

10 класс

Производная функции

Определение производной

Пусть x - произвольная точка, лежащая в некоторой окрестности точки X_0 (окрестность точки X_0 - это интервал $(a; b)$, $X_0 \in (a; b)$).

Разность $x - X_0$ называется приращением аргумента:

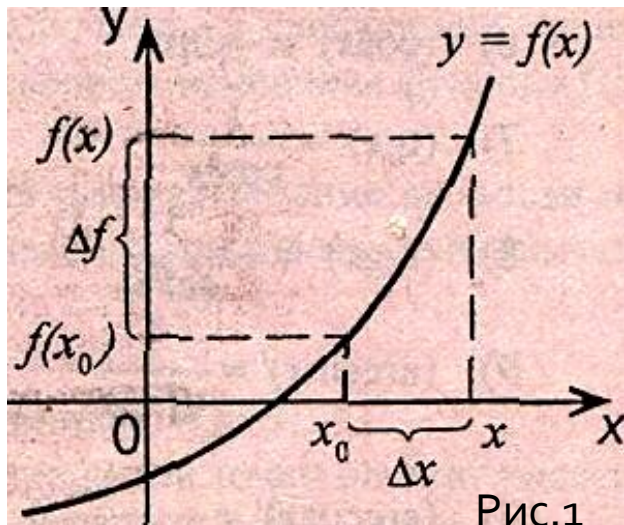
$$\Delta x = x - X_0. \text{ Отсюда } x = X_0 + \Delta x.$$

Разность $f(x) - f(X_0)$ называется приращением функции:

$$\Delta f = f(x) - f(x_0) \text{ или}$$
$$\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0).$$

Отсюда

$$f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + \Delta f.$$



Геометрический смысл приращений Δx и Δf показан на рис.1.

Производной функции $y = f(x)$ в точке x_0 называется предел отношения приращения функции Δf к приращению аргумента Δx , стремящегося к "нулю".

Обозначается $f'(x_0)$.

Итак,

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (\Delta f / \Delta x)$$

Если функция $y = f(x)$ имеет производную в точке x_0 , то говорят, что она дифференцируема в точке x_0 .

Нахождение производной данной функции называется дифференцированием.

Правила дифференцирования

Правило №1

Если функции u и v дифференцируемы в точке x_0 , то их сумма также дифференцируема в точке x_0 , причем производная суммы равна сумме производных, т.е.

$$(u + v)' = u' + v'$$

Правило №2

Если функции u и v дифференцируемы в точке x_0 , то их произведение также дифференцируемо в точке x_0 , причем

$$(u \cdot v)' = u'v + uv'$$

Правила дифференцирования

Правило №3

Если функции u и v дифференцируемы в точке x_0 и $v(x_0) \neq 0$, то их частное также дифференцируемо в точке x_0 , причем

$$(u/v)' = (u'v - uv') / v^2$$

Правило №4

Если функция u дифференцируема в точке x_0 и $c = \text{const}$, то их произведение также дифференцируемо в точке x_0 , причем

$$(cu)' = cu'.$$

Правило №5

Если $f(g(x))$ - сложная функция, то ее производная равна произведению производных внешней и внутренней функций, т.е.

$$[f(g(x))]' = f'(g) \circ g'(x)$$

