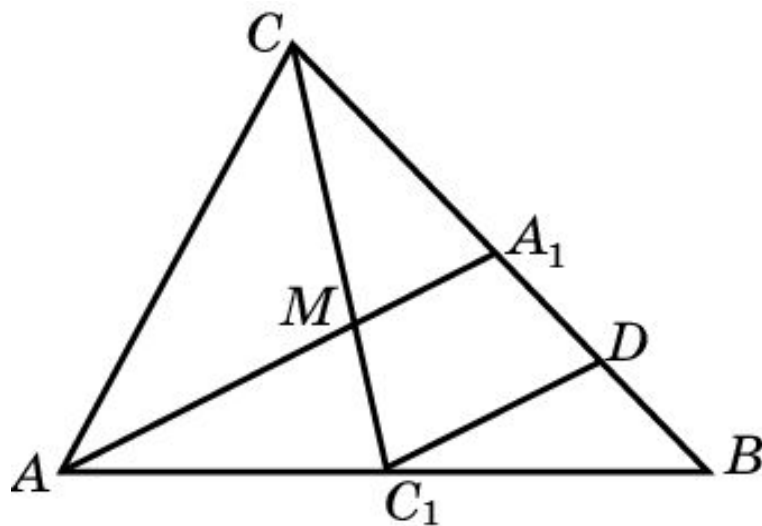
На медиане  $CC_1$  треугольника  $ABC$  взята точка  $M$ ,  $CM:MC_1 = 3:1$ . Через нее проведена прямая, параллельная стороне  $BC$ , пересекающая сторону  $AB$  в точке  $N$ . Найдите отношение  $AN:NB$ .



**Решение.**  $C_1N:NB = 1:3$ ,  $AC_1 = C_1B$ , следовательно,  $AN:NB = 5:3$ .

## Упражнение 13

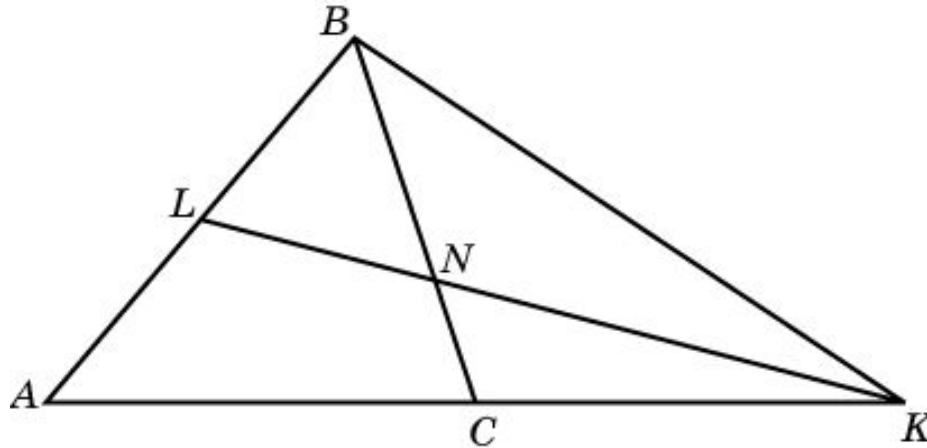
В треугольнике  $ABC$  проведены медианы  $AA_1$  и  $CC_1$ , которые пересекаются в точке  $M$ . Найдите отношение  $CM : MC_1$ .



**Решение.** Проведем отрезок  $C_1D$ , параллельный отрезку  $AA_1$ . Он является средней линией треугольника  $AA_1B$ , следовательно,  $A_1D = DB$ . В треугольнике  $CC_1D$   $CA_1 : A_1D = 1 : 0,5$ . Значит,  $CM : MC_1 = 2 : 1$ .

## Упражнение 14

На продолжении стороны  $AC$  треугольника  $ABC$  взята точка  $K$ ,  $AC = CK$ . Через нее и середину  $L$  стороны  $AB$  проведена прямая, пересекающая сторону  $BC$  в точке  $N$ . Найдите отношение  $BN:NC$ .

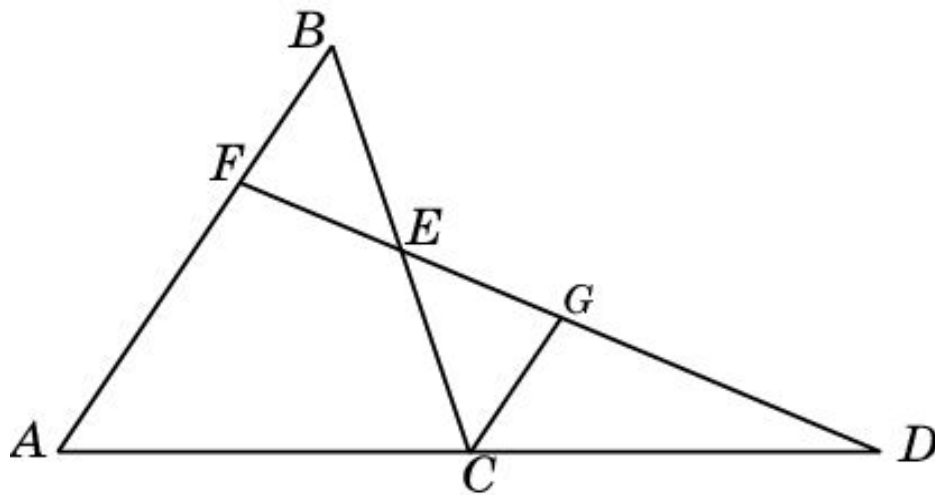


**Решение.** Проведем отрезок  $BK$ .

В треугольнике  $ABK$  отрезки  $BC$  и  $KL$  являются медианами. В силу предыдущей задачи,  $BN:NC = 2:1$ .

## Упражнение 15

На продолжении стороны  $AC$  треугольника  $ABC$  взята точка  $D$ ,  $AC = CD$ . Через нее и середину  $E$  стороны  $BC$  проведена прямая, пересекающая сторону  $AB$  в точке  $F$ . Найдите отношение  $AF:FB$ .

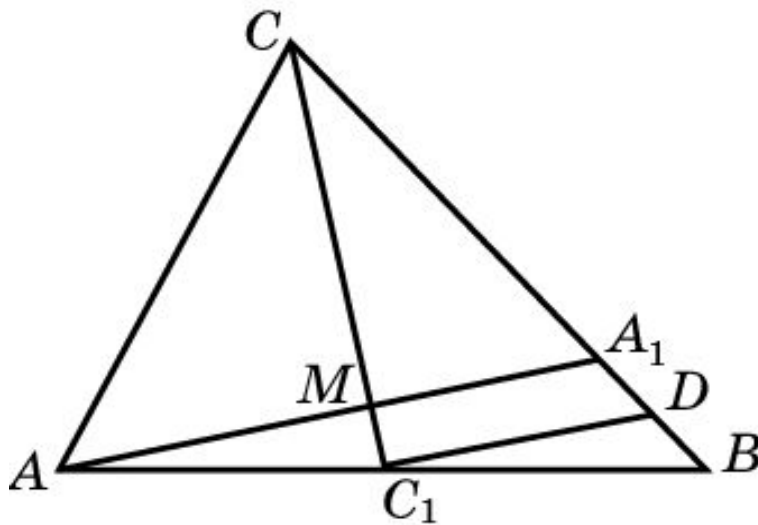


**Решение.** Проведем среднюю линию  $CG$  треугольника  $ADF$ .

Треугольники  $BEF$  и  $CEG$  равны по 2-му признаку. Следовательно,  $AF = 2CG = 2FB$ , значит,  $AF:FB = 2:1$ .

## Упражнение 16

В треугольнике  $ABC$  проведена медиана  $CC_1$  и отрезок  $AA_1$ , пересекающийся  $CC_1$  в точке  $M$ , для которого  $CA_1:A_1B = 3:1$ . Найдите отношение  $CM:MC_1$ .

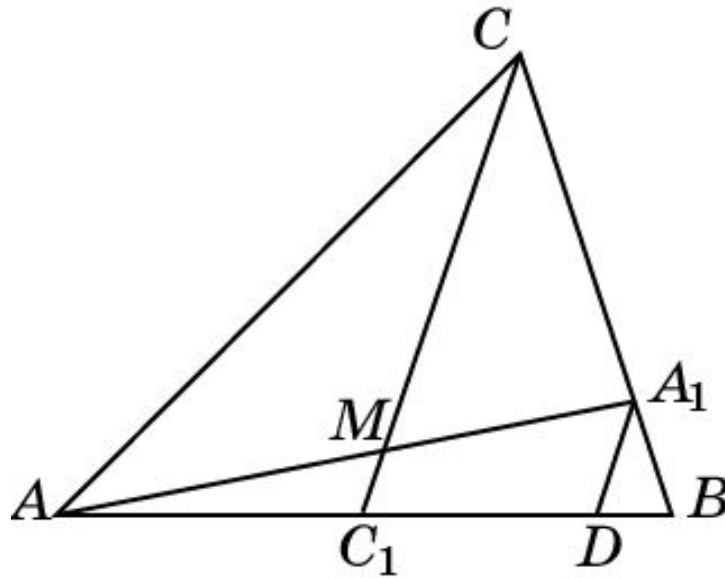


**Решение.** Проведем отрезок  $C_1D$ , параллельный отрезку  $AA_1$ .

Он является средней линией треугольника  $AA_1B$ , следовательно,  $A_1D = DB$ . В треугольнике  $CC_1D$   $CA_1:A_1D = 3:0,5$ . Значит,  $CM:MC_1 = 6:1$ .

## Упражнение 17

В треугольнике  $ABC$  проведена медиана  $CC_1$  и отрезок  $AA_1$ , пересекающийся  $CC_1$  в точке  $M$ , для которого  $CA_1:A_1B = 3:1$ . Найдите отношение  $AM:MA_1$ .

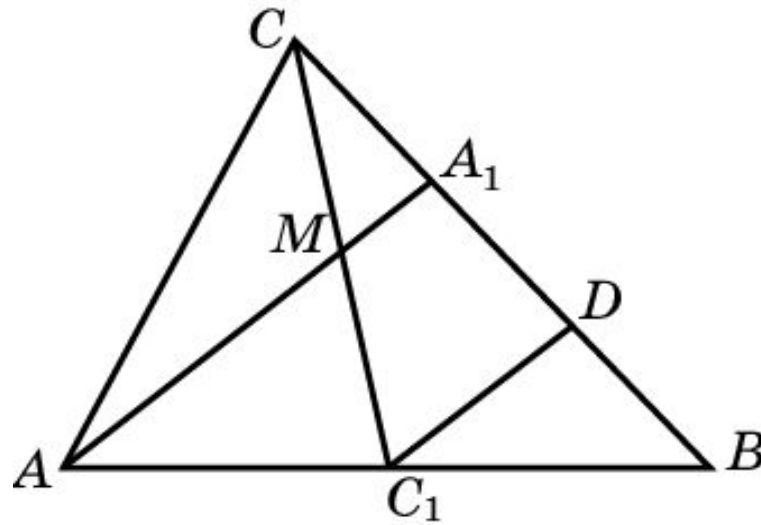


**Решение.** Проведем отрезок  $A_1D$ , параллельный отрезку  $CC_1$ .

Имеем,  $C_1D:DB = 3:1$ . Следовательно,  $AC_1:C_1D = 4:3$ . Значит,  $AM:MA_1 = 4:3$ .

## Упражнение 18

В треугольнике  $ABC$  проведена медиана  $CC_1$  и отрезок  $AA_1$ , пересекающийся  $CC_1$  в точке  $M$ , для которого  $CA_1:A_1B = 1:2$ . Найдите отношение  $CM:MC_1$ .

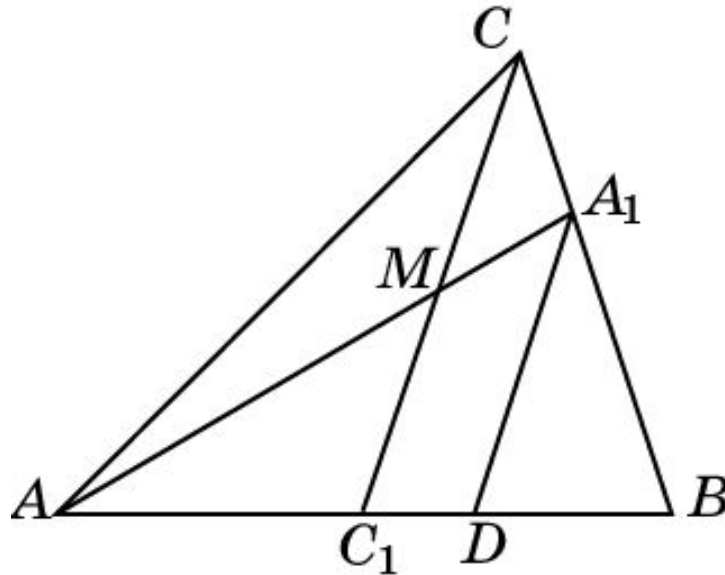


**Решение.** Проведем отрезок  $C_1D$ , параллельный отрезку  $AA_1$ .

Он является средней линией треугольника  $AA_1B$ , следовательно,  $A_1D = DB$ . В треугольнике  $CC_1D$   $CA_1:A_1D = 1:1$ . Значит,  $CM:MC_1 = 1:1$ .

## Упражнение 19

В треугольнике  $ABC$  проведена медиана  $CC_1$  и отрезок  $AA_1$ , пересекающийся  $CC_1$  в точке  $M$ , для которого  $CA_1:A_1B = 1:2$ . Найдите отношение  $AM:MA_1$ .



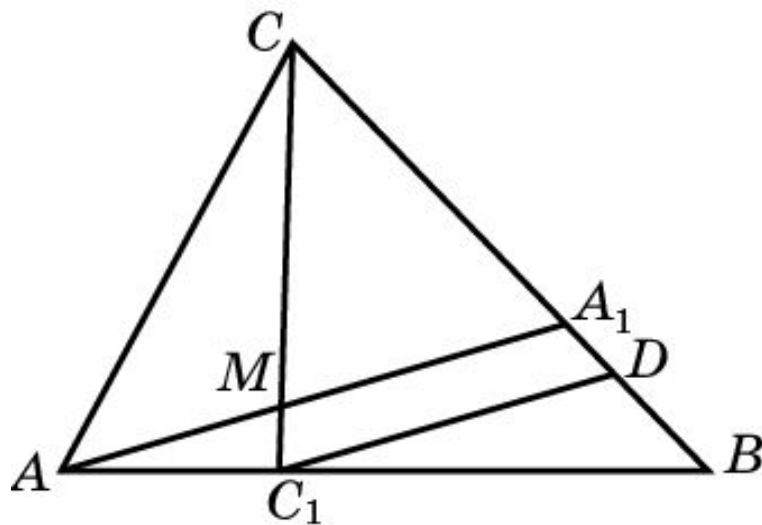
**Решение.** Проведем отрезок  $A_1D$ , параллельный отрезку  $CC_1$ .

Имеем,  $C_1D:DB = 1:2$ . Следовательно,  $AC_1:C_1D = 3:1$ . Значит,  $AM:MA_1 = 3:1$ .



## Упражнение 20

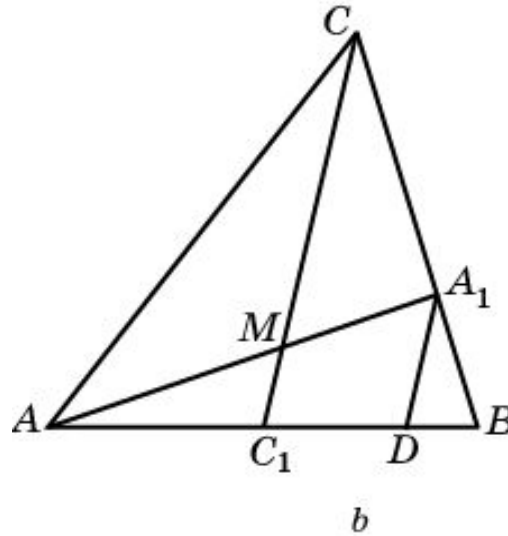
В треугольнике  $ABC$  проведены отрезки  $AA_1$  и отрезок  $CC_1$ , пересекающиеся в точке  $M$ , для которых  $AC_1:C_1B = 1:2$ ,  $CA_1:A_1B = 2:1$ . Найдите отношение  $CM:MC_1$ .



**Решение.** Проведем отрезок  $C_1D$ , параллельный отрезку  $AA_1$ . Тогда  $A_1D:DB = AC_1:C_1B = 1:2$ . В треугольнике  $CC_1D$   $CA_1:A_1D = 2 : 1/3$ . Значит,  $CM:MC_1 = 6:1$ .

## Упражнение 21

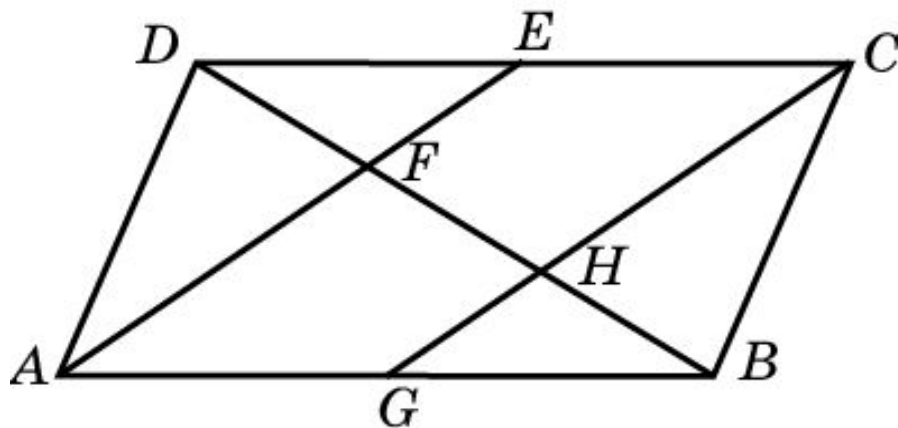
В треугольнике  $ABC$  проведена медиана  $CC_1$  и отрезок  $AA_1$ , пересекающийся  $CC_1$  в точке  $M$ , для которого  $CA_1:A_1B = 2:1$ . Найдите отношение  $AM:MA_1$ .



**Решение.** Проведем отрезок  $A_1D$ , параллельный отрезку  $CC_1$ . Тогда  $C_1D:DB = 2:1$ ,  $AC_1 = C_1B$ . Следовательно,  $AC_1 : C_1D = 3:2$ . Значит,  $AM:MA_1 = 3:2$ .

## Упражнение 22

В параллелограмме  $ABCD$  точка  $E$  – середина стороны  $CD$ . Отрезок  $AE$  пересекает диагональ  $BD$  в точке  $F$ . Найдите отношение  $DF : FB$ .

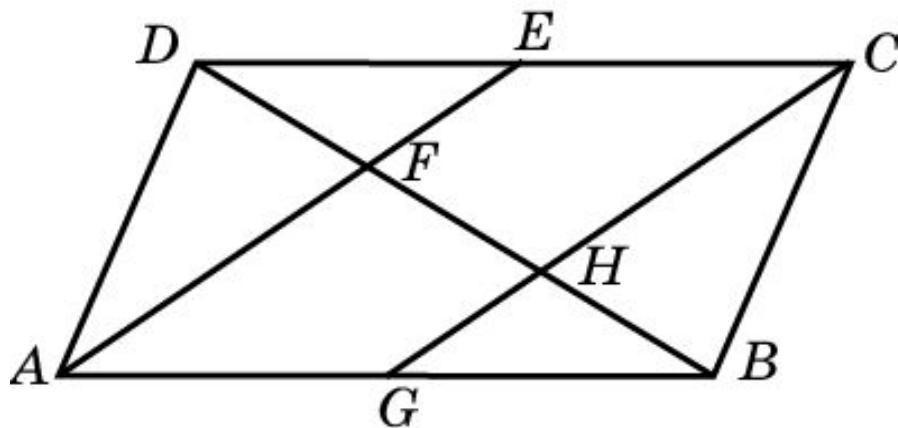


**Решение.** Проведем отрезок  $CG$ , параллельный отрезку  $AE$ . Обозначим  $H$  его точку пересечения с диагональю  $BD$ .

В треугольнике  $CDH$   $EF$  – средняя линия. Следовательно,  $DF = FH$ .  
В треугольнике  $ABF$   $GH$  – средняя линия. Следовательно,  $BH = HG$ .  
Значит,  $DF : FB = 1 : 2$ .

## Упражнение 23

В параллелограмме  $ABCD$  точка  $E$  – середина стороны  $CD$ . Отрезок  $AE$  пересекает диагональ  $BD$  в точке  $F$ . Найдите отношение  $AF : FE$ .

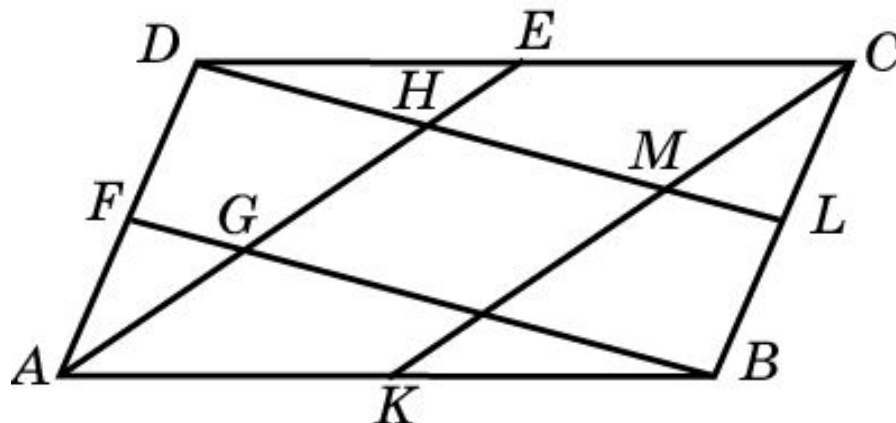


**Решение.** Проведем отрезок  $CG$ , параллельный отрезку  $AE$ . Обозначим  $H$  его точку пересечения с диагональю  $BD$ .

В треугольнике  $CDH$   $EF$  – средняя линия. Следовательно,  $AF = CH = 2FE$ . Значит,  $AF : FE = 2 : 1$ .

## Упражнение 24

В параллелограмме  $ABCD$  точки  $E$  и  $F$  – середины сторон соответственно  $CD$  и  $AD$ . Отрезки  $AE$  и  $BF$  пересекаются в точке  $G$ . Найдите отношение  $AG : GE$ .



**Решение.** Проведем отрезки  $CK$  и  $DL$ , соединяющие вершины параллелограмма с серединами сторон соответственно  $AB$  и  $BC$ . Обозначим  $M$  их точку пересечения,  $H$  – точку пересечения отрезков  $AE$  и  $DL$ .

В треугольнике  $ADH$   $FG$  – средняя линия. Следовательно,  $AG = GH$ .  
В треугольнике  $CDM$   $EH$  – средняя линия. Следовательно,  $EH = CM/2 = AG/2$ . Значит,  $AG : GE = 2 : 3$ .