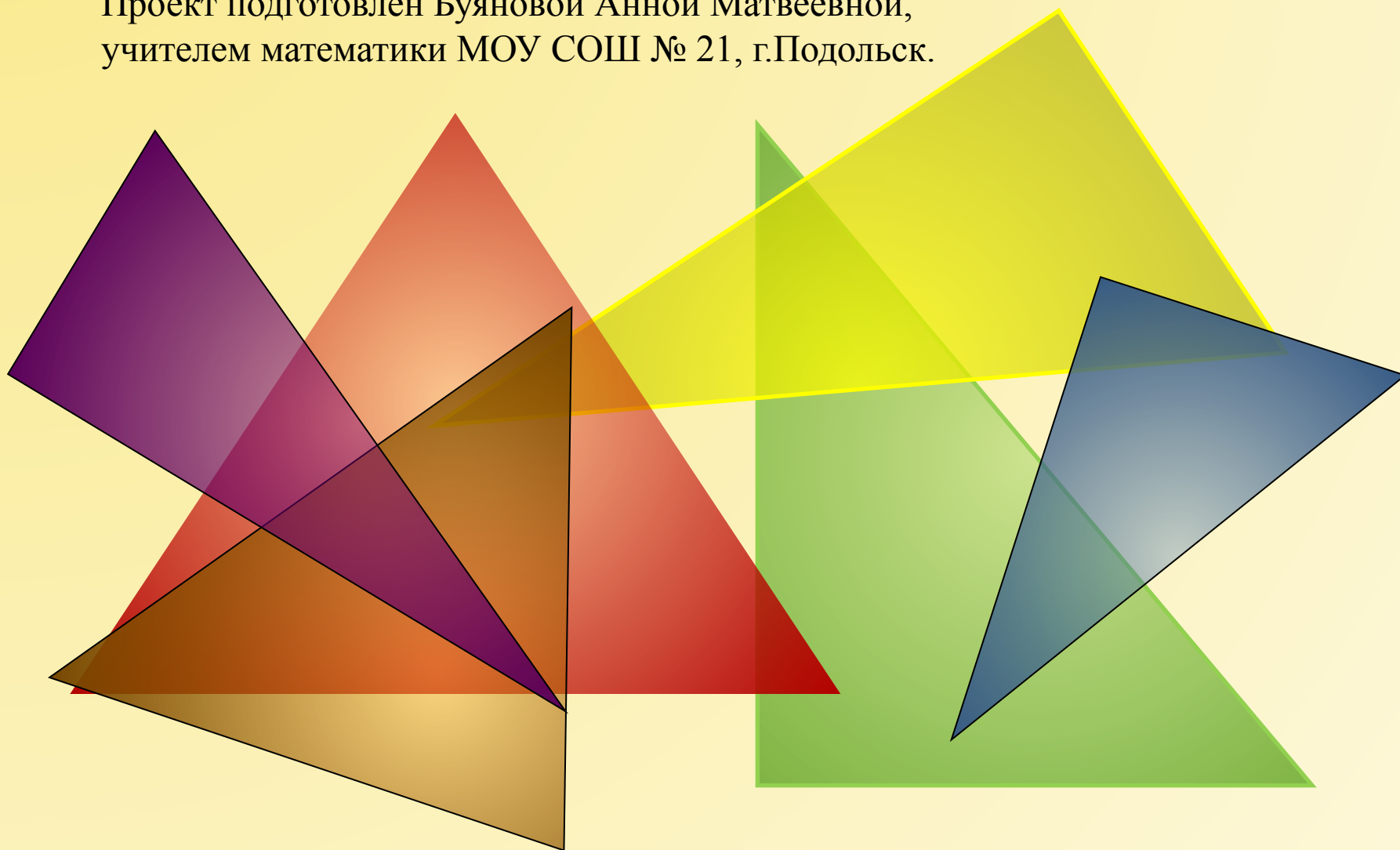
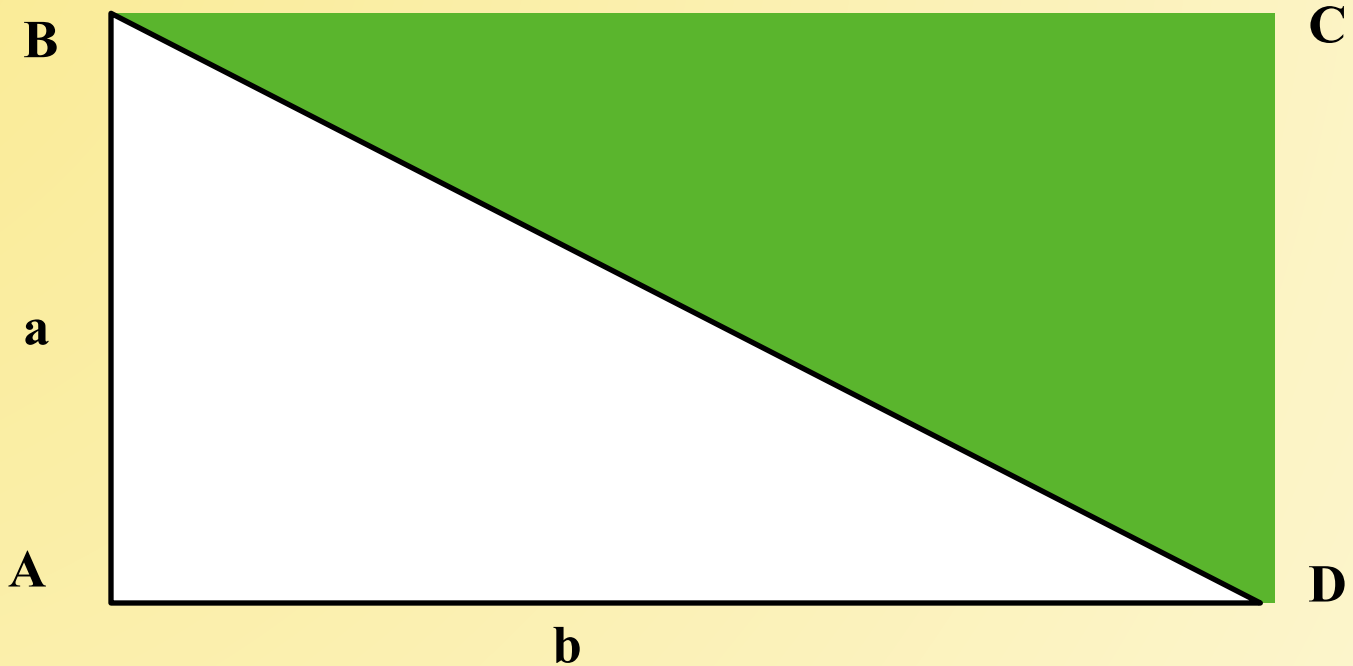


Формулы для вычисления площадей различных треугольников

Проект подготовлен Буяновой Анной Матвеевной,
учителем математики МОУ СОШ № 21, г.Подольск.



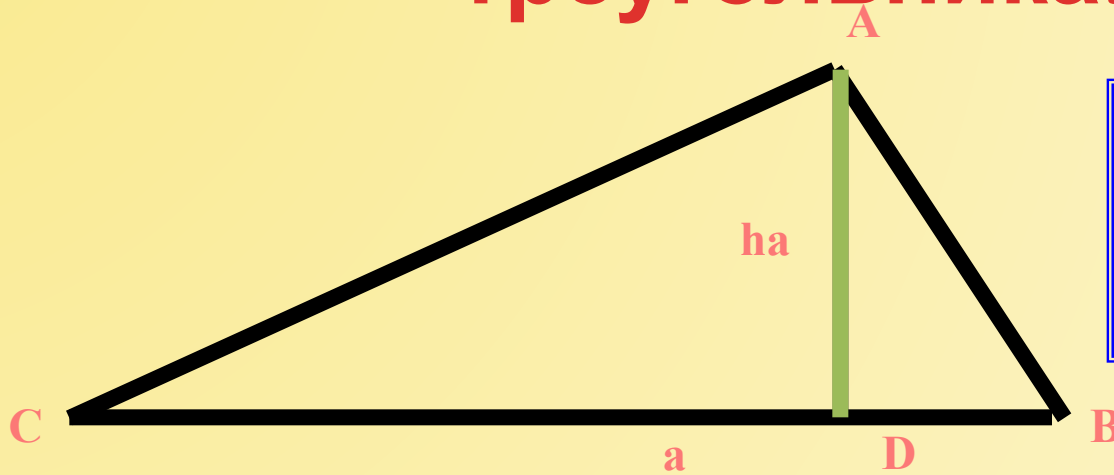
Площадь прямоугольного треугольника.



ПЛОЩАДЬ ПРЯМОУГОЛЬНОГО ТРЕУГОЛЬНИКА РАВНА
ПОЛОВИНЕ
ПРОИЗВЕДЕНИЯ КАТЕТОВ.

$$S = \frac{1}{2} ab$$

Площадь любого треугольника.

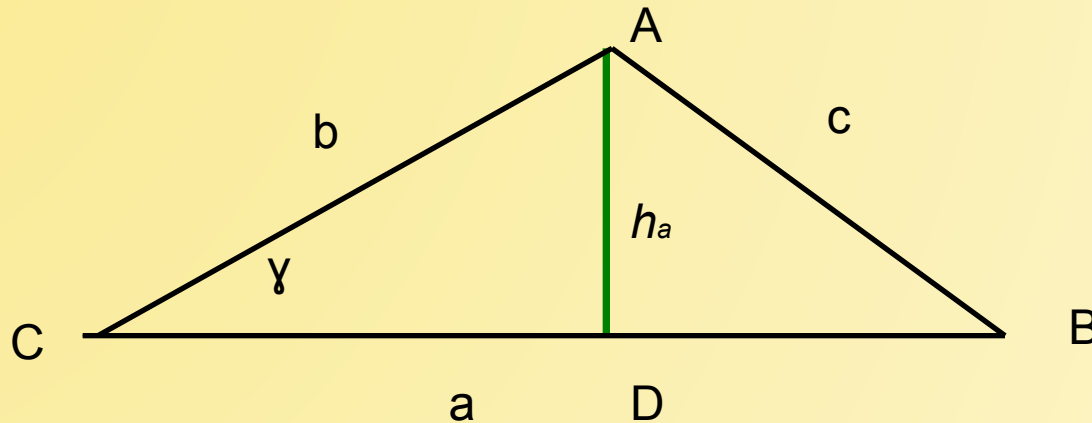


$$S = \frac{1}{2} a \cdot h_a$$

Площадь любого треугольника равна
половине произведения основания на высоту.

$$\begin{aligned} S_{ABC} &= S_{ADC} + S_{ADB} = \frac{1}{2} CD \cdot h_a + \frac{1}{2} DB \cdot h_a = \\ &= \frac{1}{2} (CD + DB) h_a = \frac{1}{2} CB \cdot h_a = \frac{1}{2} a \cdot h_a \end{aligned}$$

$$S = \frac{1}{2} ab \cdot \sin \gamma$$

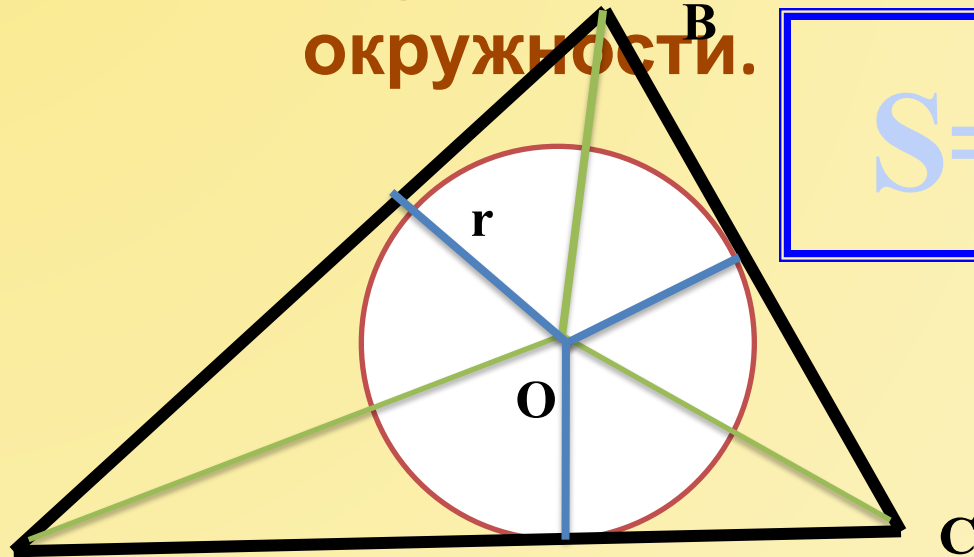


Если в треугольнике известны две стороны и угол между ними, то площадь такого треугольника можно найти, как половина произведения двух сторон на синус угла между ними.

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} a \cdot h_a, \text{ но из прямоугольного}$$

$$\text{треугольника ADC } h_a = b \cdot \sin \gamma, S_{ABC} = \frac{1}{2} ab \cdot \sin \gamma$$

Площадь треугольника
через
r-радиус вписанной
окружности.



$$S = \frac{1}{2}(a+b+c)r$$

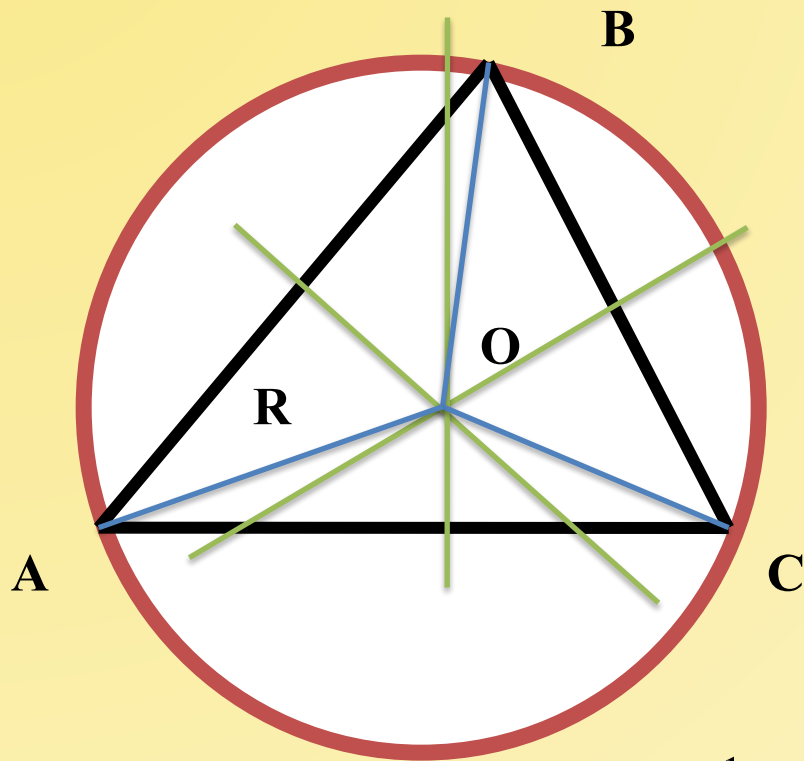
Площадь треугольника равна половине произведения его периметра на радиус вписанной окружности.

$$S_{ABC} = S_{BOC} + S_{AOB} + S_{AOC} = \frac{1}{2} AB \cdot r +$$

$$+ \frac{1}{2} AC \cdot r + \frac{1}{2} BC \cdot r = \frac{1}{2} (a+b+c) \cdot r$$

$r =$ радиус вписанной окружности.

Площадь треугольника через R-радиус описанной окружности



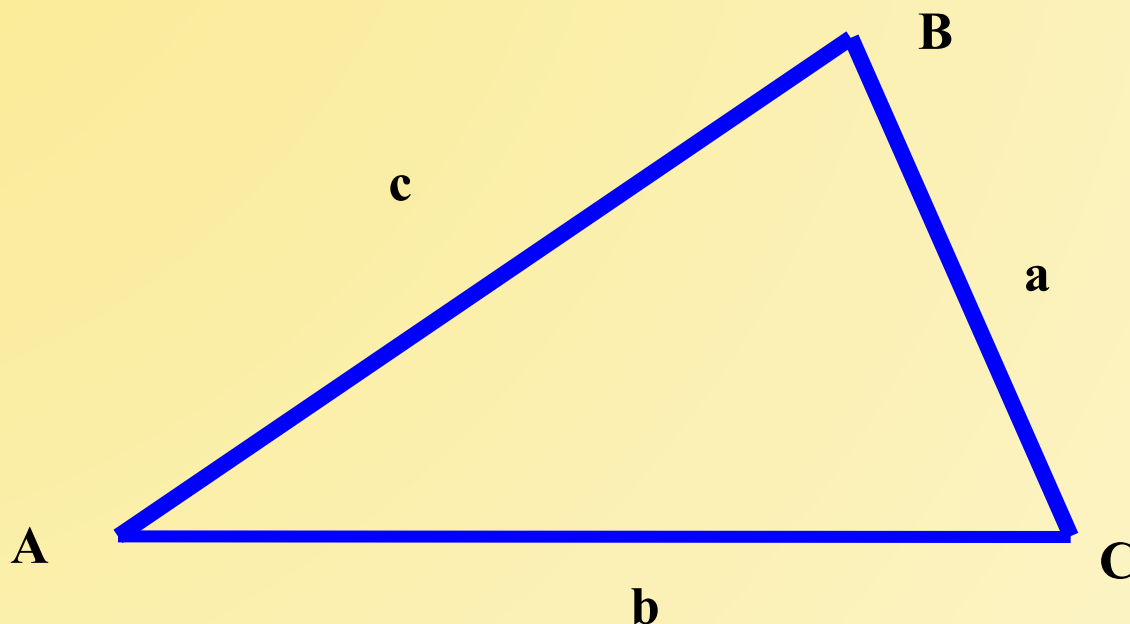
$$S = \frac{a \cdot b \cdot c}{4R}$$

Мы знаем, что $S_{ABC} = \frac{1}{2} ab \cdot \sin C$; $\sin C$ найдем из соотношения

$$\frac{c}{\sin C} = 2R; \sin C = \frac{c}{2R}, S_{ABC} = \frac{1}{2} \frac{abc}{2R} = \frac{abc}{4R}$$

Площадь треугольника равна произведению всех его сторон, деленному на четыре радиуса описанной окружности.

I формула Герона



$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

Доказательство: По теореме косинусов можно записать:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\gamma$$

$$2ab \cdot \cos\gamma = a^2 + b^2 - c^2,$$

$$\cos\gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}.$$

$$\sin^2\gamma = 1 - \cos^2\gamma = (1 - \cos\gamma)(1 + \cos\gamma) = \left(1 - \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}\right) \left(1 + \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}\right) =$$

$$= \frac{2ab - a^2 - b^2 + c^2}{2ab} \cdot \frac{2ab + a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{c^2 - (a - b)^2}{2ab} \cdot \frac{(a + b)^2 - c^2}{2ab} =$$

$$= \frac{1}{4a^2b^2} (c - a + b)(c + a - b)(a + b - c)(a + b + c).$$

Т.К. $a + b + c = 2p$

$$a + b - c = a + b + c - 2c = 2p - 2c$$

$$c + a - b = c + a + b - 2b = 2p - 2b$$

$$c - a + b = c + b + a - 2a = 2p - 2a, \quad \text{то}$$

$$\sin^2\gamma = \frac{1}{4a^2b^2} \cdot (2p - 2a)(2p - 2b)(2p - 2c) \cdot 2p = \frac{16}{4a^2b^2} (p - a)(p - b)(p - c) \cdot p =$$

$$= \frac{4}{a^2b^2} (p - a)(p - b)(p - c) \cdot p.$$

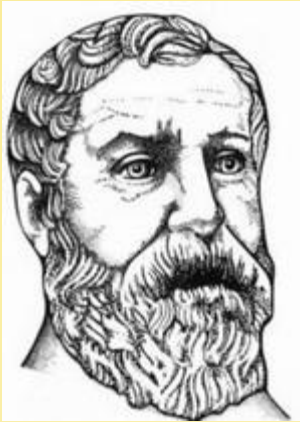
$$\sin\gamma = \frac{2}{ab} \sqrt{p \cdot (p - a)(p - b)(p - c)}.$$

$$S. = \frac{1}{2} ab \cdot \frac{2}{ab} \sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c)} = \sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c)}.$$

Ч.Т.Д.

ГЕРОН АЛЕКСАНДРИЙСКИЙ

(Heronus Alexandrinus)

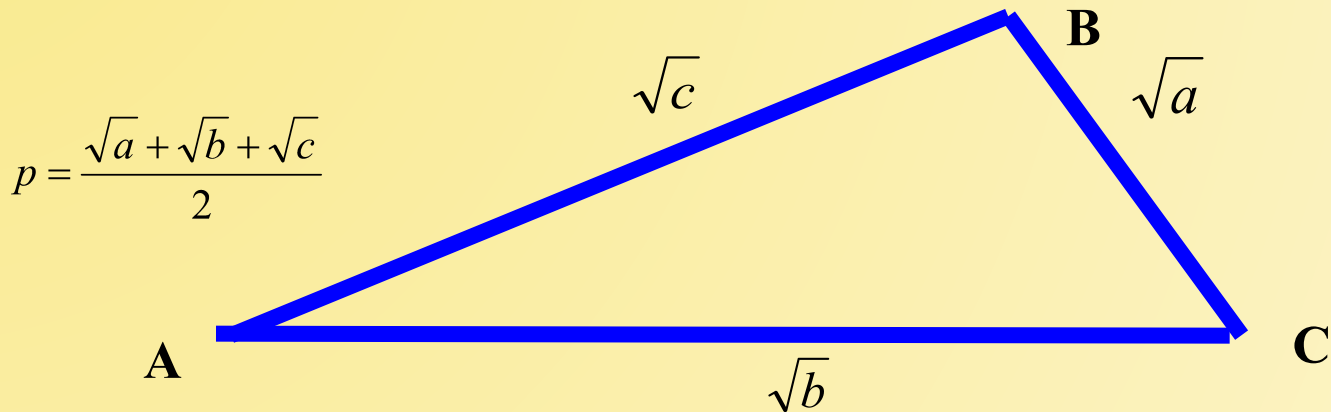


Герон Александрийский – греческий учёный, работавший в Александрии, (даты рождения и смерти неизвестны, вероятно, I – II вв. н. э.).

Математические работы Герона являются энциклопедией античной прикладной математики. В "Метрике" даны правила и формулы для точного и приближённого расчёта различных геометрических фигур, например *формула Герона* для определения площади треугольника по трём сторонам, правила численного решения квадратных уравнений и приближённого извлечения квадратных и кубических корней. В основном изложение в математических трудах Герона догматично – правила часто не выводятся, а только выясняются на примерах.

Герон занимался [геометрией](#), [механикой](#), [гидростатикой](#), [оптикой](#).

II формула Герона

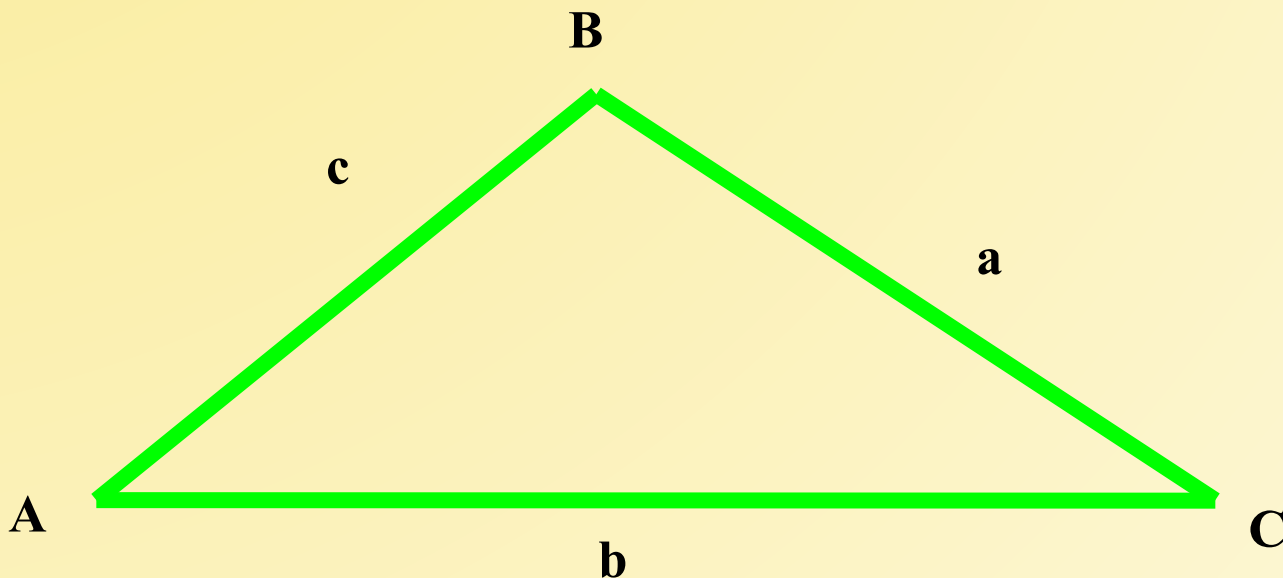


$$S = \frac{1}{4} \sqrt{4ab - (a + b - c)^2}$$

$$\begin{aligned}
 S &= \sqrt{\frac{\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}}{2} \left(\frac{\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}}{2} - \sqrt{a} \right) \left(\frac{\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}}{2} - \sqrt{b} \right) \left(\frac{\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}}{2} - \sqrt{c} \right)} = \\
 &= \frac{1}{4} \sqrt{(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c})(\sqrt{b} + \sqrt{c} - \sqrt{a})(\sqrt{a} - \sqrt{b} + \sqrt{c})(\sqrt{a} + \sqrt{b} - \sqrt{c})} = \\
 &= \frac{1}{4} \sqrt{((\sqrt{b} + \sqrt{c}) - \sqrt{a})((\sqrt{b} + \sqrt{c}) - \sqrt{a})(\sqrt{a} - (\sqrt{b} - \sqrt{c}))(\sqrt{a} + (\sqrt{b} - \sqrt{c}))} = \\
 &= \frac{1}{4} \sqrt{((\sqrt{b} + \sqrt{c})^2 - a)(a - (\sqrt{b} - \sqrt{c})^2)} = \frac{1}{4} \sqrt{(b + 2\sqrt{bc} + c - a)(a - b + 2\sqrt{bc} - c)} = \\
 &= \frac{1}{4} \sqrt{(2\sqrt{bc} + (b + c - a))(2\sqrt{bc} - (b + c - a))} = \frac{1}{4} \sqrt{4bc - (b + c - a)^2}
 \end{aligned}$$

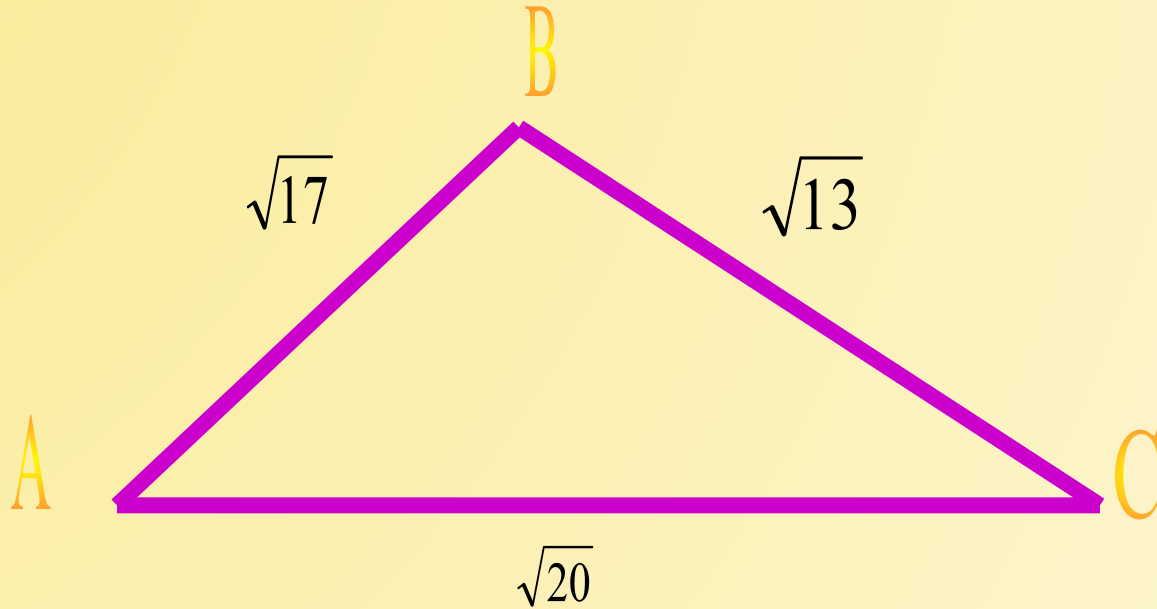
Итак, мы получили II формулу Герона. И если стороны треугольника a, b, c , то запишем ее в виде:

$$S = \frac{1}{4} \sqrt{4a^2b^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2}$$



Задача: Найти площадь треугольника со сторонами

$\sqrt{17}$, $\sqrt{20}$, $\sqrt{13}$



Решение:

$$S = \frac{1}{4} \sqrt{4a^2b^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2}$$

$$S = \frac{1}{4} \sqrt{4 \cdot 13 \cdot 20 - (13 + 20 - 17)^2} = \frac{1}{4} \sqrt{1040 - 256} = \frac{1}{4} \sqrt{784} = 7$$

Формулы медиан треугольника

$$m_a = \frac{1}{2} \sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}$$

$$m_b = \frac{1}{2} \sqrt{2a^2 + 2c^2 - b^2}$$

$$m_c = \frac{1}{2} \sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}$$

Из треугольника ACD по теореме косинусов :

$$m_a^2 = b^2 + \frac{a^2}{4} - 2b \cdot \frac{a}{2} \cdot \cos \gamma = \frac{a^2}{4} + b^2 - ab \cdot \cos \gamma$$

$$\cos \gamma = \frac{\frac{a^2}{4} + b^2 - m_a^2}{ab} = \frac{a^2 + 4b^2 - 4m_a^2}{4ab}$$

Из треугольника ABC по теореме косинусов :

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \gamma$$

$$\cos \gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

Приравнивая формулы (1) и (2) получаем :

$$a^2 + b^2 - c^2 = \frac{a^2}{2} + 2b^2 - 2m_a^2$$

$$2m_a^2 = \frac{a^2}{2} + 2b^2 - a^2 - b^2 + c^2$$

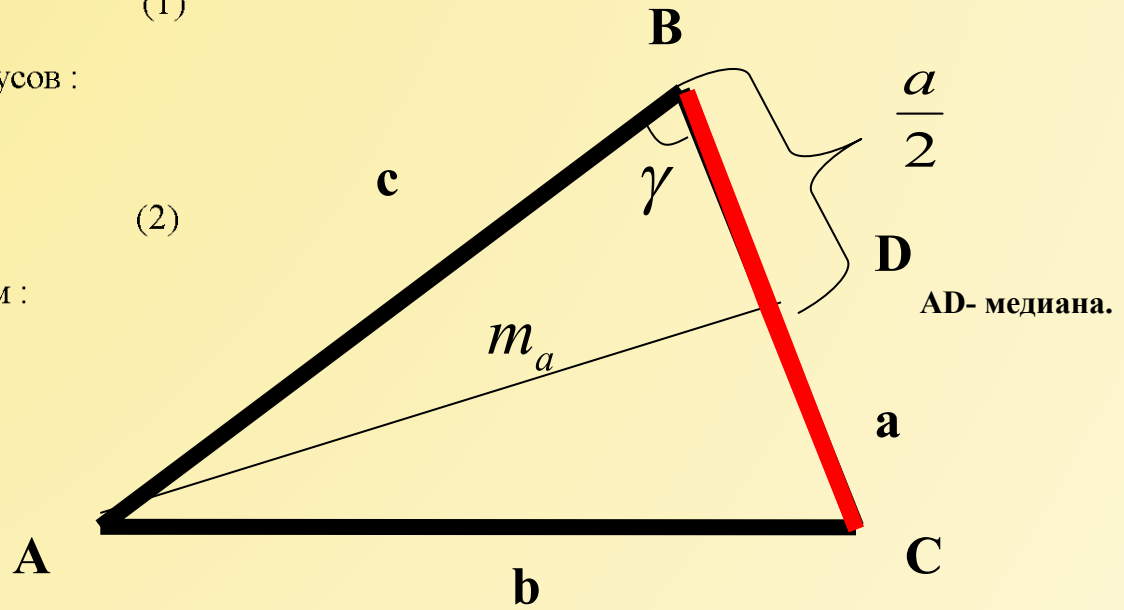
$$2m_a^2 = b^2 - \frac{a^2}{2} + c^2$$

$$m_a^2 = \frac{1}{4}(2b^2 + 2c^2 - a^2)$$

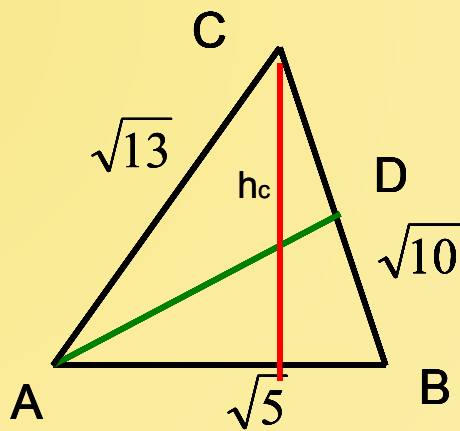
$$m_a = \frac{1}{2} \sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}$$

(1)

(2)



Ч.Т.Д.



Дано : треугольник ABC

$$c = \sqrt{5}$$

$$a = \sqrt{10}$$

$$b = \sqrt{13}$$

Найти :

1) S_{ABC} .

2) h_c .

3) $\cos B$.

4) R (радиус описанной окружности).

5) Медиану AD

По второй формуле Герона:

$$1) S = \frac{1}{4} \sqrt{4 \cdot (\sqrt{10})^2 \cdot (\sqrt{13})^2 - ((\sqrt{10})^2 + (\sqrt{13})^2 - (\sqrt{5})^2)^2} =$$

$$\frac{1}{4} \sqrt{4 \cdot 10 \cdot 13 - (10 + 13 - 5)^2} = \frac{1}{4} \sqrt{520 - 324} = \frac{1}{4} \sqrt{196} = \frac{14}{4} = \frac{7}{2} = 3,5$$

2) Проведем высоту $CK = h_c$,

$$h_c = \frac{2S}{c}; h_c = \frac{2 \cdot 3,5}{\sqrt{5}} = \frac{7}{\sqrt{5}}$$

$$3) \cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac},$$

$$\cos B = \frac{(\sqrt{10})^2 + (\sqrt{5})^2 - (\sqrt{13})^2}{2 \cdot \sqrt{10} \cdot \sqrt{5}} = \frac{10 + 5 - 13}{2 \cdot 5\sqrt{2}} = \frac{1}{5\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{10}$$

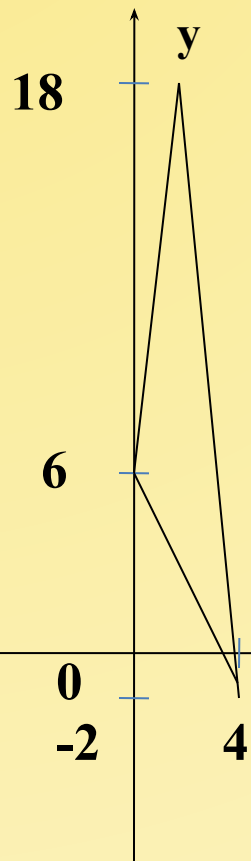
$$4) R = \frac{a \cdot b \cdot c}{4S} = \frac{\sqrt{5} \cdot \sqrt{10} \cdot \sqrt{13}}{4 \cdot 3,5} = \frac{5\sqrt{26}}{14}$$

5) Проведем медиану $AD = m_a$

$$m_a = \frac{1}{2} \sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}, \quad m_a = \frac{1}{2} \sqrt{2 \cdot (\sqrt{13})^2 + 2 \cdot (\sqrt{5})^2 - (\sqrt{10})^2} = \frac{1}{2} \sqrt{26 + 10 - 10} = \frac{\sqrt{26}}{2}$$

Площадь треугольника в системе координат

Найти площадь треугольника ABC если, A(0;6) B(4;-2) C(2;18)



Из построения видно, что треугольник ABC разносторонний, и ни одна из высот не параллельна оси координат.

$$AB = \sqrt{(4-0)^2 + (-2-6)^2} = \sqrt{80}$$

$$BC = \sqrt{(2-4)^2 + (18+2)^2} = \sqrt{404}$$

$$AC = \sqrt{(2-0)^2 + (18-6)^2} = \sqrt{4+144} = \sqrt{148}$$

Найдем площадь треугольника по II формуле Герона..

$$S = \frac{1}{4} \sqrt{4 \cdot 80 \cdot 404 - (80 + 404 - 148)^2} = \frac{1}{4} \sqrt{129280 - 112896} =$$

$$= \frac{1}{4} \sqrt{16384} = \frac{1}{4} \cdot 128 = 32$$

Как мы видим здесь очень громоздкие вычисления и без калькулятора не обойтись. Тогда **встает вопрос**. А нет ли какой-нибудь формулы попроще, чтоб посчитать площадь треугольника в прямоугольной системе координат? И вот эта формула.

Пусть вершины треугольника ABC имеют следующие координаты:

$$A(x_1; y_1), B(x_2; y_2), C(x_3; y_3)$$

$$S = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix}$$

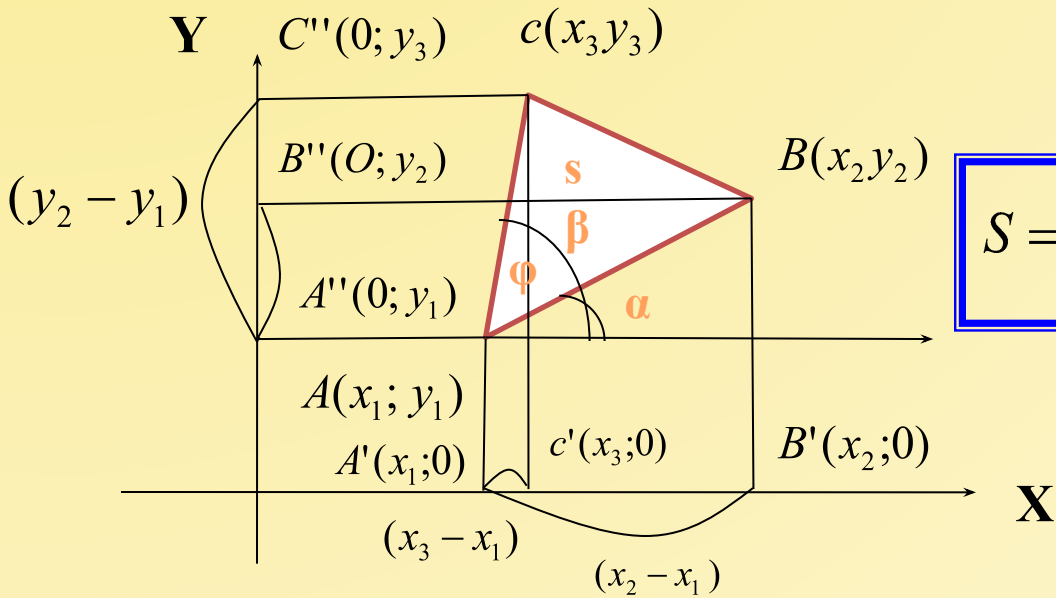
Применим эту формулу к нашему примеру.

$$S = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 4-0 & 2-0 \\ -2-6 & 18-6 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -8 & 12 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} (48 + 16) = 32.$$

Если предположить, что $x_1=y_1=0$, то получится еще более простая формула:

$$S = \frac{1}{2} |x_2 y_3 - x_3 y_2|$$

Вывод этой последней формулы приводится ниже.



$$S = \frac{1}{2} |(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)|$$

Пусть требуется найти площадь S треугольника ABC с вершинами $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$, $C(x_3; y_3)$.

Пусть $AB = c$, $AC = b$, а углы, образованные этими сторонами осью Ox , соответственно равны α и β

$$\left. \begin{aligned} A'B' = c_x = c \cos \alpha = x_2 - x_1 \\ A''B'' = c_y = c \sin \alpha = y_2 - y_1 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

$$\left. \begin{aligned} A'C' = b_x = b \cos B = x_3 - x_1 \\ A''C'' = b_y = b \sin B = y_3 - y_1 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Прямоугольная система координат на плоскости:

Пусть $\phi =$ угол CAB ; очевидно

$$\phi = \beta - \alpha$$

По известной формуле тригонометрии получаем:

$$S = \frac{1}{2} bc \sin \phi = \frac{1}{2} bc \sin(\beta - \alpha) = \frac{1}{2} bc(\sin \beta \cos \alpha - \cos \beta \sin \alpha) = \frac{1}{2}(b_y c_x - b_x c_y) \quad (3)$$

Отсюда в силу (1) (2) имеем:

$$S = \frac{1}{2} [(y_3 - y_1)(x_2 - x_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)] \quad (4)$$

Заметим, что формула (4) при ином расположении вершин может дать площадь треугольника S со знаком минус.

Поэтому формулу для площади треугольника обычно пишут в виде:

$$S = \pm \frac{1}{2} [(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)] \quad (4')$$

Где знак выбирается так, чтобы для площади получалось положительное число.

Формулу (4) можно записать в удобном для запоминания форме:

$$S = \frac{1}{2} \left| \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix} \right|$$

**Восемь формул для нахождения
площадей различных треугольников.**

$$S = \frac{1}{2} ab$$

$$S = p(p-a)(p-b)(p-c)$$

$$S = \frac{1}{2} a \cdot ha$$

$$S = \frac{1}{4} \sqrt{4a^2b^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2}$$

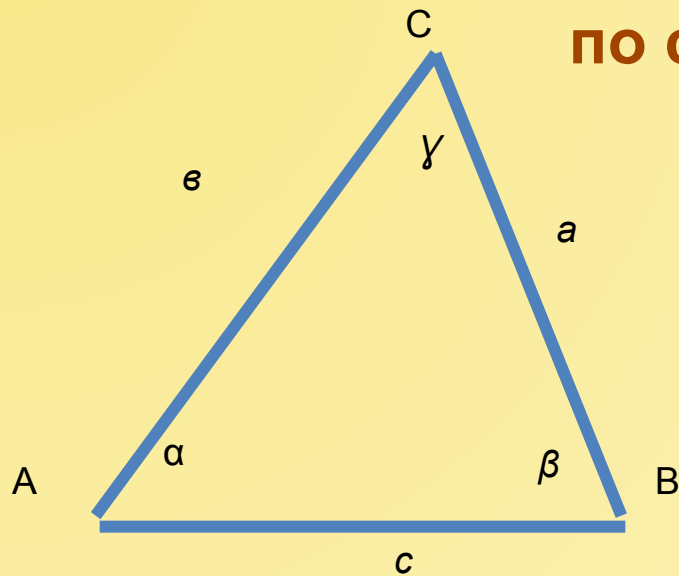
$$S = \frac{1}{2} ab \cdot \sin \gamma$$

$$S = \frac{1}{2} (a+b+c) \cdot r$$

$$S = \frac{1}{2} \left\| \begin{array}{cc} x_1 - x_0 & y_1 - y_0 \\ x_2 - x_0 & y_2 - y_0 \end{array} \right\|$$

$$S = \frac{a \cdot b \cdot c}{4R}$$

Вычисление площади треугольника по стороне и прилежащим к ней углам.



$$S = \frac{c^2 \sin \alpha \cdot \sin \beta}{2 \sin (\alpha + \beta)}$$

$$S = \frac{c^2 \sin \alpha \cdot \sin \beta}{2 \sin (\alpha + \beta)} \quad (1)$$

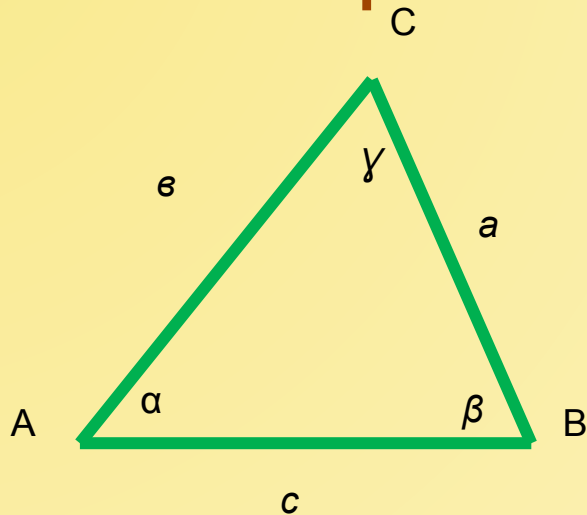
Доказательство :

$$\gamma = 180^\circ - (\alpha + \beta)$$

$$\text{Из } \frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} \text{ следует } a = c \cdot \frac{\sin \alpha}{\sin \gamma}, \quad b = c \cdot \frac{\sin \beta}{\sin \gamma}$$

$$S = \frac{1}{2} ab \cdot \sin \gamma = \frac{1}{2} c \cdot \frac{\sin \alpha}{\sin \gamma} \cdot c \cdot \frac{\sin \beta}{\sin \gamma} \cdot \sin \gamma = \frac{c^2 \cdot \sin \alpha \cdot \sin \beta}{2 \sin \gamma} = \frac{c^2 \sin \alpha \cdot \sin \beta}{2 \sin (180^\circ - (\alpha + \beta))} = \frac{c^2 \sin \alpha \cdot \sin \beta}{2 \sin (\alpha + \beta)}$$

Вычисление площади треугольника по стороне и прилежащим к ней углам.



$$S = \frac{c^2}{2(ctg\alpha + ctg\beta)}.$$

Доказательство :

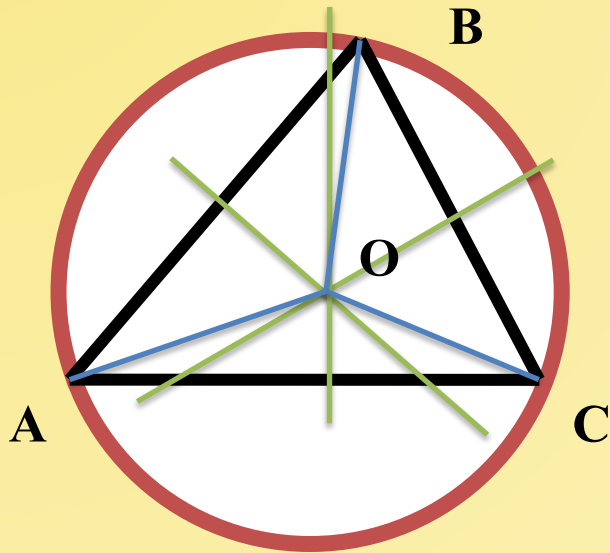
$$\begin{aligned} \text{Т.к. } \sin(\alpha + \beta) &= \sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta = \\ &= \sin \alpha \cdot \sin \beta \left(\frac{\cos \beta}{\sin \beta} + \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \right) = \sin \alpha \cdot \sin \beta (ctg\alpha + ctg\beta). \end{aligned}$$

Подставляя в формулу (1), получим :

$$S = \frac{c^2 \cdot \sin \alpha \cdot \sin \beta}{2 \sin \alpha \cdot \sin \beta (ctg\alpha + ctg\beta)} = \frac{c^2}{2(ctg\alpha + ctg\beta)}.$$

$$S = \frac{c^2}{2(ctg\alpha + ctg\beta)}.$$

Вычисление площади треугольника через все углы и радиус описанной окружности.



$$S = 2R^2 \sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \sin \gamma.$$

Доказательство :

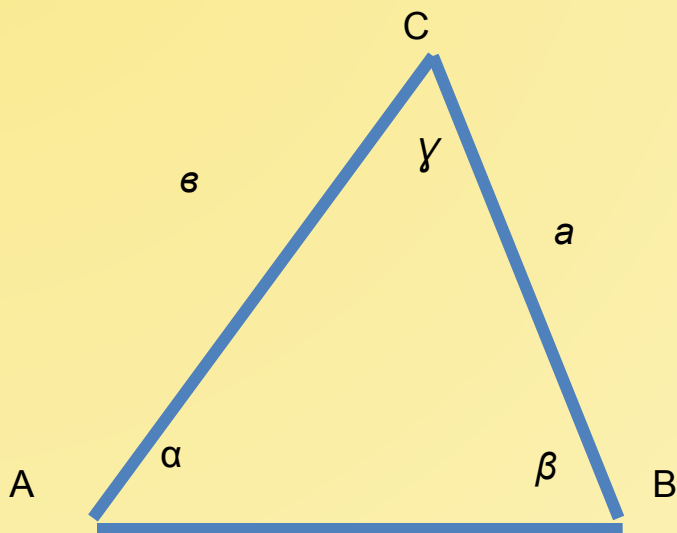
$$\text{Из } \frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R$$

получим $a = 2R \sin \alpha$, $b = 2R \cdot \sin \beta$. Подставим в формулу

$$S = \frac{1}{2} ab \cdot \sin \gamma$$

$$S = \frac{1}{2} 2R \sin \alpha \cdot 2R \sin \beta \cdot \sin \gamma = 2R^2 \sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \sin \gamma.$$

Вычисление площади треугольника через все углы и одну из сторон треугольника



$$S = \frac{a^2 \sin \beta \cdot \sin \gamma}{2 \sin \alpha}$$

Доказательство :

Из $\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$ имеем $b = \frac{a \cdot \sin \beta}{\sin \alpha}$

Подставим в формулу $S = \frac{1}{2} ab \cdot \sin \gamma$; $S = \frac{1}{2} a \cdot \frac{a \cdot \sin \beta}{\sin \alpha} \cdot \sin \gamma = \frac{1}{2} \frac{a^2 \sin \beta \cdot \sin \gamma}{\sin \alpha}$

Вычисление площади треугольника через радиусы вневписанных окружностей.

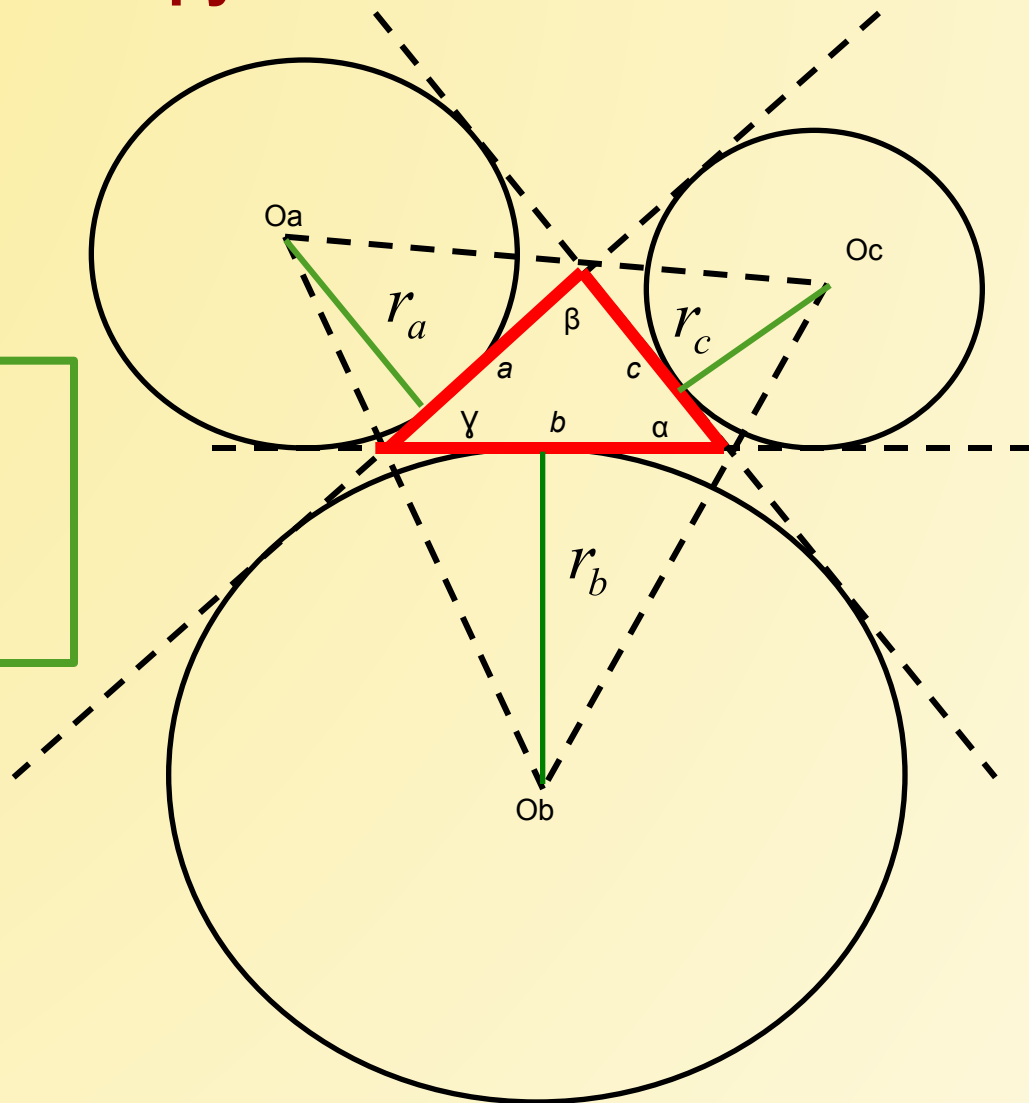
Вневписанная окружность- это окружность, касающаяся одной стороны треугольника и продолжения двух других сторон.

$$S = r_a(p - a) = r_b(p - b) = r_c(p - c)$$

$$S = \sqrt{r_a \cdot r_b \cdot r_c \cdot r}$$

r_a, r_b, r_c – радиусы вневписанных окружностей

p – полупериметр



Интернет-ресурсы

- Сайт <http://www.webmath.ru>
- **Вычисление площади треугольника**
- **Формула площади треугольника, онлайн сервис для расчета площади треугольника. Нахождение площади треугольника 7-ю методами, всего за несколько секунд Вы найдете площадь треугольника.**