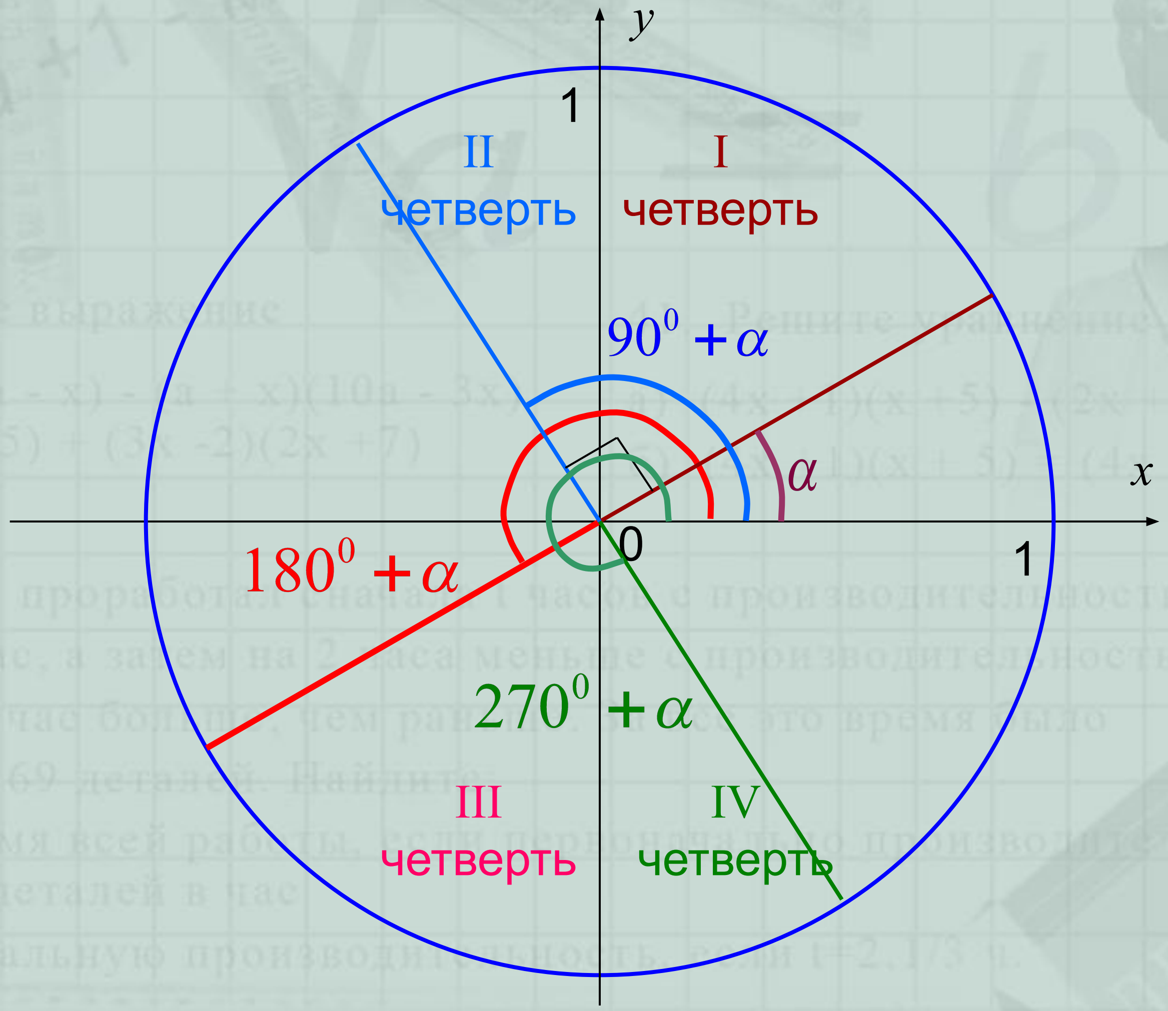
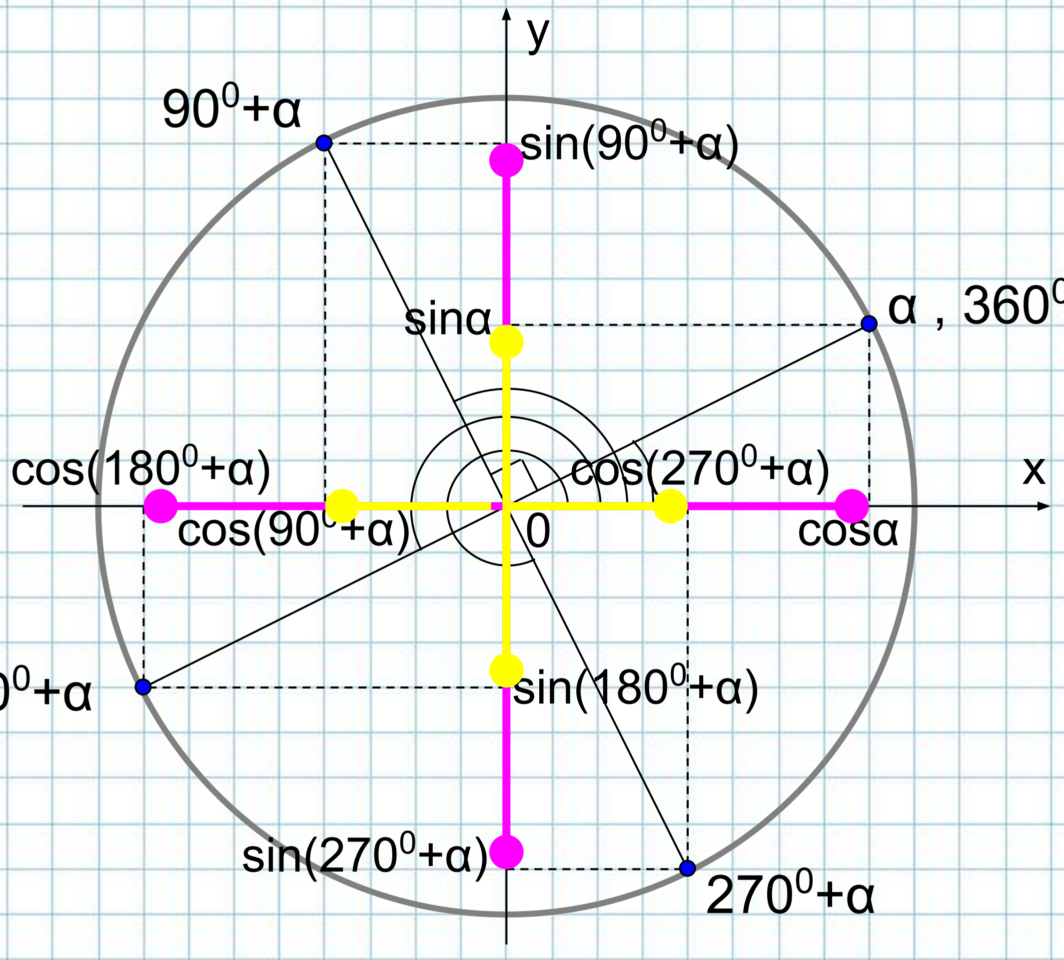
Формулы приведения.



Воробьев Леонид Альбертович, г.Минск

Построим произвольный острый угол поворота α.

Теперь изобразим углы $90^0+\alpha$, $180^0+\alpha$, $270^0+\alpha$ и $360^0+\alpha$.



Из равенства прямоугольных треугольников можно заключить, что:

$\cos\alpha=\sin(90^0+\alpha)=-\cos(180^0+\alpha)=-\sin(270^0+\alpha)=\cos(360^0+\alpha)$, а также

$\sin\alpha=-\cos(90^0+\alpha)=-\sin(180^0+\alpha)=\cos(270^0+\alpha)=\sin(360^0+\alpha)$.

Значения тригонометрических функций *любых* углов поворота можно привести к значению тригонометрических функций острого угла. Для этого и применяются формулы приведения. Попробуем разобраться в следующей таблице (перенесите её в тетрадь!):

Функция	аргумент(угол)	n – четное	n – нечетное
sin	$\left(90^0 \cdot n \pm \alpha\right)$ čëč $\left(\frac{\pi}{2} \cdot n \pm \alpha\right)$, $n \in \mathbf{Z}$, $\alpha \in \left(0; 90^0\right)$	± sinα	± cosα
cos		± cosα	± sinα
tg		± tgα	± ctgα
ctg		± ctgα	± tgα

С первым столбцом все ясно – в нем известные Вам тригонометрические функции. Во втором столбце показано, что любой аргумент(угол) этих функций можно представить в таком виде. Поясним это на конкретных примерах:

В градусной мере:

$$1020^0=90^0\cdot 11+30^0=90^0\cdot 12-60^0$$

$$\begin{array}{r|l} -\,1020 & 90 \\ 90 & \overline{11} \\ \hline -\,120 & \\ 90 & \\ \hline 30 & \end{array}$$

В радианах:

$$\frac{28\pi}{3}=\frac{\pi}{2}\cdot 18+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}\cdot 19-\frac{\pi}{6}$$

$$\frac{28\pi}{3}:\frac{\pi}{\mathbf{2}}=\frac{28\pi\cdot 2}{3\pi}=\frac{56}{3}=18\frac{2}{3}=18+\frac{2}{3}=19-\frac{1}{3}$$

Умножьте полученные сумму или разность на $\frac{\pi}{2}$ и получите искомые выражения.

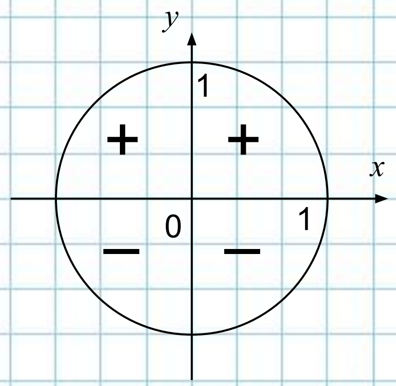
Как видите мы использовали известное Вам с начальной школы действие – деление с остатком. Причем, остаток не превышает делителя 90 (в случае градусной меры) или $\frac{\pi}{2}$ (в случае радианной меры). Потренируйтесь делать это!

В любом случае мы добились следующего: наш аргумент тригонометрической функции представлен в виде *целого числа прямых углов плюс или минус какой-то* ***<u>острый</u>*** *угол.*

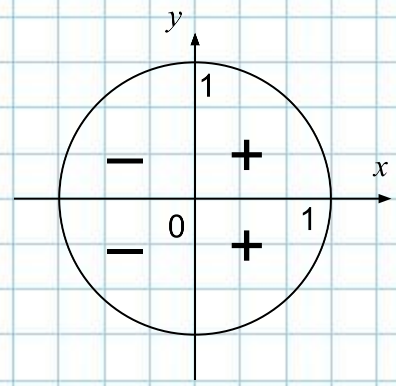
Обратим теперь внимание на 3-й и 4-й столбцы таблицы. Сразу заметим, что в случае четного числа прямых углов тригонометрическая функция остается такой же, а в случае нечетного числа – изменяется на <u>ко</u>функцию (sin на cos, tg на ctg и наоборот), причем аргументом этой функции является остаток.

Осталось разобраться со знаком ± перед каждым результатом. Это знаки данных функций, зависящие от координатных четвертей. Напомним их:

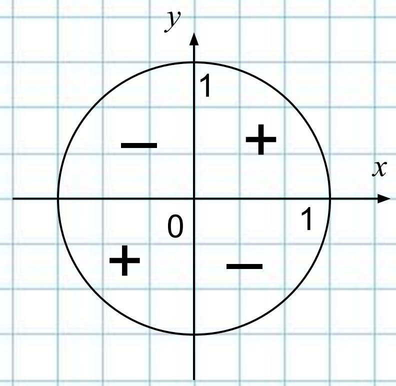
Знаки sin



Знаки cos



Знаки tg и ctg



Важно! Не забудьте определять знак окончательного результата по <u>данной</u> функции, а не той, которая получается в случае с четным или нечетным числом прямых углов!

Отработаем на конкретных примерах, как пользоваться этой таблицей.

Пример 1. Найти $sin 1020^0$.

Решение. Вначале представим данный угол в нужном нам виде:

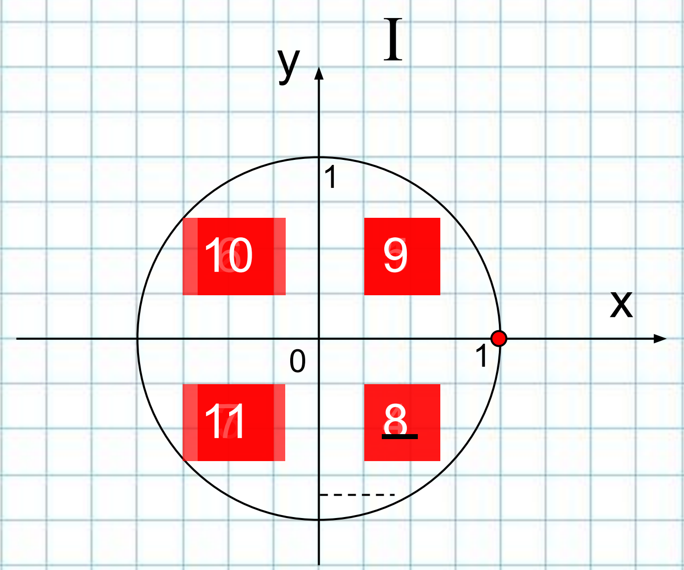
$$1020^0=90^0\cdot\underset{\mathrm{I}}{11}+30^0=90^0\cdot\underset{\mathrm{II}}{12}-60^0$$

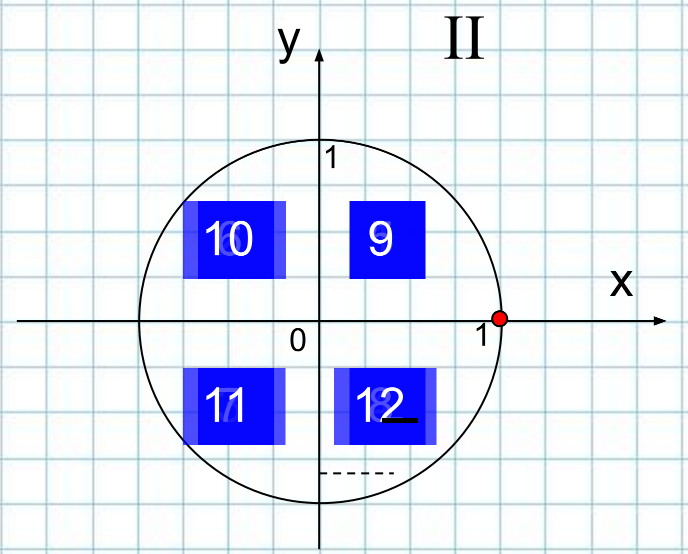
В первом случае нам придется изменять данную функцию синус на кофункцию – косинус (количество прямых углов нечетное – 11), во втором функция синус сохранится.

I $\quad \sin 1020^0 = \sin\left(11 \cdot 90^0 + 30^0\right) = \ ? \ \cos 30^0$

II $\quad \sin 1020^0 = \sin\left(12 \cdot 90^0 - 60^0\right) = \ ? \ \sin 60^0$

Остается невыясненным вопрос о знаке перед полученным результатом. Для его решения нам необходимо уметь работать с единичной тригонометрической окружностью (**внимательно** следите за вращением точки):





В любом случае получается IV четверть, в которой синус отрицательный.

Значит,

$$\sin 1020^0 = \sin\left(11\cdot 90^0 + 30^0\right) = -\cos 30^0 = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin 1020^0 = \sin\left(12\cdot 90^0 - 60^0\right) = -\sin 60^0 = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Пример 2. Все этапы решения проделайте самостоятельно (под контролем учителя).

$$\cos\frac{28\pi}{3} =$$

Решение:

$$\cos\frac{28\pi}{3} = \cos\left(9\pi + \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(18\cdot\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3}\right) = -\cos\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}$$

čëč

$$\cos\frac{28\pi}{3} = \cos\left(19\cdot\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\right) = -\sin\frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}.$$

В случаях, когда аргумент тригонометрической функции является отрицательным, используют свойства четности и нечетности тригонометрических функций:

$$\sin(-x) = -\sin x \qquad \cos(-x) = \cos x$$

$$tg(-x) = -tgx \qquad ctg(-x) = -ctgx$$

Пример 3. Привести к значению тригонометрической функции положительного острого угла значение tg(-2000^0).

Решение:

$$tg\left(-2000^0\right) = -tg2000^0 = -tg\left(90^0 \cdot 22 + 20^0\right) = -tg20^0$$

$$tg\left(-2000^0\right) = -tg2000^0 = -tg\left(90^0 \cdot 23 - 70^0\right) = - \quad 70^0$$

Т.к. формулы приведения приводят к значению тригонометрических функций **<u>острого</u>** угла, то достаточно держать в памяти: