- **§ 4. Формула включений-исключений. Беспорядки.**

- **Теорема 1 (формула включений-исключений).**

- Пусть $A = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_m$ – конечное множество. Тогда

$$n(A) = \sum_{1 \le i \le m} n(A_i) - \sum_{1 \le i_1 < i_2 \le m} n(A_{i_1} \cap A_{i_2}) + \sum_{1 \le i_1 < i_2 < i_3 \le m} n(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3}) + \ldots$$

$$\ldots + (-1)^{k+1} \cdot \sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_k \le m} n(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k}) + \ldots$$

$$\ldots + (-1)^{m+1} \cdot n(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_m).$$

- **Доказательство.** Возьмем элемент $a \in A$.
- В число, стоящее слева, этот элемент «вносит» единицу.
- Подсчитаем, какое число соответствует элементу в правой части доказываемого равенства. Если мы докажем, что оно также равно ***1***, то теорема будет доказана.
- Пусть ***a*** входит в ***k*** множеств

$$A_{i_1}, A_{i_2}, \dots, A_{i_k}$$

- Тогда в первое слагаемое элемент ***a*** «вносит» ***k*** единиц, во второе слагаемое

$$\sum_{1 \le i_1 \angle i_2 \le m} n(A_{i_1} \cap A_{i_2})$$

- элемент ***a*** «вносит»

$$C_k^2$$

- единиц, так как ***a*** входит во все пересечения

$A_{i_1} \cap A_{i_2}$

- такие, что A_{i_1} и A_{i_2} содержат ***a***;
- число таких пересечений – число 2-х элементных подмножеств k-элементного множества, т.е. C_k^2

- В l-ое слагаемое ***a*** «вносит» единиц $(l \leq k)$. Если $l > k$, то ***a*** в такие пересечения уже не входит, те есть «вносит» в эти суммы 0. Таким образом ***a*** «вносит» в правую сумму следующее количество единиц:

$$k - C_k^2 + C_k^3 + ... + (-1)^{l+1} \cdot C_k^l + ... + (-1)^{k+1} C_k^k$$

- Чтобы доказать теорему, осталось доказать равенство

$$1 = k - C_k^2 + C_k^3 + ... + (-1)^{l+1} C_k^l + ... + (-1)^{k+1} C_k^k$$

- Но это равенство равносильно следующему :

$$1 - k + C_k^2 - C_k^3 + ... + (-1)^l C_k^l + ... + (-1)^k C_k^k = 0$$

- которое верно, так как является следствием бинома Ньютона при $x = -1$.
- Теорема доказана.

- Наиболее часто **формулу включений-исключений** применяют в несколько иной формулировке.
- Пусть имеется N предметов, каждый из которых может обладать или не обладать одним из свойств $P_1, P_2, \ldots, P_m$.
- Введем следующие обозначения:
- $N(P_i)$ – **количество предметов**, которые обладают свойством P_i,
- $N(\overline{P}_i)$ - **количество предметов**, которые не обладают свойством P_i, причем не важно, обладают они или нет другими свойствами,
- $N(P_{i_1}, \overline{P}_{i_2} \overline{P}_{i_3})$ - **количество предметов**, которые обладают свойствами P_{i_1} и не обладают свойствами P_{i_2}, P_{i_3} и т. п.

- **Теорема 2**.

$$N(\overline{P}_1, \overline{P}_2, \ldots, \overline{P}_m) = N - \sum_{1 \le i \le m} N(P_i) + \ldots +$$

$$(-1)^k \sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_k \le m} N(P_{i_1}, P_{i_2}, \ldots, P_{i_k}) + \ldots + (-1)^m N(P_1, P_2, \ldots, P_m)$$

Пример. Вычислить количество натуральных чисел, не превосходящих 100, которые не делятся на $2, 3, 5$.

Решение. $N = 100$.

- Обозначим через $N(2)$ количество чисел из N, которые делятся на 2 и далее аналогично. Тогда
- $N(2) = 50$, $N(3) = 33$, $N(5) = 20$,
  $N(2,5) = N(10) = 10$, $N(2,3) = N(6) = 16$,
- $N(3,5) = N(15) = 6$, $N(2,3,5) = N(30) = 3$.

По формуле включений-исключений получаем:

$$N = 100 - N(2) - N(3) - N(5) + N(2,3) + N(3,5) + N(2,5) - N(2,3,5) = 100 - 50 - 33 - 20 + 16 + 10 + 6 - 3 = 32.$$

- **Определение 3**. Пусть дано множество
- $A = \{1, 2, 3, ..., n\}$.
- Перестановка $(к_1, к_2, ..., к_n)$ **называется беспорядком**, если $к_i \neq i$ для любого $i \leq n$, то есть каждое число не стоит на своем месте.
- **Пример.** Пусть $A = \{1, 2, 3, 4\}$.
- Выпишем все беспорядки:
- *(2,1,4,3), (2,3,4,1), (2,4,1,3), (3,1,4,2), (3,4,1,2), (3,4,2,1), (4,1,2,3), (4,3,1,2), (4,3,2,1).*

- **Теорема 4**. Число беспорядков n-элементного множества равно

$$n!\left(1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{(-1)^n}{n!}\right)$$

- **Доказательство.** Введем обозначения:
- ***N(i)*** – **количество перестановок**, у которых на *i*-м месте стоит число *i*.
- Поскольку все остальные ***(n-1)*** числа могут стоять произвольно, то
- ***N(i) = (n-1)! (i = 1, 2, 3, …, n).***
- Пусть ***N(i, j)*** – **количество перестановок**, в которых числа ***i*** и ***j*** стоят на ***i***-м и ***j***-м местах соответственно, ***N(i, j) = (n – 2)!***

- Пусть $N(i_1, i_2, ..., i_k)$ – **количество перестановок**, в которых числа $i_1, i_2, ..., i_k$ стоят на местах с этими же номерами соответственно,
- $N(i_1, i_2, ..., i_k) = (n - k)!$.
- Отметим так же, что количество чисел вида $N(i_1, i_2, ..., i_k)$
- существует столько же, сколько существует k-элементных подмножеств n-элементного множества, то есть .
- Обозначив через D_n – количество беспорядков множества A, по формуле включений – исключений получаем:

$$D_n = n! - \sum_{i=1}^{n} N(i) + \sum_{1\le i_1<i_2\le n} N(i_1, i_2) + \ldots + (-1)^k \sum_{1\le i_1<\ldots<i_k\le n} N(i_1, i_2, \ldots i_k) +$$

$$+ \ldots + (-1)^n \cdot N(1,2,3,\ldots,n) = n! - n\cdot(n-1)! + C_n^2 \cdot (n-2)! + \ldots +$$

$$+ (-1)^k \cdot C_n^k \cdot (n-k)! + \ldots + (-1)^n \cdot C_n^n \cdot 0! = n! - \frac{n!}{1!} + \frac{n!}{2!} + \ldots +$$

$$+ (-1)^k \cdot \frac{n!}{k!} + \ldots + (-1)^n \cdot \frac{n!}{n!} = n!(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{(-1)^k}{k!} + \ldots + \frac{(-1)^n}{n!})$$

- **Пример**. Вернемся к предыдущему примеру. Непосредственным подсчетом мы выясним, что число беспорядков $D_4 = 9$. Вычислим D_4, используя полученную формулу:

$$D_4 = 4!(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!}) = 4!(1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{24}) =$$

$$= 4!(\frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{24}) = 12 - 4 + 1 = 9$$