



# Построение отрезка по формуле

Проект по геометрии

Выполнили: Филимонова Екатерина

Руководитель: Шорина С.П.



# Методический паспорт учебного проекта по геометрии.

Тема: Построение отрезка по заданной формуле.

Проблема: построить неизвестный отрезок, т.е. выразить его через известные отрезки и величины, разложить формулу, научиться строить отрезок по найденной формуле.

Актуальность исследований: На первый взгляд может показаться, что данная тема вряд ли имеет практическое применение в повседневной жизни. Однако, довольно сложно представить современный мир без архитектуры и программирования, где эта тема весьма актуальна и широко используется, не напрасно ведь мы изучаем в школе задачи на построение.

Объект исследования: построение на плоскости.

Предмет исследования: построение отрезков, заданных формулами.

Гипотеза: Практически по многим заданным формулам можно построить отрезок.

Цель проекта: Найти рациональные способы построений отрезков, заданных некоторыми степенными формулами и формулами с радикалами.





# Теория.

## Общее

## определение.

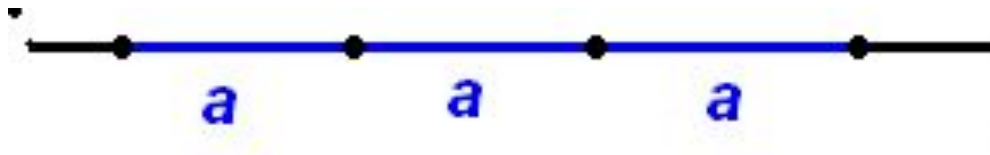
Особую часть задач на построение представляют собой задачи на построение по формуле, обычно они имеют следующий вид: исходя из данных отрезков (реже углов) построить отрезок (или угол), определяемый данной формулой. Иногда построение какого-либо объекта сводится к этой же задаче, если по данным в условии элементам удастся недостающие элементы построения вычислить и по полученной формуле они строятся линейкой и циркулем.



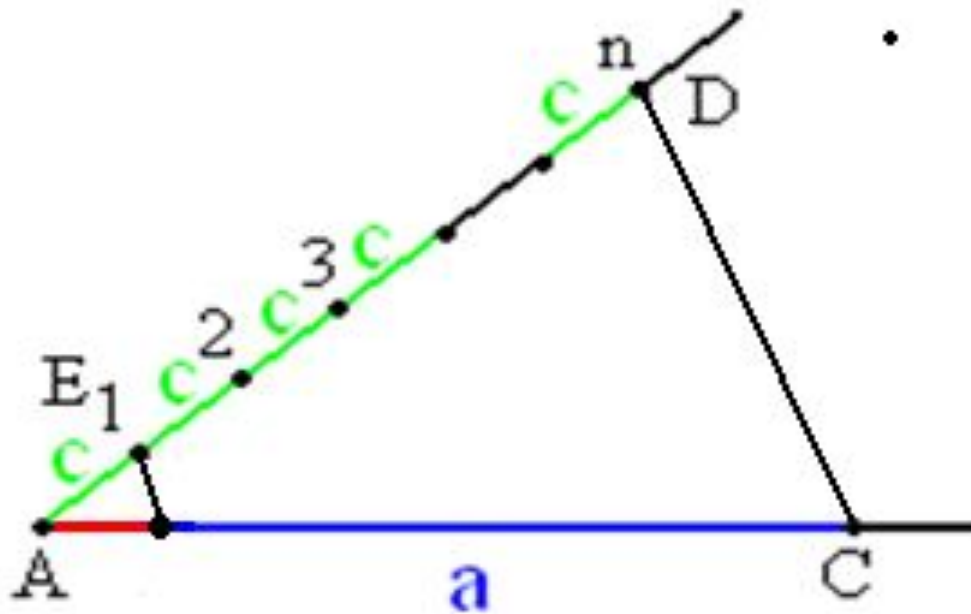
Для построения отрезков по формуле необходимо владеть элементарными стандартами построения. Их немного:



- 1) по отрезку  $a$  построить отрезок  $ta$ , где  $t$ -натуральное число. На прямой циркулем последовательно откладывается  $t$  раз отрезок  $a$ .



- 2) по отрезку  $a$  построить отрезок  $a/n$ , где  $n$ -натуральное число.



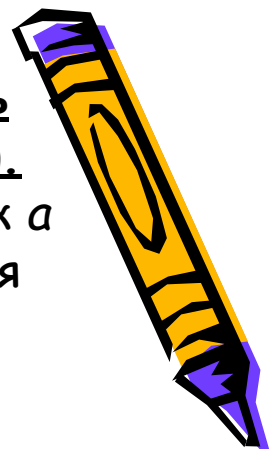
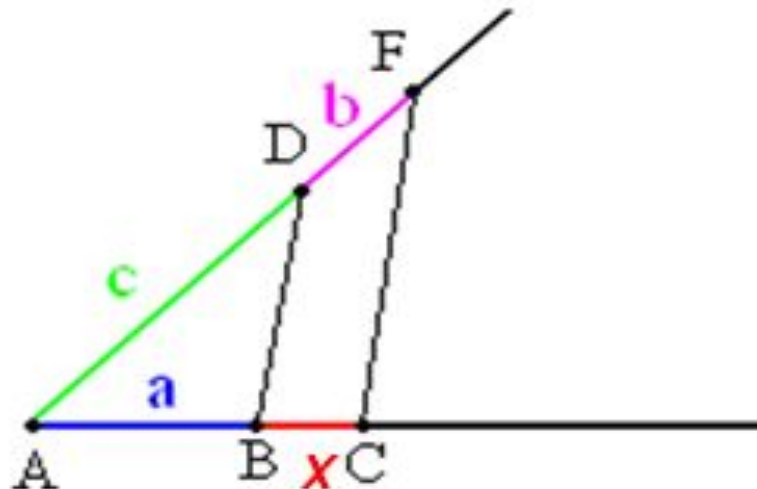
- 3) по отрезку  $a$  построить отрезок  $ta/n$ , где  $t$  и  $n$  - натуральные числа.

Комбинация 1 и 2 построений. Сначала строим отрезок  $z$ , равный отрезку  $at$ , а потом отрезок  $z/n$ , равный отрезку  $ta/n$ .

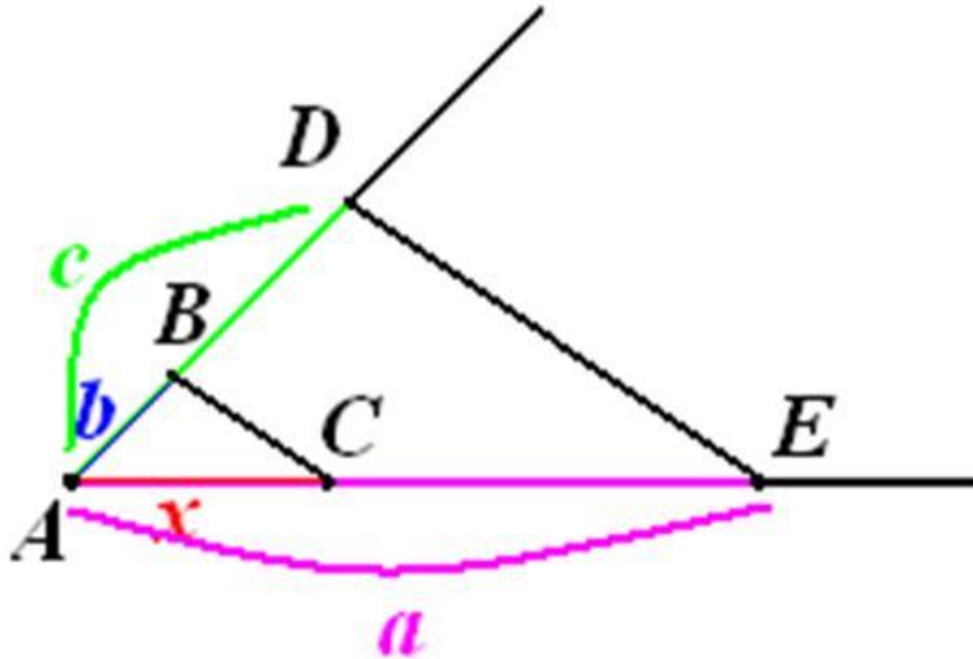
- 4) по отрезкам  $a$  и  $b$  построить отрезки  $a+b$  и  $a-b$  (если  $a > b$ ).

Отложенный на прямой отрезок  $a$  увеличивается или уменьшается на отрезок  $b$ .

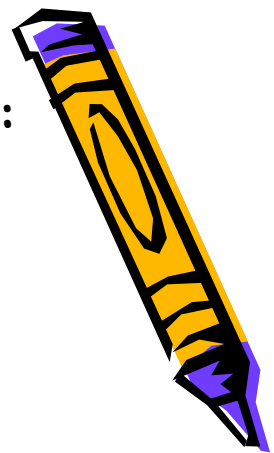
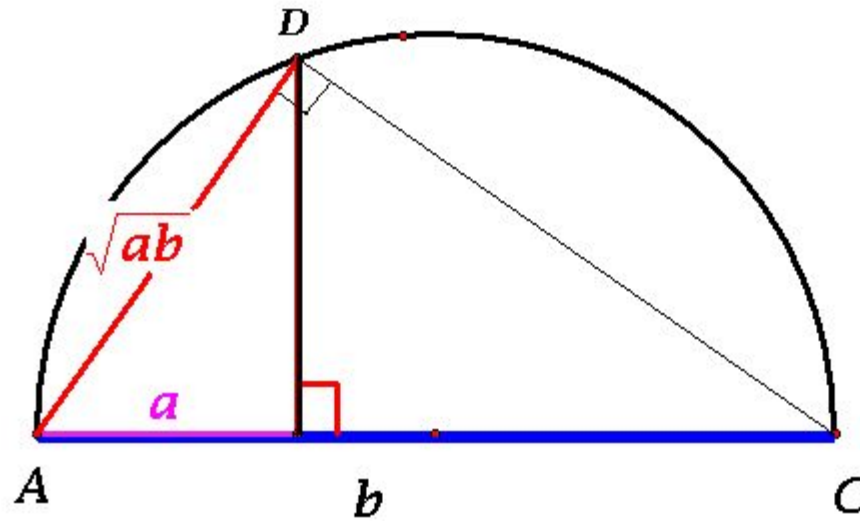
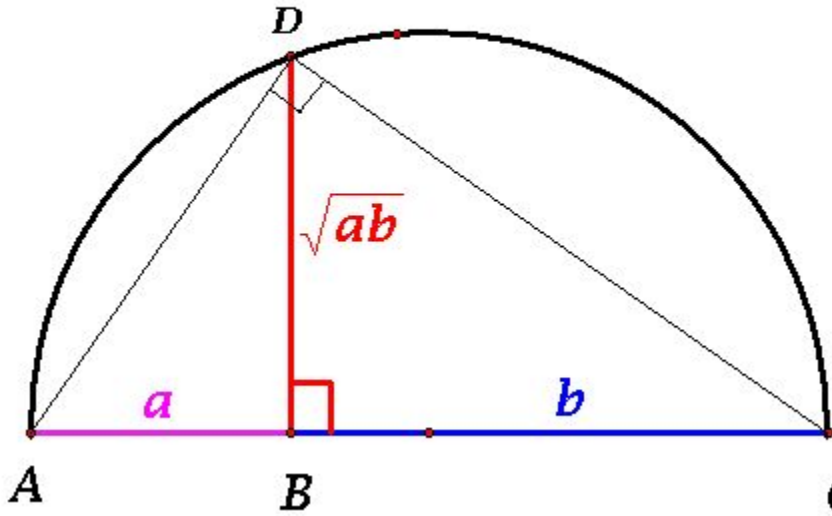
- 5) по отрезкам  $a$ ,  $b$  и  $c$  построить отрезок  $x=ab/c$  (построение пропорциональных отрезков с использованием теоремы Фалеса:  $a/c=x/b$ )



5а). Возможен и другой вариант построения отрезка  $x=ab/c$  - при помощи подобия треугольников:  $x/b=a/c$ .



- 6) по отрезкам  $a$  и  $b$  построить отрезок  $x = \sqrt{ab}$
- Существует несколько вариантов такого построения, например:





Но не все построения возможны, скажем, нельзя по отрезку  $a$  построить  $\frac{a}{a}$ ,  $a^2$  или

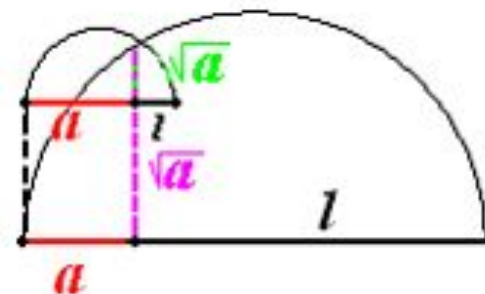
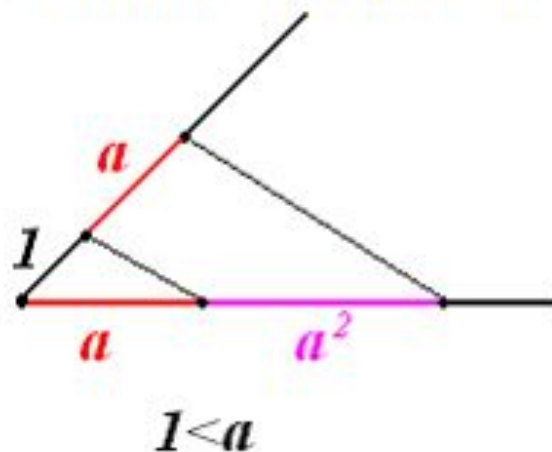
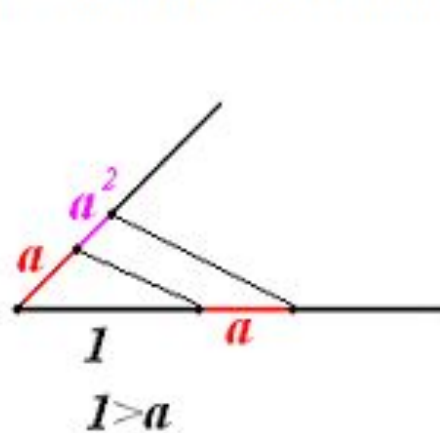
$\sqrt{a}$ , т.к. они не имеют размерности длины (размерность  $\frac{a}{a}$  отсутствует,

размерности  $a^2$  (см<sup>2</sup>) и  $\sqrt{a}$  (√см)). Данные построения возможны только при указании отрезка единичной длины  $l$ , чтобы сохранить размерность длины (см),

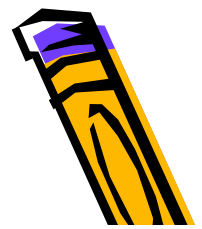
тогда  $\frac{a}{a} = \frac{a \cdot l}{a}$ ,  $a^2 = \frac{a \cdot a}{l}$ ,  $\sqrt{a} = \sqrt{a \cdot l}$  будут иметь размерность. Без указания

единичного отрезка ничего нельзя сказать и о величинах  $\frac{a}{a}$ ,  $a^2$  или  $\sqrt{a}$ .

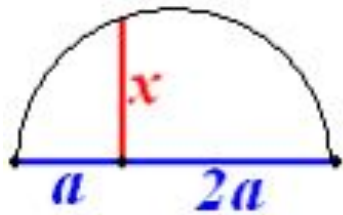
Причем, если единичный отрезок  $l > a$ , то  $a^2 < a$  и  $\sqrt{a} > a$ , а если  $l < a$ , то  $a^2 > a$  и  $\sqrt{a} < a$ .







А, например, построить отрезок  $\sqrt{2a}$  можно,  $\sqrt{2a} = \sqrt{2a \cdot a}$ .



Отсутствие единичного отрезка часто усложняет построение. Так чтобы по отрезкам

$a$  и  $b$  построить отрезок  $x = \frac{a^4}{a^3 + b^3}$  без единичного отрезка, приходится

преобразовывать последнее выражение, например, к виду  $x = \frac{a^2}{a + \frac{b^2}{a} \times \frac{b}{a}} = \frac{a \times a}{a + \frac{b \times b}{a} \times \frac{b}{a}}$

и последовательно построить отрезки  $c = \frac{b \times b}{a}$ ,  $d = \frac{cb}{a}$ ,  $e = a + d$ ,  $x = \frac{a \times a}{e}$ .

Иногда найти подходящее преобразование бывает очень сложно, и потому тот же отрезок строят с использованием единичного отрезка.



# Задача 1.

**Условие:** По данным отрезкам  $a$  и  $b$  построить отрезок, заданный формулой

$$f = \sqrt[4]{a^4 + b^4}$$

**Решение:**

Преобразовываем выражение:

$$f = \sqrt[4]{a^2 \left( a^2 + \frac{b^4}{a^2} \right)}$$

Вводим переменную:

$$x = \frac{b^2}{a}; \quad \frac{b}{a} = \frac{x}{b}$$

Получаем:

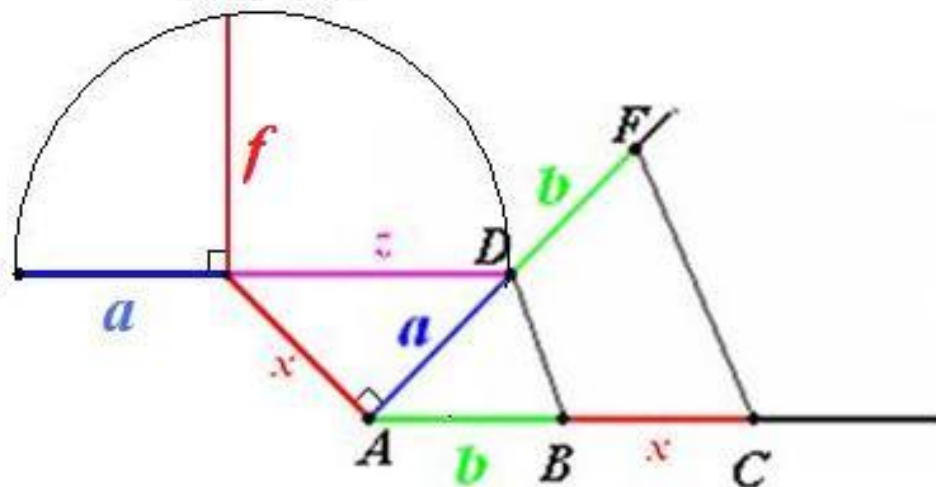
$$f = \sqrt[4]{a^2 (a^2 + x^2)}$$

Вводим еще одну переменную:

Таким образом получаем:

$$f = \sqrt[4]{a^2 z^2} = \sqrt{az}$$

Данный отрезок мы можем построить без труда.



### Задача 3.

Условие: По данным отрезкам  $a$ ,  $b$ ,  $c$  построить отрезок, заданный формулой  $x = \sqrt{ab + bc + cd}$

Решение:

$$x = \sqrt{\left(\frac{ab}{l} + \frac{bc}{l} + \frac{cd}{l}\right) \times l}$$

Строим последовательно:

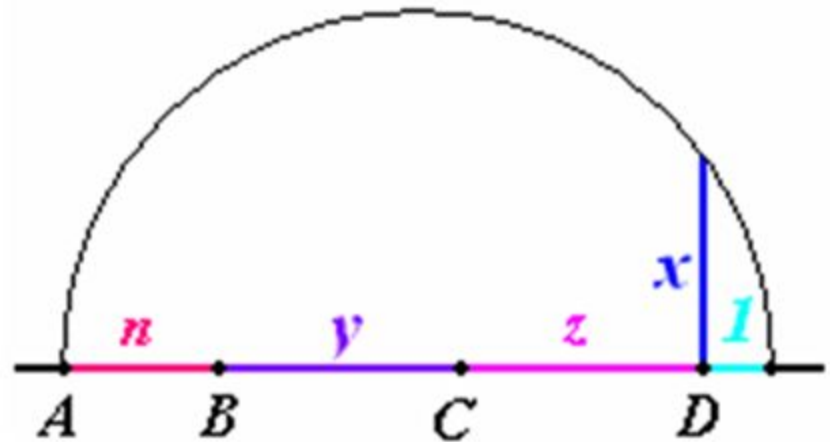
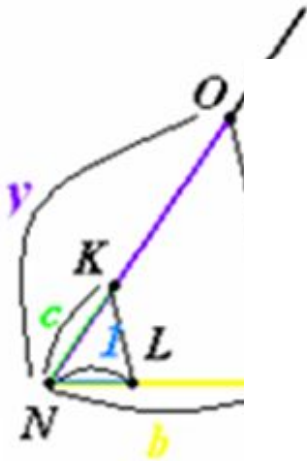
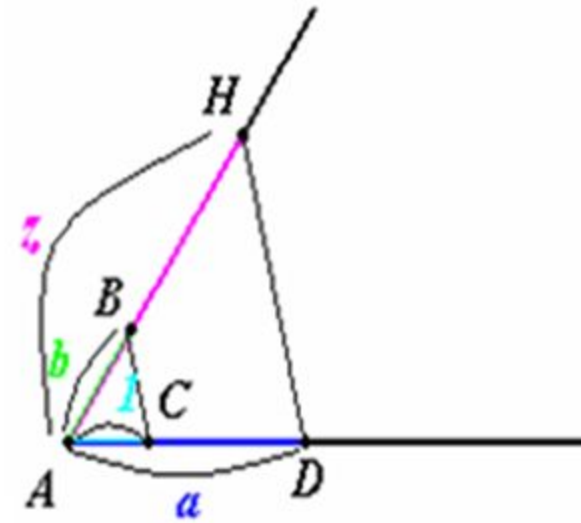
$$\frac{ab}{l} = z(1)$$

$$\frac{bc}{l} = y(2)$$

$$\frac{cd}{l} = n(3)$$

Получаем:

$x = \sqrt{(z + y + n) \cdot l}$   
Данный отрезок мы можем без труда построить.



# Задача 5.



Условие:

По данным отрезкам  $a$  и  $b$  построить отрезок, заданный формулой  $x = \frac{a^{10} + b^{10}}{a^9 + b^9}$

Решение:  $x = \frac{a^{10} + b^{10}}{a^9 + b^9} = \frac{\frac{a^{10}}{l^9} + \frac{b^{10}}{l^9}}{\frac{a^9}{l^8} + \frac{b^9}{l^8}} \times l; \quad \frac{a^{10}}{l^9} = a_{10}; \quad \frac{b^{10}}{l^9} = b_{10}; \quad \frac{a^9}{l^8} = a_9; \quad \frac{b^9}{l^8} = b_9.$

Выбираем длину отрезка  $a$  за длину единичного отрезка. ( $l = a$ ).

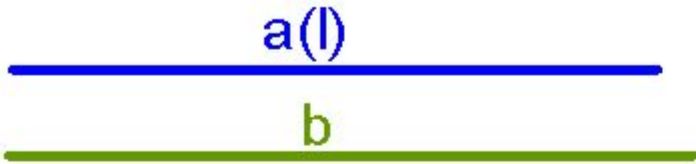
Тогда отрезки  $\frac{a^{10}}{l^9} = a; \quad \frac{a^9}{l^8} = a.$

Способ построения отрезка  $b_{10}$

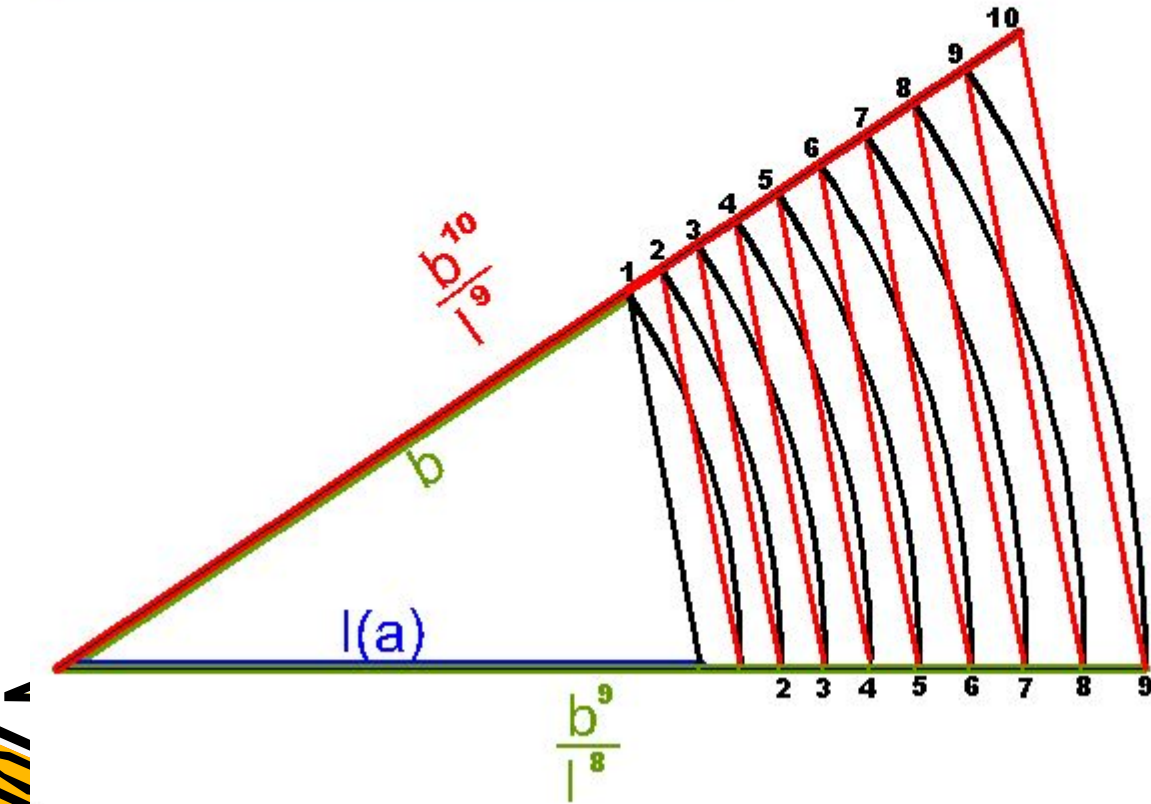
$$b_{10} = \frac{b^{10}}{l^9} = \frac{b \times b \times b \times b \times b \times b \times b \times b \times b \times b}{l \times l \times l \times l \times l \times l \times l \times l \times l}$$



$$b_{10} = \frac{b^{10}}{l^9} = \frac{b \times b}{l} \times \frac{b}{l} \times \frac{b}{l} \times \frac{b}{l} \times \frac{b}{l} \times \frac{b}{l} \times \frac{b}{l} \times \frac{b}{l} \times \frac{b}{l} \times \frac{b}{l}$$



$(b > a)$



$$b_{10} = \frac{b^{10}}{l^9} = \frac{b \times b}{l} \times \frac{b}{l} \times \frac{b}{l} \times \frac{b}{l} \times \frac{b}{l} \times \frac{b}{l} \times \frac{b}{l} \times \frac{b}{l} \times \frac{b}{l} \times \frac{b}{l}$$



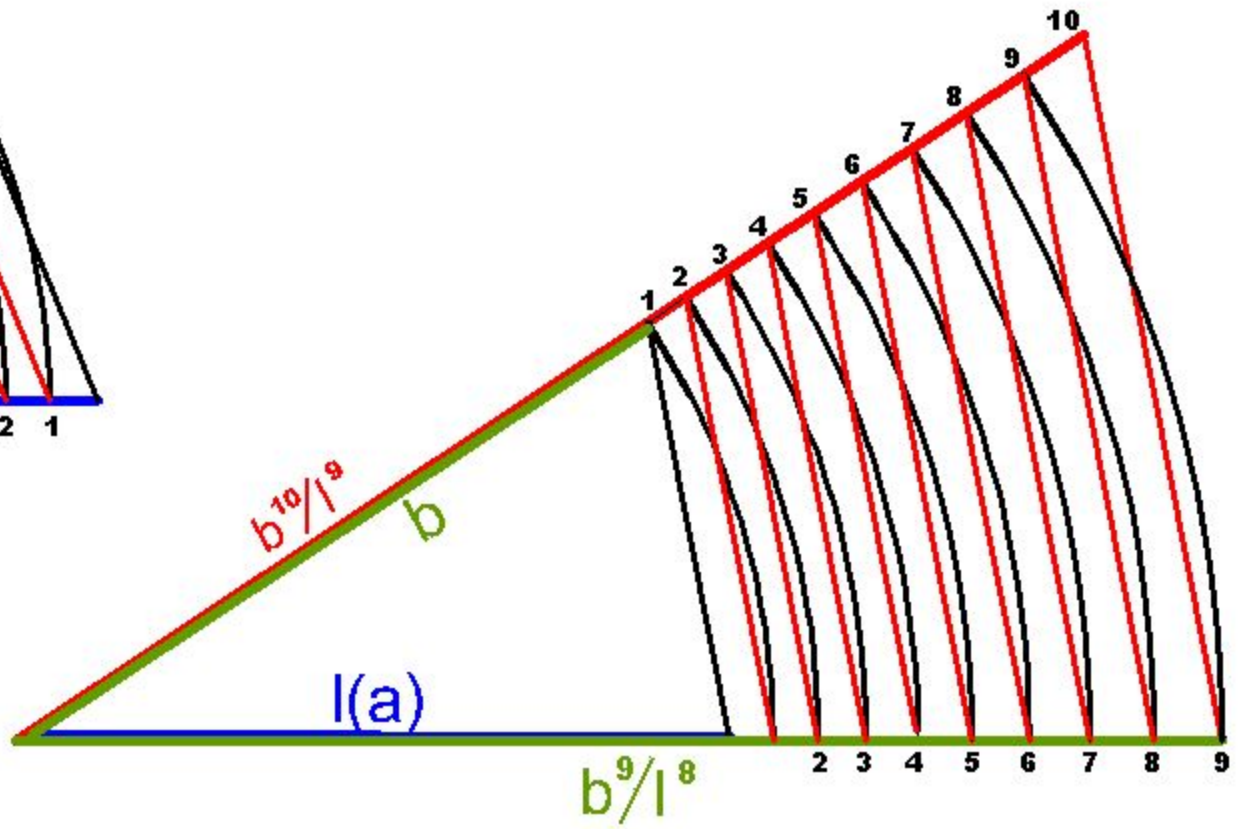
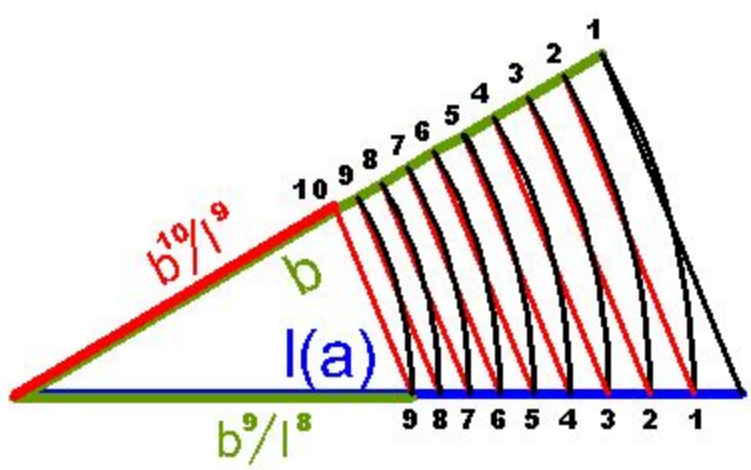
a(l)

b < a



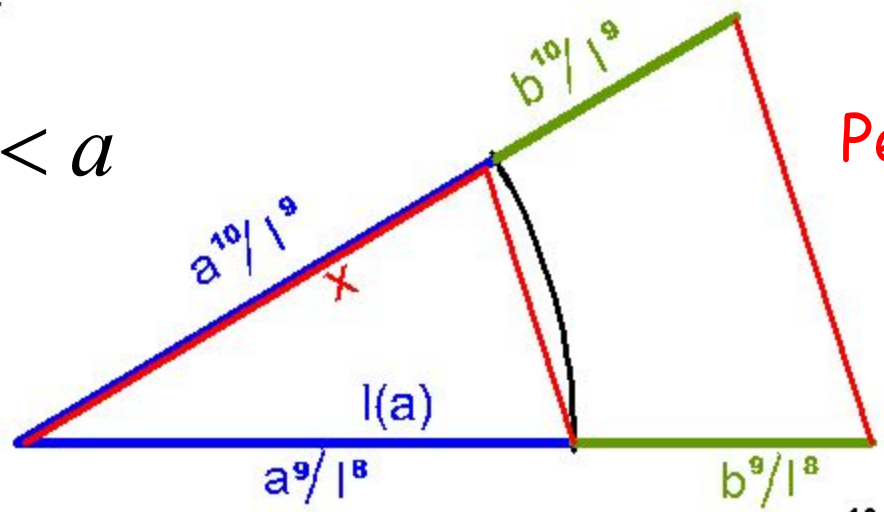
a(l)

b > a



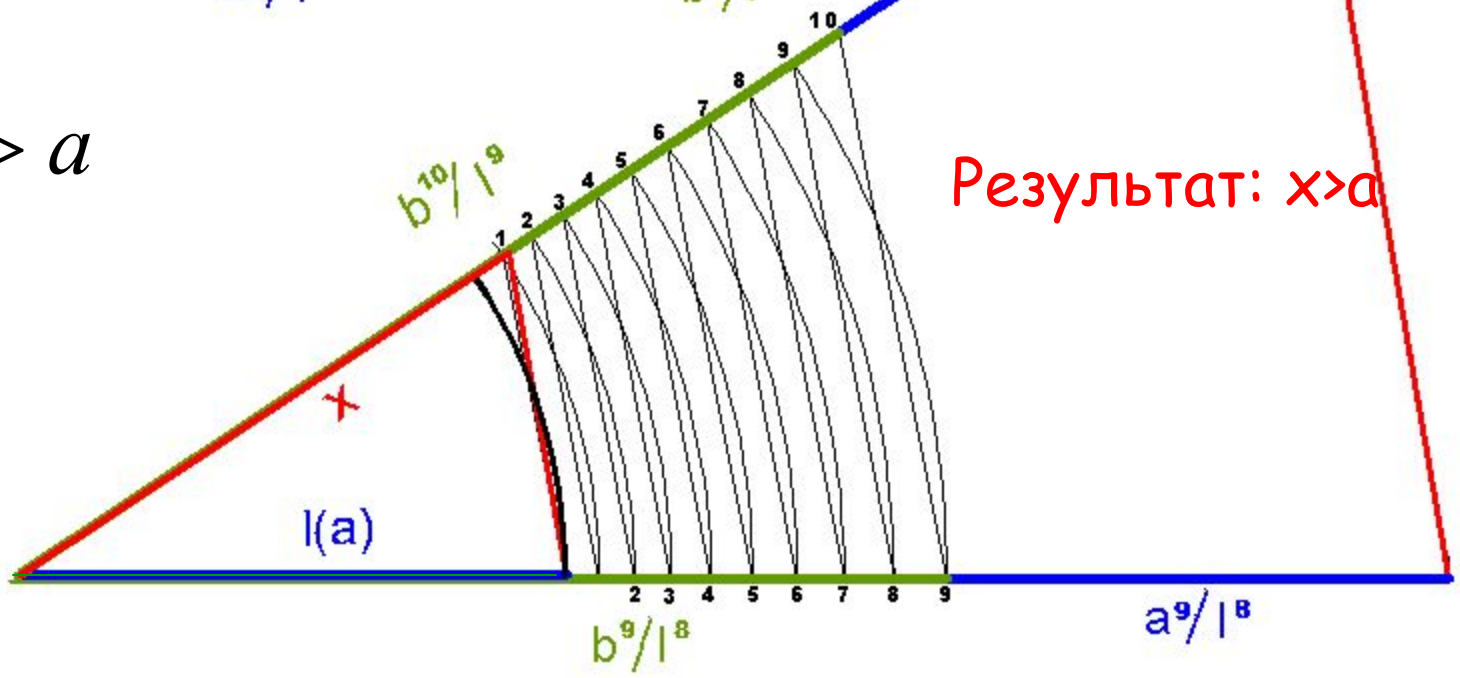
$$x = \frac{a^{10} + b^{10}}{a^9 + b^9}$$

$b < a$



Результат:  $x < a$

$b > a$



Результат:  $x > a$



# Задача 6.

Условие: По заданным отрезкам  $a$ ,  $b$ ,  $c$  и  $d$  построить отрезок, заданный формулой  $x = \sqrt[4]{abcd}$

Решение:

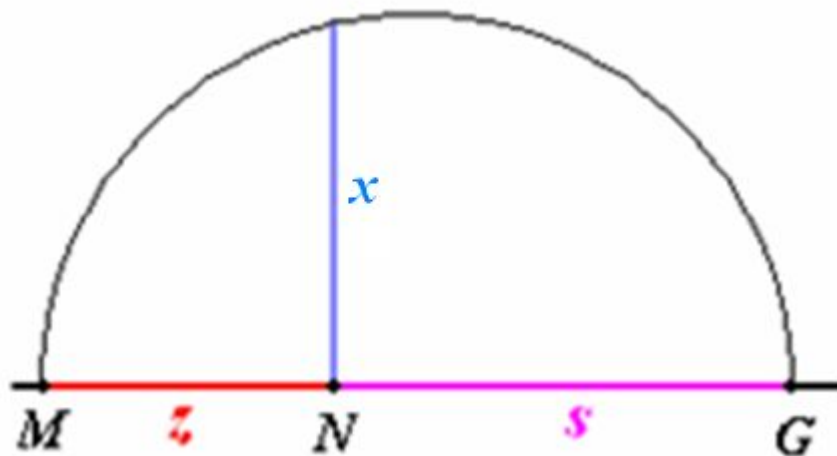
$$x = \sqrt[4]{abcd} = \sqrt[4]{ab} * \sqrt[4]{cd} = \sqrt{\sqrt{ab}} * \sqrt{\sqrt{cd}}$$
  
Производим замену переменных:

$$\sqrt{ab} = z(1)$$

$$\sqrt{cd} = s(2)$$

Получаем:

$$x = \sqrt{zs}(3)$$





## Задача 8

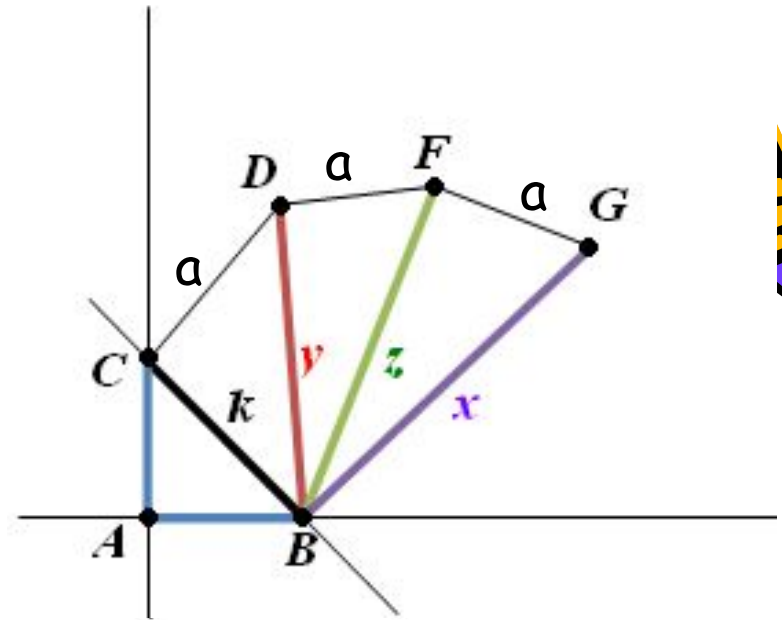
Условие: По данному отрезку  $a$  построить отрезок, заданный формулой  $x = a\sqrt{5}$

Решение:

Откладываем на одной стороне прямой отрезок  $a=AC$ , проводим перпендикуляр и на нем откладываем отрезок  $a=AB$ . Соединяем два конца отрезков и получаем  $z$ , равный  $a\sqrt{2}$  (по теореме Пифагора). И так повторить 4 раза.

Получаем:

$$x = a\sqrt{5}$$



$$k = a\sqrt{2}$$

$$y = \sqrt{(a\sqrt{2})^2 + a^2} = a\sqrt{3}$$

$$z = \sqrt{(a\sqrt{3})^2 + a^2} = a\sqrt{4}$$

$$x = \sqrt{(a\sqrt{4})^2 + a^2} = a\sqrt{5}$$



# Задача 10.

Условие: По данному отрезку  $a$  и острому углу  $L$  построить отрезок, заданный формулой

$$z = a \times \sqrt{\sin L}$$

Решение:

$$z = a \times \sqrt{\sin L} = \sqrt{a \times a \times \sin L} =$$

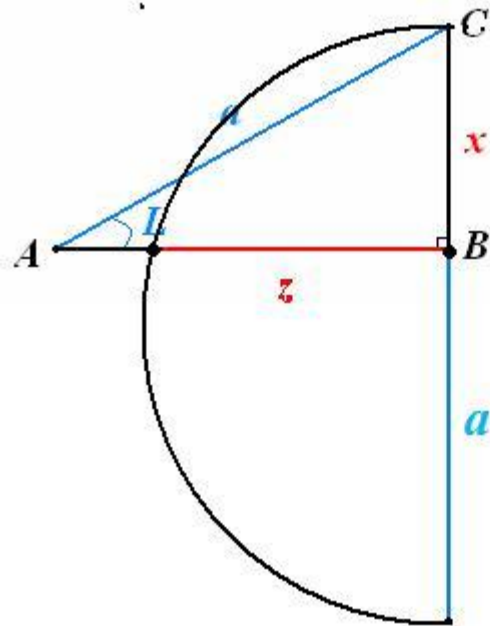
$= \sqrt{ax}, x = a \sin L$   
Строим прямоугольный

треугольник  $ABC$  с острым углом  $L$  и гипотенузой  $a$ . Тогда

$$\sin L = \frac{CB}{AB} = \frac{CB}{a}$$

$$x = a \times \sin L = a \times \frac{CB}{a} = CB$$

$$z = \sqrt{a \times x}$$





## Заключение

В процессе работы над проектом мы научились разлагать заданные формулы для длины искомого отрезка на элементарные составляющие, по которым легко выполнять построения, используя теорему Фалеса, Пифагора или пропорциональные отрезки в прямоугольном треугольнике, освоили приемы построения в процессе решения конкретных задач и подтвердили гипотезу, что можно построить отрезки, заданные многими формулами. Думаем, что этот опыт пригодится нам при поиске решения разных задач, а сам проект можно демонстрировать на уроках геометрии.

