

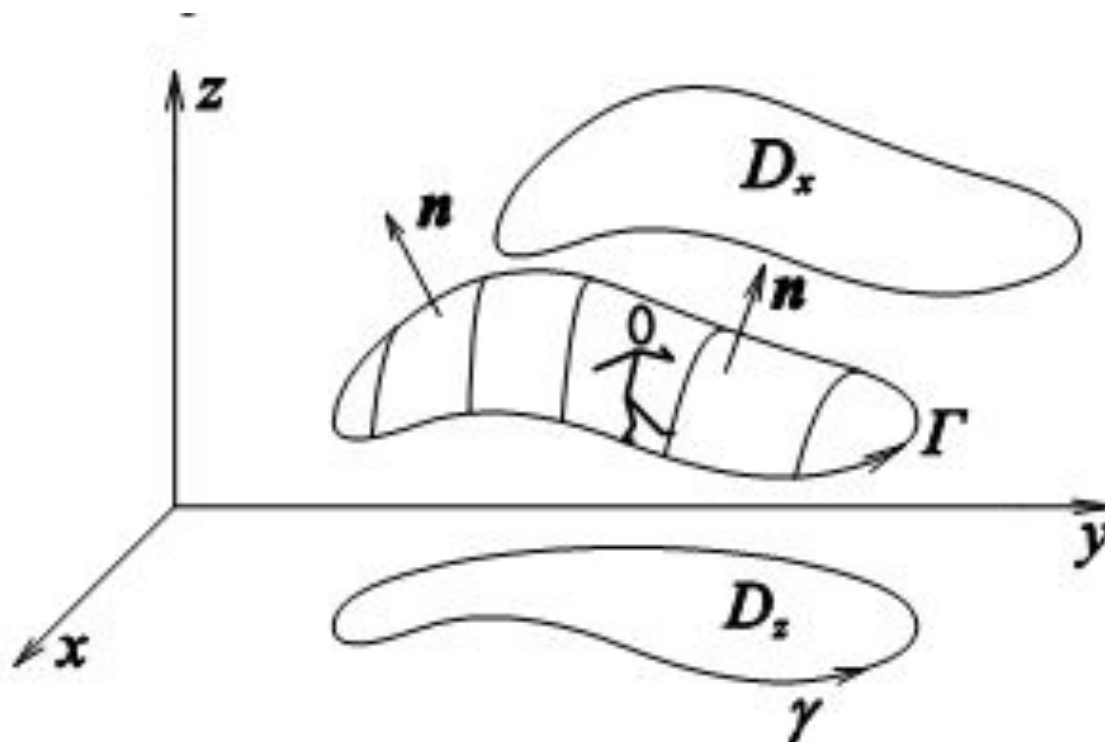
Лекция 3.4.

Теорема (формула Стокса):

Пусть область $\Omega \subset R^2$ – замкнутая, ограниченная и выпуклая, $\partial\Omega$ – кусочно – гладкая, простая, замкнутая, невырожденная кривая; $\bar{\varphi}: \Omega \rightarrow R^3$, $\bar{\varphi} \in C^1(\Omega)$, $P, Q, R \in C^1(S)$, пусть направление обхода на ∂S и нормаль к S согласованы с параметризацией; тогда:

$$\begin{aligned} & \oint_{\partial S} P dx + Q dy + R dz \\ &= \iint_{S(\bar{n})} \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dy dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dz dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy \end{aligned}$$

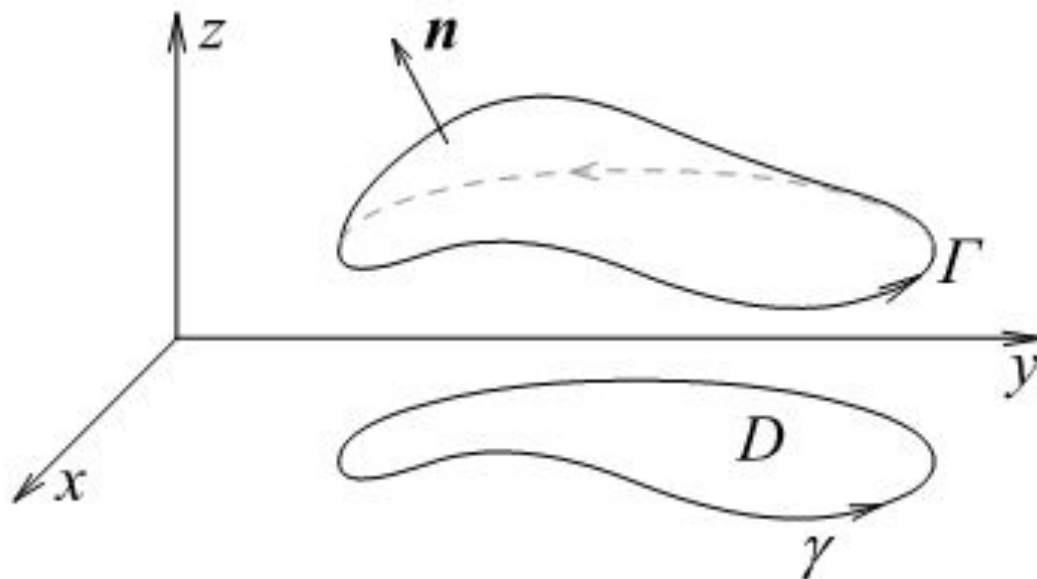
Согласованной ориентацией называется такая, что при обходе края поверхности в этом направлении с выбранной нормалью, поверхность остается слева.



Пусть $P(x, y, z)$ задана и непрерывна на Φ и имеет там непрерывные частные производные $\frac{\partial P}{\partial y}, \frac{\partial P}{\partial z}$. Тогда имеет место

равенство

$$\oint_{\Gamma} P dx = \iint_{\Phi} \frac{\partial P}{\partial z} dz dx - \frac{\partial P}{\partial y} dx dy$$



Ротор поля $\mathbf{V} = (P, Q, R)$ определяется по формуле

$$\operatorname{rot}\mathbf{V} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}.$$
$$d\mathbf{s} = (dx, dy, dz)$$

$$\int_{\Gamma} (\mathbf{V}, d\mathbf{s}) = \iint_{\Phi} (\operatorname{rot}\mathbf{V}, d\mathbf{S})$$

Теорема (формула Гаусса-Остроградского):

Пусть W – замкнутая, ограниченная, выпуклая область в R^3 ,

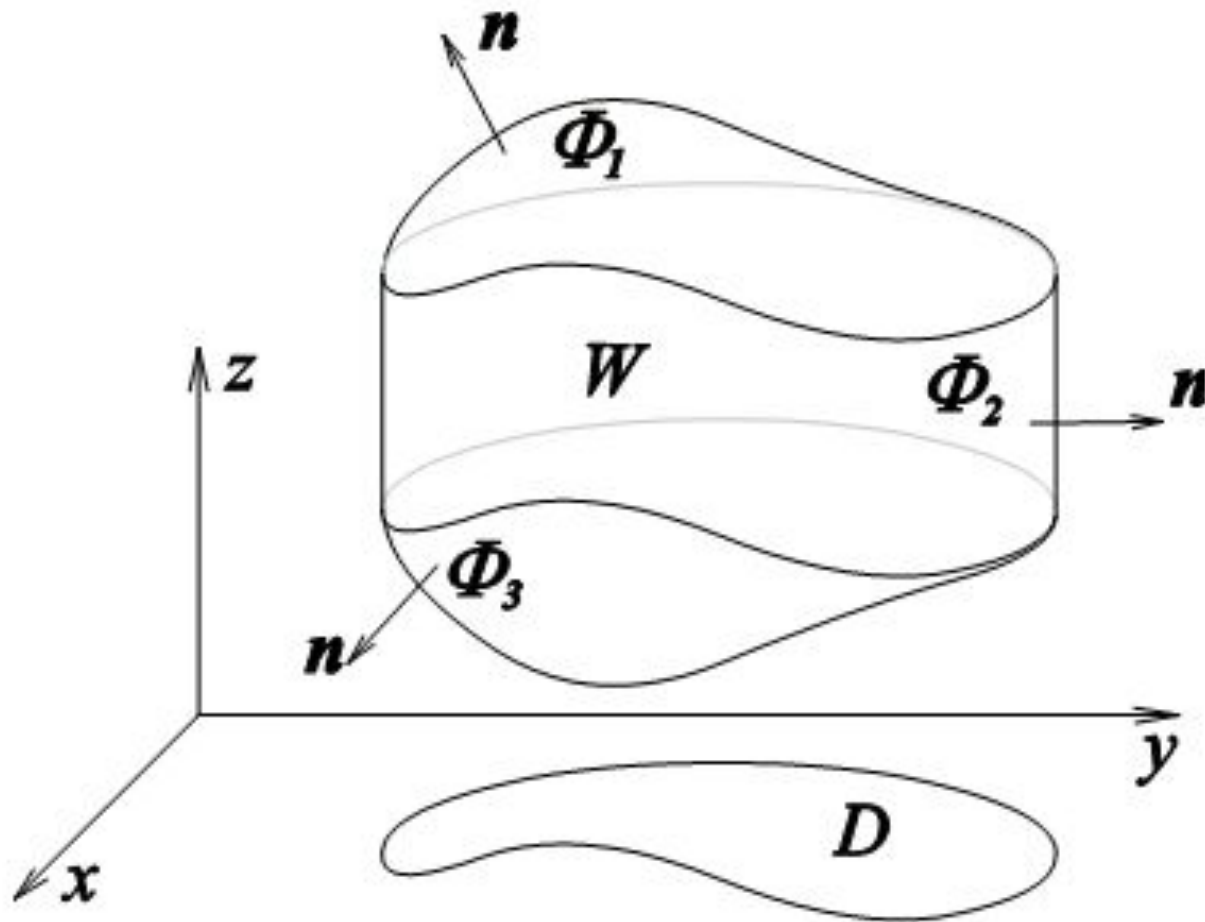
∂W – кусочно – гладкая невырожденная поверхность,

$$P, Q, R \in C^1(V),$$

пусть задана внешняя нормаль \bar{n} к W ; тогда:

$$\begin{aligned} & \iint_{\partial W(\bar{n})} P \, dy \, dz + Q \, dz \, dx + R \, dx \, dy \\ &= \iiint_W \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx \, dy \, dz \end{aligned}$$

$$\oiint_{\partial W(\bar{n})} R \, dx \, dy = \iiint_W \frac{\partial R}{\partial z} \, dx \, dy \, dz$$



Дивергенция векторного поля определяется по

$$\text{формуле } \operatorname{div} \mathbf{V} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

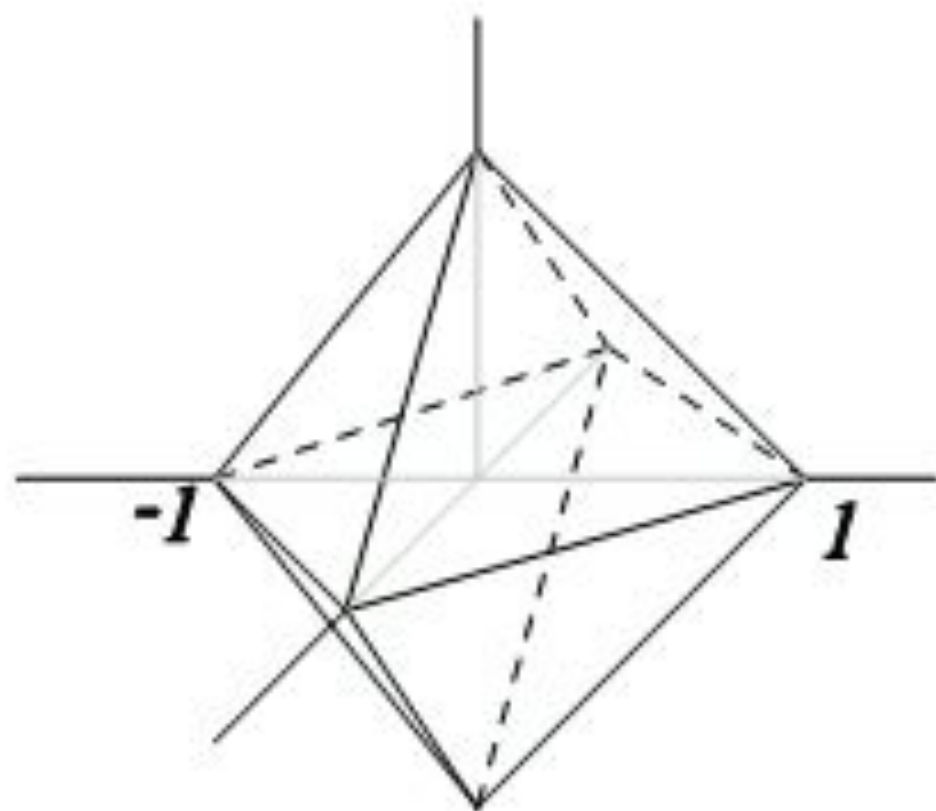
$$\iiint_W \operatorname{div} \mathbf{V} dW = \iint_{\partial W} (\mathbf{V}, d\mathbf{S}).$$

Пример. Вычислить

$$\iint_{\Phi} (x - y + z) dydz + (y - z + x) dzdx + (z - x + y) dxdy$$

где Φ :

$$|x - y + z| + |y - z + x| + |z - x + y| = 1.$$



Числовые ряды

Определение: Возьмём последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ и построим по ней ещё одну последовательность

$$\left\{ S_k = \sum_{n=1}^k a_n \right\}_{k=1}^{\infty}$$

Пара последовательностей $(\{a_n\}_{n=1}^{\infty}, \{S_k\}_{k=1}^{\infty})$ называется *числовым рядом* и обозначается

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

a_n – общий член ряда, n -й член ряда; S_k – k -я частичная сумма ряда

$r_m = \sum_{n=m}^{\infty} a_n$ – m -й остаток исходного ряда.

Определение: Числовой ряд сходится, если $\exists \lim_{k \rightarrow \infty} S_k = S$.

Утверждение: Пусть $c \in \mathbb{R}, c \neq 0$. Тогда:

$$c \cdot \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} c \cdot a_n$$

Утверждение: Пусть ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходятся.

Тогда сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$, и

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

Теорема (необходимый признак сходимости ряда):

Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ сходится

Если $|q| < 1$, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} q^k$ сходится.

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}$ расходится.

Утверждение:

Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то сходится и любой его остаток

$$\sum_{n=m}^{\infty} a_n .$$

Если какой –

то остаток $\sum_{n=m}^{\infty} a_n$ сходится, то сходится и сам ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Теорема (критерий Коши сходимости числового ряда):

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ — СХОДИТСЯ} \iff \forall \varepsilon > 0 \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \forall k, m > N_\varepsilon$$

$$\left| \sum_{n=k}^m a_n \right| < \varepsilon$$

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ расходится, так как $\nexists \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^k \frac{1}{n}$.

Знакопостоянные ряды

Определение: Если $\forall n \ a_n \leq 0$ или

$a_n \geq 0$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ называется знакопостоянным.

Утверждение:

Пусть ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ — знакопостоянный

(для определённости $\forall n \ a_n \geq 0$). Тогда:

1) если $\{S_k\}$ — ограничена, то $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится.

2) если $\exists \{S_{k_m}\}_{m=1}^{\infty}$ такая, что $\exists \lim_{m \rightarrow \infty} S_{k_m} = S$, то $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$.

Теорема (признак сравнения, признак Вейерштрасса):

Пусть $a_n \geq 0, b_n \geq 0 \forall n \in \mathbb{N}$ и пусть $a_n \leq b_n \forall n \in \mathbb{N}$. Тогда:

1) если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ — расходится, то и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ расходится.

2) если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ — сходится, то и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится.

Следствие (признак сравнения в предельной форме):

Пусть даны два ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n, a_n \geq 0, b_n \geq 0$.

Если $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = k > 0$, то ряды сходятся или расходятся одновременно.

Примеры:

1) при $\alpha < 1$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ расходится, так как $\frac{1}{n^{\alpha}} > \frac{1}{n}$.

2) $\forall n \geq 2 \quad \frac{1}{n^2} < \frac{1}{n(n-1)} \rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} - \text{сходится.}$