Финансовая актуарная математика

Белоножкин Юрий Николаевич

Сочинский государственный университет

http://dsgu.ru/

Copyright ©2013 Кафедра «Финансы и кредит» Сочинского государственного университета

Тема 3. СЛОЖНЫЕ ПРОЦЕНТЫ

Вопрос 3.1. Начисление сложных годовых процентов

Смысл формулы наращения:

- В средне- и долгосрочных финансово-кредитных операциях
- Проценты не выплачиваются сразу после их начисления, а присоединяются к сумме долга
- Применяют сложные проценты *(compound interest)*
- База для начисления сложных процентов не остается постоянной –она увеличивается с каждым шагом во времени
- Процесс увеличения суммы долга происходит с ускорением
- Последовательное реинвестирование средств, вложенных под простые проценты на один период начисления *(running period)*

Расчет наращенной суммы:

- проценты начисляются и капитализируются один раз в году (годовые проценты)
- ***P*** *– первоначальный размер долга (ссуды, кредита, капитала* и т.д.),
- ***S*** *– наращенная сумма на конец срока ссуды,*
- ***n*** *— срок, число лет наращения,*
- ***i*** *–* уровень годовой ставки процентов, представленный десятичной дробью.

Расчет наращенной суммы:

- В конце первого года проценты равны величине ***Pi,*** наращенная сумма составит $P + Pi = P(1 + i)$
- К концу второго года она достигнет величины $P(1 + i) + P(1 + i)i = P(1 + i)^2$
- В конце ***n***-го года наращенная сумма будет равна $S = P(1 + i)^n$ **(3.1)**
- Проценты за этот же срок $I = S - P = P[(1 + i)^n - 1]$ **(3.2)**
- Часть из них получена за счет начисления процентов на проценты

$$I_p = P[(1 + i)^n - (1 + ni)]. \quad (3.3)$$

Графическая иллюстрация наращения по сложным процентам

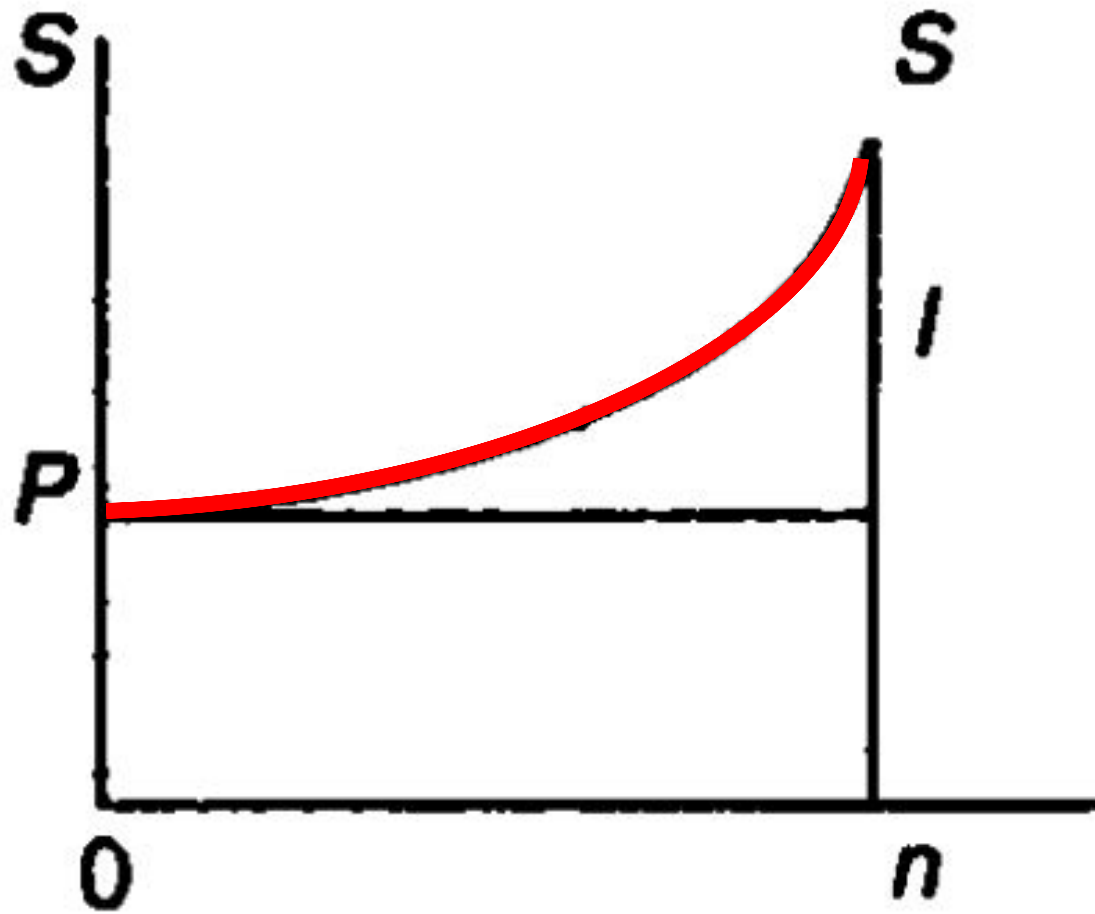


Рис. 3.1

Множитель наращения *(compound interest factor)* по сложным процентам $(1 + i)^n$

Таблица 2

Множители наращения (сложные проценты)

Число периодов *n*	Ставка процента (%)					
	2	5	7	9	10	11
1	1,020000	1,050000	1,070000	1,090000	1,100000	1,110000
2	1,040400	1,102500	1,144900	1,188100	1,210000	1,232100
3	1,061208	1,157625	1,225043	1,295029	1,331000	1,367631
4	1,082432	1,215506	1,310796	1,411582	1,464100	1,518070
5	1,104081	1,276282	1,402552	1,538624	1,610510	1,685058
6	1,126162	1,340096	1,500730	1,677100	1,771561	1,870415
7	1,148686	1,407100	1,605781	1,828039	1,948717	2,076160
8	1,171659	1,477455	1,718186	1,992563	2,143589	2,304538
9	1,195093	1,551328	1,838459	2,171893	2,357948	2,558037
10	1,218994	1,628895	1,967151	2,367364	2,593742	2,839421
11	1,243374	1,710339	2,104852	2,580426	2,853117	3,151757
12	1,268242	1,795856	2,252192	2,812665	3,138428	3,498451
13	1,293607	1,885649	2,409845	3,065805	3,452271	3,883280

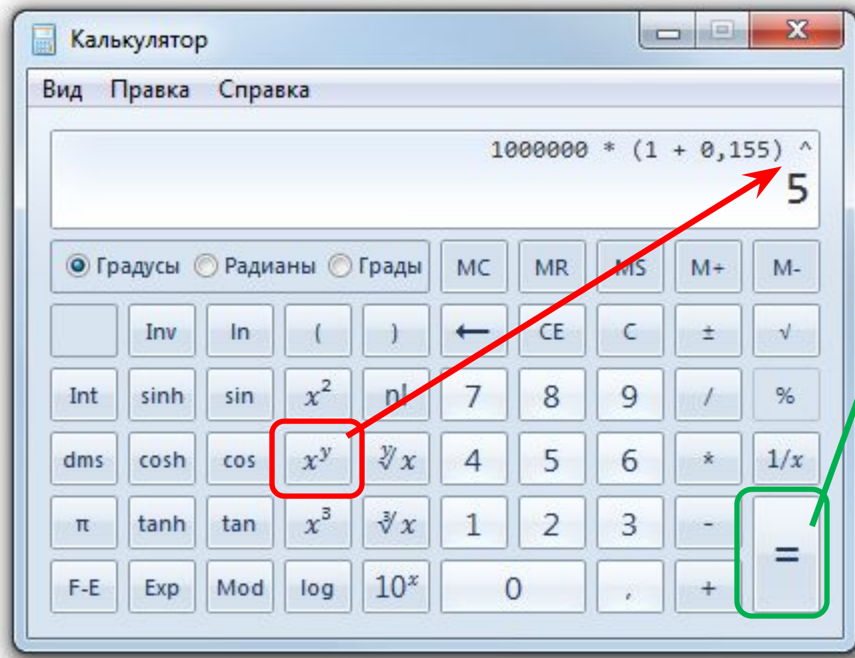
ПРИМЕР 3.1. Какой величины достигнет долг, равный 1 млн руб., через 5 лет при росте по сложной ставке 15,5% годовых?

По формуле (3.1) находим

В конце *n*-го года наращенная сумма будет равна

$$S = P(1 + i)^n \qquad (3.1)$$

$$S = 1\,000\,000(1 + 0{,}155)^5 = 2055464{,}22 \text{ руб.}$$



Величина множителя наращения зависит от двух параметров – i и n

- Остров Манхэттен был куплен (выменен) за **24 долл.**
- Стоимость земли этого острова 350 лет спустя оценивалась примерно в **40 млрд долл.**
- Первоначальная сумма увеличилась в **1,667 х 10^9** раз при сложной ставке, равной всего **6,3 % годовых**

См.: Томас Д. Воротилы финансового мира. М.: Прогресс, 1976.

Высокая (инфляционная) процентная ставка может быть применена только для короткого срока.

Приме р:

- при $\boldsymbol{i}$ = 120% и $\boldsymbol{n} = 10$
- множитель наращения равен $(1 + 1,2)^{10} = 2656$

Формула наращения по сложным процентам (3.1) при других периодах начисления

$$S = P(1 + i)^n$$

- i означает ставку за один период начисления (месяц, квартал и т.д.)
- n — число таких периодов

Вариант: проценты на основной долг начисляются по ставке *i*, а проценты на проценты — по ставке *r≠i:*

$$S = P + Pi\boxed{[1 + (1 + r) + (1 + r)^2 + \ldots + (1 + r)^{n-1}]}$$

Геометрическая прогрессия с первым членом, равным 1, и знаменателем ***(1 + r)***

$$S = P\left(1 + i\,\frac{(1 + r)^n - 1}{r}\right). \qquad (3.4)$$

Начисление процентов в смежных календарных периодах

- часто даты начала и окончания ссуды находятся в двух периодах
- срок ссуды делится на два периода n_1 и n_2

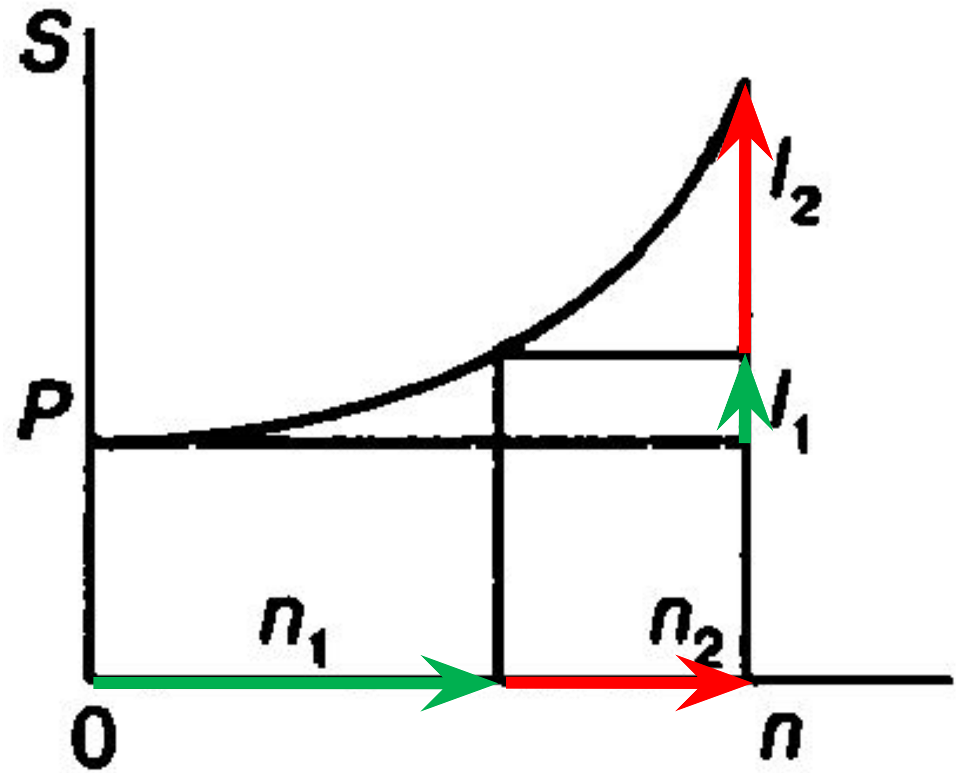


Рис. 3.2

Формулы начисления процентов в смежных календарных периодах

$$I = I_1 + I_2,$$

где $I_1 = P[(1 + i)n_1 - 1)]$; $I_2 = P(1 + i)n_1[(1 + i)n_2 - 1] =$

$$= P[(1 + i)^n - (1 + i)n_1].$$

ПРИМЕР 3 .2 . Ссуда была выдана на два года — с 1 мая 1998 г. по 1 мая 2000 г. Размер ссуды 10 млн руб. Необходимо распределить начисленные проценты (ставка 14% ACT/ACT) по календарным годам.

Получим следующие суммы процентов (в тыс. руб.):

за период с 1 мая до конца года (244 дня): $10\,000(1{,}14^{\frac{244}{365}} - 1) = 915{,}4$;

за 1999 г.: $10\,000 \times 1{,}14^{\frac{244}{365}} \times 0{,}14 = 1528{,}2$;

наконец, с 1 января до 1 мая 2000 г. (121 день): $10\,000 \times 1{,}14^{1\frac{244}{365}} \times (1{,}14^{\frac{121}{365}} - 1) = 552{,}4$. Итого за весь срок — 2996 тыс. руб. Такой же результат получим для всего срока в целом:

$$10\,000 \times (1{,}14^2 - 1) = 2996.$$

Переменные ставки - *плавающие ставки (floating rate).*

- На основе формулы 3.1 $S = P(1 + i)^n$
- Общий множитель наращения определяется как

$$S = P(1 + i_1)^{n_1}(1 + i_2)^{n_2}\dots(1 + i_k)^{n_k}, \qquad (3.5)$$

где $i_1, i_2, \dots, i_k$ – последовательные значения ставок; $n_1, n_2, \dots, n_k$ – периоды, в течение которых “работают” соответствующие ставки

ПРИМЕР 3.3. Срок ссуды — 5 лет, договорная базовая процентная ставка — 12% годовых плюс маржа 0,5% в первые два года и 0,75% в оставшиеся годы. Множитель наращения в этом случае составит

$$q = (1 + 0{,}125)^2 (1 + 0{,}1275)^3 = 1{,}81407.$$

Начисление процентов при дробном числе лет

- Общий метод: $S = P(1 + i)^n$ (3.1)
- Смешанный метод: начисление процентов за целое число лет по формуле сложных процентов и за дробную часть срока по формуле простых процентов

$$S = P(1 + i)^a (1 + bi), \qquad (3.6)$$

Где $n = a + b$ — срок ссуды,

a — целое число лет,

b — дробная часть года.

ПРИМЕР 3.4. Кредит в размере 3 млн руб. выдан на 2 года и 160 дней ($n = 3\frac{160}{365} = 3,43836$ года) под 16,5% сложных годовых.

Сумму долга на конец срока определим по формуле (3.1):

$$S = 3\,000\,000 \times 1,165^{3,43836} = 5071935,98 \text{ руб.},$$

в свою очередь, смешанный метод дает

$$S = 3\,000\,000 \times 1,165^{3} \times (1 + 0,43836 \times 0,165) = 5086595,98 \text{ руб.}$$