Повторений испытаний

Формула Бернулли

При решении вероятностных задач часто приходится сталкиваться с ситуациями,
в которых одно и
тоже испытание повторяется многократно.
Например стрелок не сходя с места ,каждый раз тщательно прицеливается, производит несколько выстрелов по мишени или несколько человек заполняют по одной карточке “спортлото”.

В результате каждого такого испытания может наступить или не наступить некоторые события A. В результате одного выстрела мишень может быть поражена или нет. В результате заполнении е одной карточки “спорт лото” можно отгадать все шесть номеров или не отгадать номера. Можно предположить, что в приведённых ситуациях вероятность появления события A в каждом испытании одна и та же. Модель каждой из этих ситуаций выглядит следующим образом.

**Проводится *n* испытаний в каждом из которых событие *A* может произойти или не произойти, причём вероятность события в каждом
отдельном испытании постоянна,
т.е не меняется от испытания к испытанию.
Вопрос о том, как находится вероятность
события в отдельном испытании,
уже был рассмотрен. Поэтому представляет
особый интерес появления любого
определённого числа раз события *A* в *n* испытаниях,
точнее, вероятность появления этого числа.**

Рассмотрению задач в которых требуется определить вероятность m **появления события** A **в результате** n **испытаний, и посвящена настоящая глава. Подобные задачи решаются сравнительно легко, если испытания являются независимыми.**

Определение. Несколько испытаний называются независимыми относительно события A***, если вероятность события*** A ***в каждом из них не зависит от исходов других испытаний.***

Примером независимых испытаний может служить несколько подбрасываний монет. Несколько последовательных выниманий из урны одинаковых на ощупь, но разных по цвете шаров, также являются независимыми испытаниями, например относительно белого шара, если шары возвращаются назад и тщательно перемешиваются.

Возникает вопрос:

как связана независимость испытаний и независимость событий, которые могут произойти в результат этих испытаний?

Пусть проводят n **независимых испытаний, в которых событие** A **может наступить или не наступить. Это означает, что в результате каждого испытания может произойти событие** A**, причём вероятность не изменяется от того, какие события произойдут в остальных испытаниях. Не исключена возможность, что во всех этих испытаниях произойдёт событие** A**. Обозначим через** A_i, $i=1,2,3,\ldots,n$, **события** A**, если оно произойдёт в** i-м **испытаний.**

Из определений независимость испытаний и независимости событий $A_1, A_2, A_3, \ldots A_n$ независимы в совокупности. Однако совсем не обязательноюу чтобы во всех испытаниях произошло событие A.

Пусть для определённости в пяти независимых испытаниях два раза произошло событие A, наступило оно во 2-м и 5-м испытаниях. Это означает, что в пяти испытаниях наступило событие $\bar{A}_1, \bar{A}_2, \bar{A}_3, \bar{A}_4, A_5$. А так как при замене любого числа события из группы независимых в совокупности событий на противоположные им события независимость событий сохраняться, то представленная группа событий также независима в совокупности.

Практически события A может появиться в n независимых испытаниях любое число раз в разных последовательностях или комбинациях, чередуясь с противоположным событием A. Такая группа событий независима в совокупности группы n событий, представляющей собой произвольную комбинацию событий A и $\bar{A}$,одно из которых обязательно произойдёт в каждом из рассматриваемых испытаний.

По теореме умножения вероятностей для независимых событий, вероятность совместного наступления таких событий равна произведению их вероятностей, т.е. выполняется, например, равенство

$P(A_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3 \bar{A}_4 \ldots \bar{A}_n) = P(A_1)\, \mathrm{P}(\bar{A}_2)\, \mathrm{P}(\bar{A}_3)\, \mathrm{P}(\bar{A}_4) \ldots P(\bar{A}_n)$

Рассмотрим одно из ситуаций, в которой событие может произойти в любом из нескольких независимых событий.

ПРИМЕР 4.1

монета в независимых условиях бросается три раза. Пусть событие *A* состоит в выпадении “герба”. Естественно считать эти подбрасывания независимыми испытаниями. Вероятность появления “герба” в каждом единичном испытании, очевидно, постоянна и равна ½ .

Таким образом, в рассматриваемой ситуации налицо независимые испытания, в каждом из которых вероятность событий A **постоянна и от испытания к испытанию не меняется. Такие испытания обычно называют испытаниями Бернулли . найдём теперь вероятность того, что два раза появится “герб”;** $\bar{A}$ – “B i-м **испытании появилось “орешка”.**

При трёхкратном бросании монеты возможны следующие восемь исходов: $A_1 A_2 A_3$; $\bar{A}_1 A_2 A_3$; $A_1 \bar{A}_2 A_3$; $A_1 A_2 \bar{A}_3$; $\bar{A}_1 \bar{A}_2 A_3$; $\bar{A}_1 A_2 \bar{A}_3$; $\bar{A}_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3$- **и только три из них, а именно** $\bar{A}_1 A_2 A_3$, $A_1 \bar{A}_2 A_3$, $A_1 A_2 \bar{A}_3$-**благоприятствуют событию В, состоящему в двукратном появлении “герба”, в трёх испытаниях. Следовательно можно записать** $B = \bar{A}_1 A_2 A_3 + A_1 \bar{A}_2 A_3 + A_1 A_2 \bar{A}_3$. **Таким образом событие В наступить, если в первый раз появится орешка**

а второй и третий герб ; первый и третий раз появится герб,

а второй-орешка; первый и второй раз появится герб,

а последний орешка.

Так как эти варианты не совместны и все события, входящие в произведения, независимы, то по теореме умножения и сложения вероятностей имеем.

$$P(B)=P(\bar{A}_1 A_2 A_3)+P(A_1 \bar{A}_2 A_3)+$$
$$+P(A_1 A_2 \bar{A}_3)= 3\cdot 1/2\cdot 1/2\cdot 1/2=3/8$$

Этот же результат можно получить, если воспользоваться классической формулой вероятности. Действительно, все перечисленные выше восемь исходов трёхкратного бросания монеты равновозможные и только три их них благоприятствуют событию B**. Поэтому** $P(B)=M/N=3/8$.

При увеличении числа бросаний моменты количество исходов увеличивается, а следовательно, возрастает трудность вычисления необходимых вероятностей. Выработаем теперь общий метод решения подобных задач, позволяющие с минимальными вычислительными затратами получить требуемый результат. Поставим задачу в общем виде. Пусть в результате испытания возможны два исхода: либо появится событие A, либо противоположное ему событие $\bar{A}$. Проведём n испытаний Бернулли. Напомним, это означает, что все n испытаний независимы; вероятность появления события A в каждом отдельно взятом, или единичном испытании постоянна и от испытания к испытанию не изменяются (т. е. испытания проводится в одинаковых условиях). Обозначим вероятность $P(A)$ появления события A в единичном испытании буквой p, т.е. $P(A)=p$, а вероятность $P(\bar{A})$ –буквой q, т.е. $P(\bar{A})=1-P(\acute{A})=1-p=q$.

Найдём вероятность $P_n(m)$ наступления события A ровно m раз (ненаступления n-m раз) в этих n испытаниях .

Отметим, что здесь не требуется появления m раз события A

в определенной последовательности.

Обозначим: A_1-появление события A в i-м опыте, где i=1,2,3,…,n.

Для одного испытания возможны следующие два исхода: A, $\bar{A}$. Вероятности этих исходов выпишем в виде следующей таблице:

События	A	Á
Вероятность	p	q

Очевидно, $P_1(1)=p$; $P_1(0)=q$ и $P_1(1)+P_1(0)=(p+q)^i=1$.

Для двух испытаний возможны следующие $4=2^2$ **исхода:** $A_1A_2, \bar{A}_1A_2, A_1\bar{A}_2, \bar{A}_1\bar{A}_2$. **Вероятность этих исходов также выпишем в виде таблицы:**

События	A_1A_2	$A_1\acute{A}_2$	$\acute{A}_1A_2$	$\acute{A}_1\acute{A}_2$
Вероятность	p^2	pq	pq	q^2

Очевидно, $P_2(2)=p^2, P_2(1)=P(A_1\acute{A}_2)+P(\acute{A}_1A»)=2pq, P_2(0)=q^2$ и $P_2(2)+P_2(1)+P_2(0)=p^2+2pq+q^2=(p+q)^2=1$.

Для трёх испытаний возможны следующие 8=2 **исходов:**

$A_1 A_2 A_3$, $\bar{A}_1 A_2 A_3$, $A_1 \bar{A}_2 A_3$, $A_1 A_2 \bar{A}_3$, $\bar{A}_1 \bar{A}_2 A_3$, $\bar{A}_1 A_2 \bar{A}_3$,
$A_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3$, $\bar{A}_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3$. **Вероятность этих исходов запишем в виде таблице:**

События	A1 A2 A3	Ά1 A2 A3	A1 Ά2 A3	A1 A2 Ά3	Ά1 Ά2 A3
Вероятность	P^3	p^2q	p^2q	p^2q	pq^2

События	Ά1 A2 Ά3	A1 Ά2 Ά3	Ά1 Ά2 Ά3
Вероятность	pq^2	pq^2	q^3

Очевидно, $P_3(3)=p^3$, $P_3(2)=P(\bar{A}_1 A_2 A_3)+P(A_1 \bar{A}_2 A_3)+P(A_1 A_2 \bar{A}_3)=3p^2q$,
$P_3(1)+P(\bar{A}_1 \bar{A}_2 A_3)+P(\bar{A}_1 A_2 \bar{A}_3)+P(A_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3)=3pq^2$, $P_3(0)=q^3$ и
$P_3(3)+P_2(2)+P_3(1)+P_3(0)=p^3+3p^2q+3pq^2+q^3=(p+q)^3=1$.

Анализируя эти случаи, можно сделать общий вывод: вероятность $P_n(m)$ **пропорциональна произведению** $p^m q^{m-n}$**, причём коэффициент пропорциональности равен** C_n^m**, т.е.** $P_n(m)=C_n^m p^m q^{m-n}$

Полученную формулу можно доказать используя метод математической индукции. Однако в качестве доказательства причём следующие рассуждения. Пусть проведено n независимых испытаний, в каждом из которых событие A **может наступить и не наступить. Если в результате испытаний событие** A **произошло m раз (неважно, в каком порядке), то это означает, что совместно наступили** m **событий** A **и** n-m **событий** $\bar{A}$**, вероятности которых в каждом отдельном опыте равны** p **и** q **соответственно. Так как все n событий независимы, то, по теореме умножения, вероятность появления m раз события А в определенной последовательности равна** $p^{m}q^{m-n}$**.**

Однако событие *A* может появиться *m* раз в *n* опытах в совершенно другой последовательности и число таких последователей равно числу сочетаний из *n* по *m*,т.е. C_n^m (это число совпадает с числом способов , которому можно выбрать m мест из имеющихся *n*, не учитывая их порядка). Все C_n^m вариантов появления события *A* *m* раз представляют собой несовместные события, вероятность каждого из которых равна $p^m q^{n-m}$. А так как наступление одного (любого) из этих событий означает наступление события, состоящего в том, что в n независимых испытаниях событие *A* появится m раз, то, по теореме сложения вероятностей для несовместных событий, искомая вероятность $P_n(m)$ равна сумме вероятностей всех указанных несовместных событий, т.е. произведению $C_n^m p^m q^{n-m}$.

Таким образом,

что в *n* независимых испытаниях событие *A* появится *m* раз, то, по теореме сложения вероятностей для несовместных событий, искомая вероятность $P_n(m)$ равна сумме вероятностей всех указанных несовместных событий, т.е. произведению $C_n^m p^m q^{m-n}$.

Таким образом,

$$P(m)=C_n^m p^m q^{m-n} = \frac{m!\,(m-n)!}{n!}\, p^m q^{m-n}.$$

Полученную формулу называют формулой Бернулли. Проиллюстрируем применение формулы.

Задача 4.1.

Момент бросают 8 раз. Какова вероятность, что 4 раза выпадет герб?

Как правило, на вопрос задачи отвечают, что эта вероятность равна ½. Однако это ошибочный ответ. Действительность, здесь $n=8$, $m=4$ $p=q=1/2$. По формуле получаем

$$P_8(4)=C_8^4(1/2)^4(1/2)^4=70/256<1/3.$$

ЗАДАЧА 4.2.

Вероятность изготовления на станке-автомате нестандартной детали равна 0,02. Какова вероятность того, что среди наудачу взятых шести деталей пять или шесть стандартных, т.е. одна или ноль бракованных. По теореме сложения вероятностей,

$P_6(0 \leq m < 1) = P_6(0) + P_6(1) = C_6(0,02)^0(0,98)^6 +$

$+ C_6^0(0,02)^0(0,098)^5 \approx 0,9943.$

Асимптотические формулы

При решении задач 4.1,4.2 особых трудностей при вычислении искомых вероятностей не возникало так как число испытаний *n* было невелико. Однако если число испытаний достаточно велико, то использование формулы (3.1) нецелесообразно в силу необходимости выполнения громоздких вычислений. Пусть например, требуется вычислить $P_{320}(285)$ (при $p=0.89$).

В данном случае формула принимает вид

$$P_{320}(285)=\frac{320!}{285!\,35!}(0{,}89)^{285}(0{,}11)^{35}.$$

Получить по указанной формуле более или менее точный результат практически невозможно.

В этом параграфе рассматриваются специальные методы, с помощью которых можно получить достаточно точные ответы в задачах, связанных с повторением испытаний, не прибегая к сложным вычислениям. Суть первого метода заключается в применении локальной теоремы Муавра – Лапласа, дающей асимптотическую формулу, которая позволяет вычислять вероятность приближения.

Локальная теорема Муавра-Лапласа.

Если вероятность наступления события *A* в каждом из *n* независимых испытаниях равно *p* и отлична от нуля и единицы, а число испытаний достаточно велико, то вероятность $P_n(m)$ того, что в n испытаний событие *A* наступит *m* раз, приближенно равна (чем больше *n*, тем точнее) значение функции

$$y=\frac{1}{\sqrt{npq}}f(u),\ \text{где } f(u)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-u^2/2},\ u=\frac{m-np}{\sqrt{npq}},$$

$$\text{т.е } P_n(m)\approx\frac{1}{\sqrt{2\pi}}f\left(\frac{m-np}{\sqrt{npq}}\right)$$ **(формула 4.2)**

Значение функции $f(u)$ для любого аргумента и можно получить разложив её в степенной ряд, однако в этом нет необходимости, так как её значения можно найти из специальной таблицы.

При использовании этой таблицы следует помнить, что функция $f(u)$ чётная, т.е. $f(-u)=f(u)$.

ЗАДАЧА 4.3

Вероятность того, что сошедшая с конвейера деталь стандартная, равна 0,9. Найти вероятность того, что из 400 сошедших с конвейера деталей 356 окажутся стандартными.

Согласно условиям задачи, n=400, n=356, q=0,1.

По формуле (4.2) находим

$$P_{400}(356) \approx \frac{1}{\sqrt{}} f(u) = \frac{1}{6} f(u).$$

1

Далее из условий задачи следует, что

$$U = \frac{m - np}{\sqrt{npq}} = \frac{356 - 400 \cdot 0{,}9}{} \approx -0{,}67.$$

По таблице П.1,учитывая, что $f(-u)=f(u)$,

находим $f(-0,67)=0,3188$**.**

Искомая вероятность $P_{400}(356)\approx 0,3188/6\approx 0,0531$**.**

Такое небольшое значение полученной вероятности, несмотря на то что вероятность появление стандартной детали равна 0,9, объясняется тем, что была вычислена вероятность только одного из 401 исходов сложного испытания, состоящего в отборе 400 деталей.

Задача 4.4.

Два спортсмена играют в настольный теннис. Вероятность выигрыша первого спортсмена равна 5/9. Какова вероятность того, что он выиграет две партии из пяти?

По условию, $p=5/9$, $q=4/9$, $n=5$, $m=2$**. Воспользуемся формулой.**

Имеем $P_5(2) \approx f(u)\cdot\frac{1}{\sqrt{5\cdot 5/9\cdot 4/9}}$ $f(u)=0{,}9f(u)$

Найдём значение аргумента

$$U=\frac{m-np}{\sqrt{npq}}=\frac{2-5\cdot 5/9}{10/9}=-0{,}7$$

По табл. П.1 находим f(-0.7)=03123**. Искомая вероятность**
p5(20)$\approx$0.9·0·3123$\approx$ 0.281**.проверим полученные результат, воспользовавшись формулой Бернулли. Имеем**
$P5(2)=C_5^2(5/9)^2(4/9)^3 \approx 0.271$**.**

Расхождение ответов объясняется тем, что формула даёт хорошее приближение при больших значениях *n*, а в данном случае оно равно 5. Формула позволяет получить более близкие
к точному значению $P_n(m)$ **результаты, чем больше Значение** $\sqrt{npq}$ **и чем ближе значения *p* и *q* к 0.5.**

Если вероятность события *p* (или *q*) в отдельном испытании
близка к нулю (такие события называются редкими),
то даже при большом числе испытаний *n*,
но небольшой величине произведения np (меньше 10)
вероятности *Pn*(*m*), полученные по формуле (4.2),
недостаточно близки к их истинным значениям.
В таких случаях применяют другую асимптотическую формулу-формулу Пуассона, справедливость которой доказывает следующая теорема.

Теорема

Если вероятность *p* наступления события *A* в каждом испытании постоянна, но близка к нулю число независимых испытаний *n* достаточно влико, а произведение $np=\lambda$,
то вероятность $P_n(m)$ того, что в n независимых испытаниях событие A наступит m раз, приближенно равно

$$\frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!}$$

т.е. $P_n(m) \approx \frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!}$.

Формула (4.3) называется формулой Пуассона. Для вычисления вероятности *Pn*(*m*) воспользуемся формулой Бернулли.

Имеем $P_n(m)=\dfrac{n!}{m!(n-m)!}p^m q^{n-m}=\dfrac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1)}{m!}p^m q^{n-m}$.

Так как, по условию, *n* велико, то найдём предел правой части последнего равенства при *n*→∞. при этом будет получено приближенное значения вероятности *Pn(m)*.

Итак, $P_n(m) \approx \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1)}{m!} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^m \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-m} =$

$$= \frac{\lambda^m}{m!} \lim_{n\to\infty} \left[\frac{n}{n}\left(\frac{n-1}{n}\right)\left(\frac{n-2}{n}\right)\ldots\left(\frac{n-m+1}{n}\right)\right]\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-m}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n} =$$

$$= \frac{\lambda^m}{m!} \lim_{n\to\infty} \left(1-\frac{1}{n}\right) \lim \left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\lim \left(1-\frac{m-1}{n}\right) \times$$

$$\times \lim \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-m} \lim \left[\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-n/\lambda}\right]^{-\lambda} = \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}$$

Здесь пределы всех сомножителей, кроме последнего (второго замечательного предела), равны 1. Окончательно имеем

$$P_n(m) \approx \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}$$ Формула (4.3)

Условия теоремы требуют, чтобы вероятность события *p* была мала, а число испытаний n велико.
Обычно указанную формулу используют,
когда $n \geq 10$, лучше $n \geq 100$, а $np < 10$.

Задача 4.5

Некоторое электронное устройство выходит из строя, если откажет определённая микросхема. Вероятность её отказа в течение 1ч работы устройства придётся пять раз менять микросхему?

По условию, $n=1000$, $p=0{,}004$, **а** $\lambda=np=1000\cdot 0{,}004=4<10$.

Для нахождения вероятности

$$P_{1000}(5) \approx \frac{4^5 e^{-4}}{5!} \approx 0.1563$$

Найдём вероятность того же события по формуле (4.2). Значение u равно

$$u=\frac{m-np}{\sqrt{npq}}=\frac{5-4}{\sqrt{\;}}\quad 0.501.$$

Из таблицы П.1, следует, что $f(u) \approx 0{,}3521$.

Тогда $P_{1000}(5) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} f(u) \approx 0.3521/1{,}996 \quad 0{,}1764$.

значение искомой вероятности по формуле Бернулли равно $C1000(5) = C_{1000}^{5} (0.004)^5 (0{,}99 \approx^{995} \quad$ 0,15[redacted]6.

Как видно из полученных результатов, формула (4.3) даёт более точной результат, чем формула (4.2).