

## • § 4. Формула включений-исключений. Беспорядки.

### • Теорема 1 (формула включений-исключений).

- Пусть  $A = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_m$  – конечное множество. Тогда

$$n(A) = \sum_{1 \leq i \leq m} n(A_i) - \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq m} n(A_{i_1} \cap A_{i_2}) + \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < i_3 \leq m} n(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3}) + \dots$$

$$\dots + (-1)^{k+1} \cdot \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq m} n(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k}) + \dots$$

$$\dots + (-1)^{m+1} \cdot n(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_m).$$

- **Доказательство.** Возьмем элемент  $a \in A$ .
- В число, стоящее слева, этот элемент «вносит» единицу.
- Подсчитаем, какое число соответствует элементу в правой части доказываемого равенства. Если мы докажем, что оно также равно  $1$ , то теорема будет доказана.
- Пусть  $a$  входит в  $k$  множеств
- Тогда в первое слагаемое элемент  $a$  «вносит»  $k$  единиц, во второе слагаемое

• элемент  $a$  «вносит»  $\sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq m} n(A_{i_1} \cap A_{i_2})$  единиц

$$C_k^2$$

- единиц, так как  $a$  входит во все пересечения  $A_{i_1} \cap A_{i_2}$
- такие, что  $A_{i_1}$  и  $A_{i_2}$  содержат  $a$ ;
- число таких пересечений – число 2-х элементных подмножеств  $k$ -элементного множества, т.е.  $C_k^2$
- В  $l$ -ое слагаемое  $a$  «вносит» единиц ( $l \leq k$ ). Если  $l > k$ , то  $a$  в такие пересечения уже не входит, т.е. «вносит» в эти суммы 0. Таким образом  $a$  «вносит» в правую сумму следующее количество единиц:

$$k - C_k^2 + C_k^3 + \dots + (-1)^{l+1} \cdot C_k^l + \dots + (-1)^{k+1} C_k^k$$

- Чтобы доказать теорему, осталось доказать равенство

$$1 = k - C_k^2 + C_k^3 + \dots + (-1)^{l+1} C_k^l + \dots + (-1)^{k+1} C_k^k$$

- Но это равенство равносильно следующему :

$$1 - k + C_k^2 - C_k^3 + \dots + (-1)^l C_k^l + \dots + (-1)^k C_k^k = 0$$

- которое верно, так как является следствием бинома Ньютона при  $x = -1$ .
- Теорема доказана.

- Наиболее часто **формулу включений-исключений** применяют в несколько иной формулировке.
- Пусть имеется  $N$  предметов, каждый из которых может обладать или не обладать одним из свойств  $P_1, P_2, \dots, P_m$ .
- Введем следующие обозначения:
- $N(P_i)$  – **количество предметов**, которые обладают свойством  $P_i$ ,
- $N(\bar{P}_i)$  – **количество предметов**, которые не обладают свойством  $P_i$ , причем не важно, обладают они или нет другими свойствами,
- $N(P_{i_1}, \bar{P}_{i_2}, \bar{P}_{i_3})$  – **количество предметов**, которые обладают свойствами  $P_{i_1}$  и не обладают свойствами  $P_{i_2}, P_{i_3}$  и т. п.

• Теорема 2.

$$N(\overline{P}_1, \overline{P}_2, \dots, \overline{P}_m) = N - \sum_{1 \leq i \leq m} N(P_i) + \dots +$$

$$(-1)^k \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq m} N(P_{i_1}, P_{i_2}, \dots, P_{i_k}) + \dots + (-1)^m N(P_1, P_2, \dots, P_m)$$

**Пример.** Вычислить количество натуральных чисел, не превосходящих  $100$ , которые не делятся на  $2$ ,  $3$ ,  $5$ .

**Решение.**  $N = 100$ .

- Обозначим через  $N(2)$  количество чисел из  $N$ , которые делятся на  $2$  и далее аналогично. Тогда
- $N(2) = 50$ ,  $N(3) = 33$ ,  $N(5) = 20$ ,  
 $N(2,5) = N(10) = 10$ ,  $N(2,3) = N(6) = 16$ ,
- $N(3,5) = N(15) = 6$ ,  $N(2,3,5) = N(30) = 3$ .

По формуле включений-исключений получаем:

$$N = 100 - N(2) - N(3) - N(5) + N(2,3) + N(3,5) + N(2,5) - N(2,3,5) = 100 - 50 - 33 - 20 + 16 + 10 + 6 - 3 = 32.$$



- **Определение 3.** Пусть дано множество
- $A = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ .
- Перестановка  $(k_1, k_2, \dots, k_n)$  **называется беспорядком**, если  $k_i \neq i$  для любого  $i \leq n$ , то есть каждое число не стоит на своем месте.
- **Пример.** Пусть  $A = \{1, 2, 3, 4\}$ .
- Выпишем все беспорядки:
- $(2, 1, 4, 3)$ ,  $(2, 3, 4, 1)$ ,  $(2, 4, 1, 3)$ ,  $(3, 1, 4, 2)$ ,  $(3, 4, 1, 2)$ ,  
 $(3, 4, 2, 1)$ ,  $(4, 1, 2, 3)$ ,  $(4, 3, 1, 2)$ ,  $(4, 3, 2, 1)$ .

- **Теорема 4.** Число беспорядков  $n$ -элементного множества равно

$$n! \left( 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \dots + \frac{(-1)^n}{n!} \right)$$

- **Доказательство.** Введем обозначения:
- $N(i)$  – количество перестановок, у которых на  $i$ -м месте стоит число  $i$ .
- Поскольку все остальные  $(n-1)$  числа могут стоять произвольно, то
- $N(i) = (n-1)!$  ( $i = 1, 2, 3, \dots, n$ ).
- Пусть  $N(i, j)$  – количество перестановок, в которых числа  $i$  и  $j$  стоят на  $i$ -м и  $j$ -м местах соответственно,  $N(i, j) = (n-2)!$

- Пусть  $N(i_1, i_2, \dots, i_k)$  — **КОЛИЧЕСТВО ПЕРЕСТАНОВОК**, в которых числа  $i_1, i_2, \dots, i_k$  стоят на местах с этими же номерами соответственно,
- $N(i_1, i_2, \dots, i_k) = (n - k)!$ .
- Отметим так же, что количество чисел вида  $N(i_1, i_2, \dots, i_k)$
- существует столько же, сколько существует  $k$ -элементных подмножеств  $n$ -элементного множества, то есть .
- Обозначив через  $D_n$  — количество беспорядков множества  $A$ , по формуле включений — исключений получаем:

$$\begin{aligned}
D_n &= n! - \sum_{i=1}^n N(i) + \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq n} N(i_1, i_2) + \dots + (-1)^k \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} N(i_1, i_2, \dots, i_k) + \\
&+ \dots + (-1)^n \cdot N(1, 2, 3, \dots, n) = n! - n \cdot (n-1)! + C_n^2 \cdot (n-2)! + \dots + \\
&+ (-1)^k \cdot C_n^k \cdot (n-k)! + \dots + (-1)^n \cdot C_n^n \cdot 0! = n! - \frac{n!}{1!} + \frac{n!}{2!} + \dots + \\
&+ (-1)^k \cdot \frac{n!}{k!} + \dots + (-1)^n \cdot \frac{n!}{n!} = n! \left( 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{(-1)^k}{k!} + \dots + \frac{(-1)^n}{n!} \right)
\end{aligned}$$

- **Пример.** Вернемся к предыдущему примеру. Непосредственным подсчетом мы выясним, что число беспорядков  $D_4 = 9$ . Вычислим  $D_4$ , используя полученную формулу:

$$D_4 = 4! \left( 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} \right) = 4! \left( 1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{24} \right) =$$
$$= 4! \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{24} \right) = 12 - 4 + 1 = 9$$