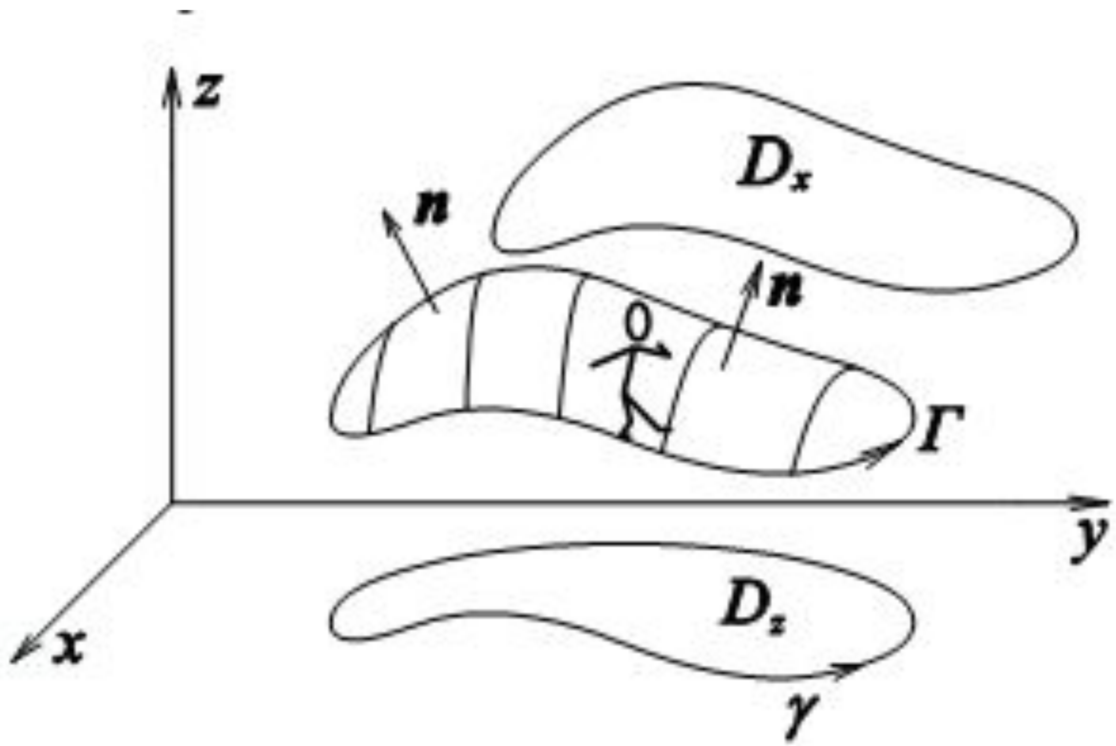
Лекция 3.4.

Теорема (формула Стокса):

Пусть область $\Omega \subset R^2 -$ замкнутая, ограниченная и выпуклая, $\partial\Omega -$ кусочно $-$ гладкая, простая, замкнутая, невырожденная кривая; $\bar{\varphi}: \Omega \to R^3, \bar{\varphi} \in C^1(\Omega)$, $P, Q, R \in C^1(S)$, пусть направление обхода на ∂S и нормаль к S согласованы с параметризацией; тогда:

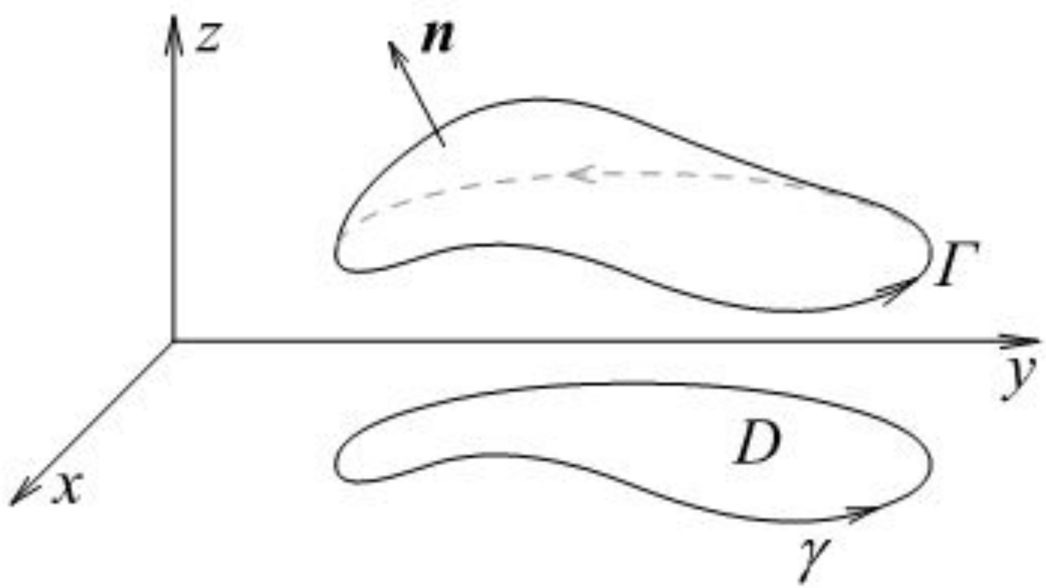
$$\oint_{\partial S} P dx + Q dy + R dz = \iint_{S^{(\bar{n})}} \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) dy\, dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) dz\, dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\, dy$$

Согласованной ориентацией называется такая, что при обходе края поверхности в этом направлении с выбранной нормалью, поверхность остается слева.



Пусть $P(x,y,z)$ задана и непрерывна на Φ и имеет там непрерывные частные производные $\frac{\partial P}{\partial y},\frac{\partial P}{\partial z}$. Тогда имеет место равенство

$$\oint_{\Gamma} P dx = \iint_{\Phi} \frac{\partial P}{\partial z} dz\, dx - \frac{\partial P}{\partial y} dx\, dy$$



Ротор поля $\boldsymbol{V} = (P, Q, R)$ определяется по формуле

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{V} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}.$$

$$d\boldsymbol{s} = (dx, dy, dz)$$

$$\int\limits_{\Gamma} (\boldsymbol{V}, d\boldsymbol{s}) = \iint\limits_{\Phi} (\mathrm{rot}\boldsymbol{V}, d\boldsymbol{S})$$

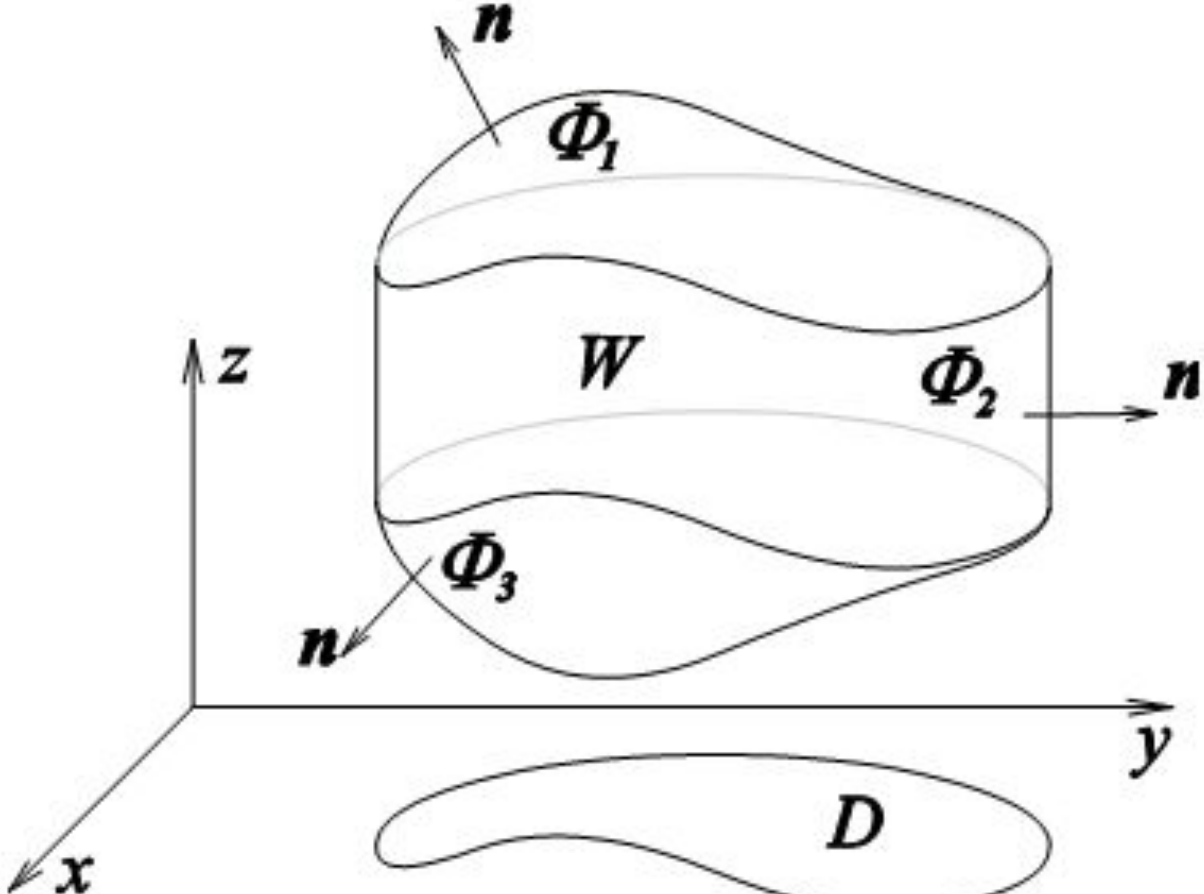
Теорема (формула Гаусса-Остроградского):

Пусть W − замкнутая, ограниченная, выпуклая область в R^3,
∂W − кусочно − гладкая невырожденная поверхность,
$P, Q, R \in C^1(V)$,
пусть задана внешняя нормаль $\bar{n}$ к W; тогда:

$$\oiint\limits_{\partial W^{(\bar{n})}} P\,dy\,dz + Q\,dz\,dx + R\,dx\,dy$$

$$= \iiint\limits_{W} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dx\,dy\,dz$$

$$\oiint\limits_{\partial W^{(\overline{n})}} R\, dx\, dy = \iiint\limits_{W} \frac{\partial R}{\partial z} dx\, dy\, dz$$



Дивергенция векторного поля определяется по формуле $div\,\boldsymbol{V} = \dfrac{\partial P}{\partial x} + \dfrac{\partial Q}{\partial y} + \dfrac{\partial R}{\partial z}$

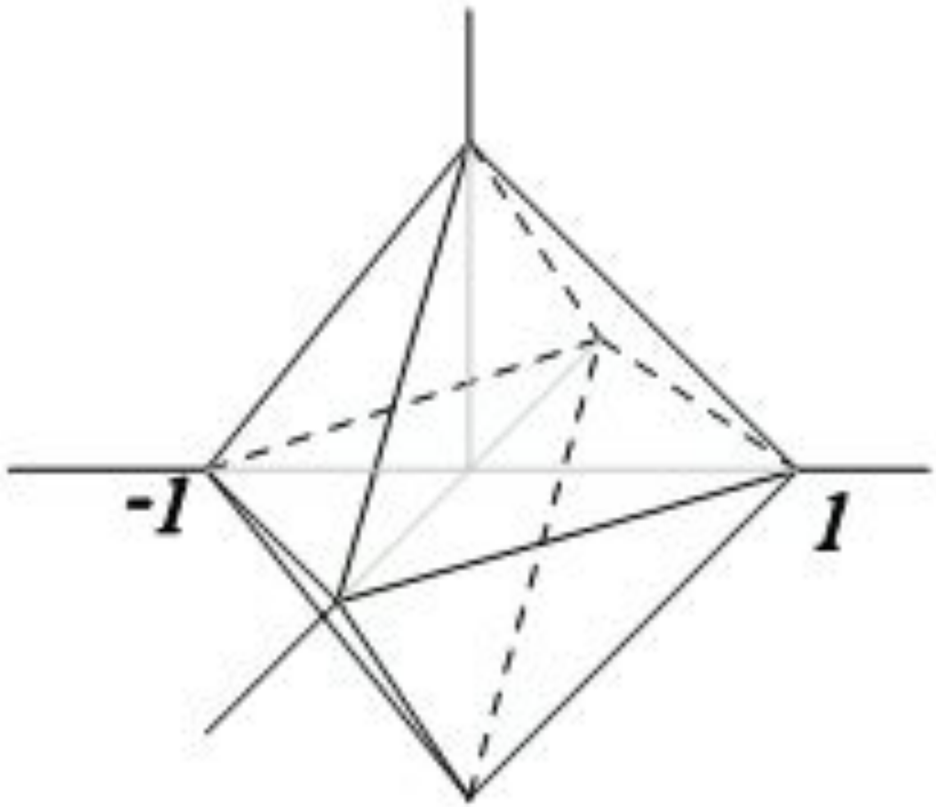
$$\iiint\limits_{W} div\boldsymbol{V}dW = \iint\limits_{\partial W} (\boldsymbol{V}, d\boldsymbol{S}).$$

Пример. Вычислить

$$\iint\limits_{\Phi} (x-y+z)dydz + (y-z+x)dzdx + (z-x+y)dxdy$$

где Ф :

$$|x-y+z| + |y-z+x| + |z-x+y| = 1.$$


-1
1

Числовые ряды

Определение: Возьмём последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ и построим по ней ещё одну последовательность

$$\left\{S_k = \sum_{n=1}^{k} a_n\right\}_{k=1}^{\infty}$$

Пара последовательностей $(\{a_n\}_{n=1}^{\infty}, \{S_k\}_{k=1}^{\infty})$ называется *числовым рядом* и обозначается

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

a_n – общий член ряда, n-й член ряда; S_k – k-я частичная сумма ряда

$r_m = \sum_{n=m}^{\infty} a_n$ – m – й остаток исходного ряда.

Определение: Числовой ряд сходится, если $\exists \lim\limits_{k\to\infty} S_k = S$.

Утверждение: Пусть с $\in R, c \neq 0$. Тогда:

$$c \cdot \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} c \cdot a_n$$

Утверждение: Пусть ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходятся.

Тогда сходится ряд $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$, и

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

Теорема (необходимый признак сходимости ряда):

Если ряд $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ сходится

Если $|q| < 1$, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} q^k$ сходится.

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}$ расходится.

Утверждение:

Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то сходится и любой его остаток

$\sum_{n=m}^{\infty} a_n$.

Если какой –

то остаток $\sum_{n=m}^{\infty} a_n$ сходится, то сходится и сам ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Теорема (критерий Коши сходимости числового ряда):

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n - \text{ сходится } \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \ \exists N_\varepsilon \in N \ \ \forall\, k, m > N_\varepsilon$$

$$\left| \sum_{n=k}^{m} a_n \right| < \varepsilon$$

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ расходится, так как $\nexists \lim_{k \to \infty} \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n}$.

Знакопостоянные ряды

<u>*Определение:*</u> Если $\forall n \ \ a_n \leq 0$ или

$a_n \geq 0$, то ряд $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ называется знакопостоянным.

<u>*Утверждение:*</u>

Пусть ряд $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n -$ знакопостоянный

(для определённости $\forall n \ \ a_n \geq 0$). Тогда:

1) если $\{S_k\} -$ ограничена, то $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится.

2) если $\exists \{S_{k_m}\}_{m=1}^{\infty}$ такая, что $\exists \displaystyle\lim_{m\to\infty} S_{k_m} = S$, то $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$.

Теорема (признак сравнения, признак Вейерштрасса):

Пусть $a_n \geq 0$, $b_n \geq 0$ $\forall n \in N$ и пусть $a_n \leq b_n$ $\forall n \in N$. Тогда:

1) если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n -$ расходится, то и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ расходится.

2) если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n -$ сходится, то и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится.

Следствие (признак сравнения в предельной форме):

Пусть даны два ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, $a_n \geq 0$, $b_n \geq 0$.

Если $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = k > 0$, то ряды сходятся или расходятся одновременно.

Примеры:

1) при $\alpha < 1$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ расходится, так как $\frac{1}{n^{\alpha}} > \frac{1}{n}$.

2) $\forall n \geq 2 \quad \frac{1}{n^2} < \frac{1}{n(n-1)} \quad \to \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ – сходится.