

**Тема:**

• **Формулы приведения, формулы сложения. Формулы удвоения. Формулы половинного угла.**

## Свойства четности и нечетности

$$\cos(-\alpha) = \cos \alpha$$

четная

$$\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$$

нечетная

$$\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg} \alpha$$

нечетная

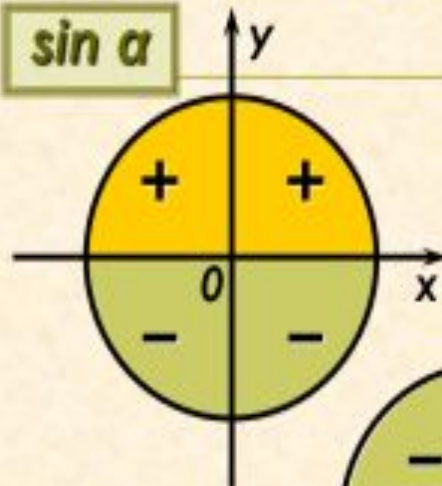
$$\operatorname{ctg}(-\alpha) = -\operatorname{ctg} \alpha$$

нечетная

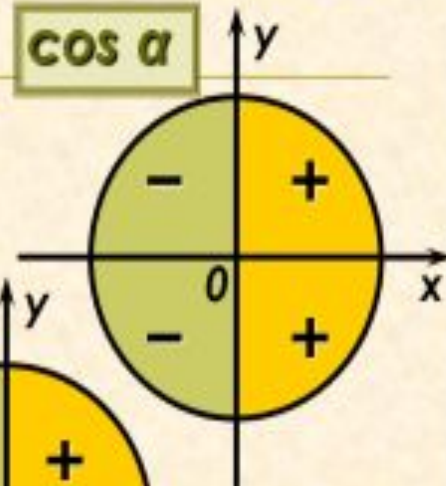


## Знаки синуса и косинуса

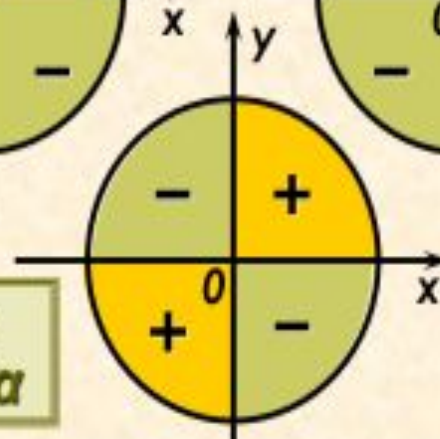
$\sin \alpha$

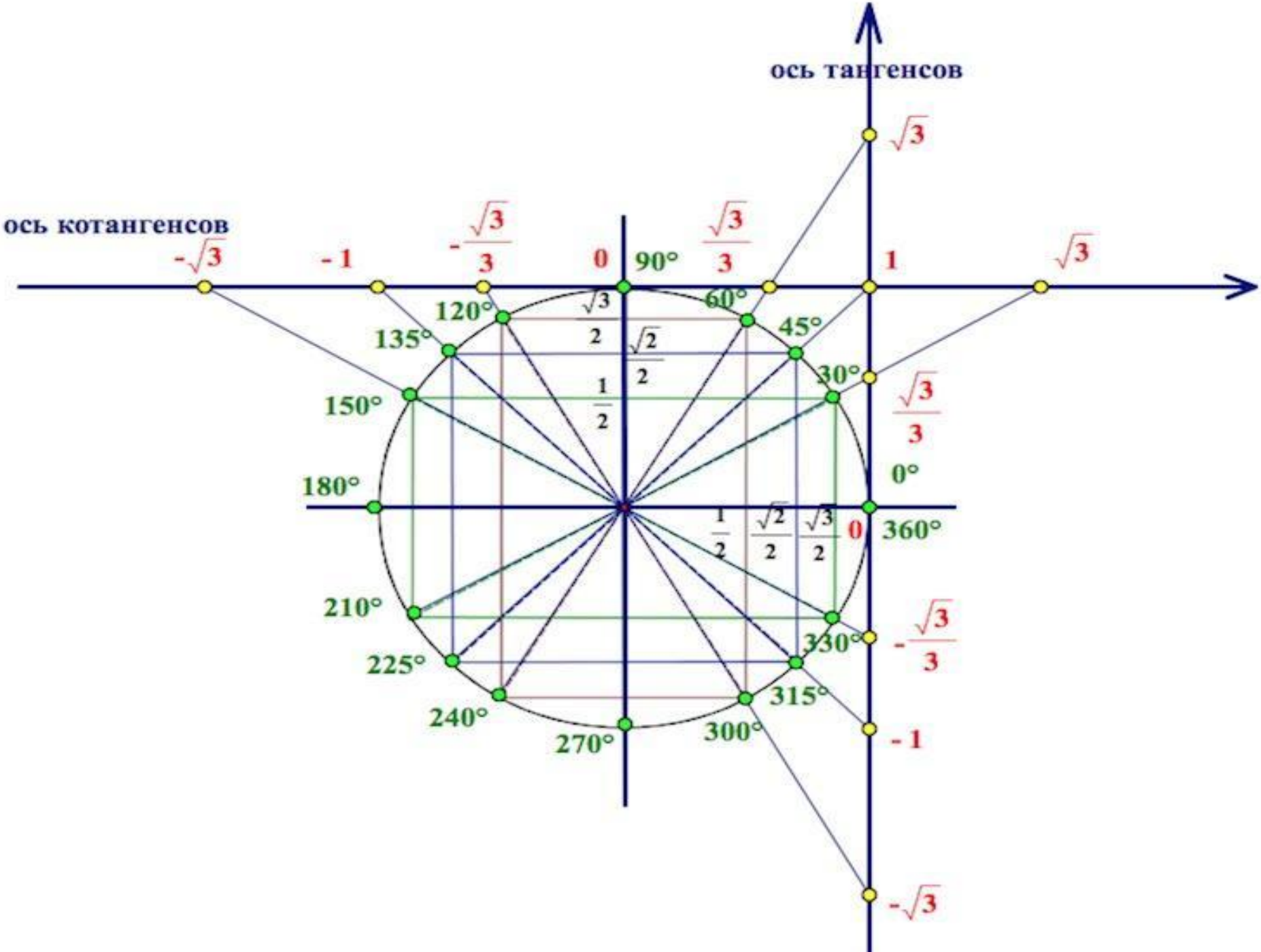


$\cos \alpha$



$\operatorname{tg} \alpha$   
 $\operatorname{ctg} \alpha$





## Тригонометрические формулы

### Основные тождества:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \quad \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \quad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$$

$$1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \quad 1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$$

### Формулы сложения:

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta \pm \cos \alpha \cdot \sin \beta$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta \mp \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

$$\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha \pm \operatorname{tg} \beta}{1 \mp \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta}$$

$$\operatorname{ctg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{ctg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \beta \mp 1}{\operatorname{ctg} \beta \pm \operatorname{ctg} \alpha}$$

### Формулы кратных углов:

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha \quad \sin \alpha \cdot \cos \alpha = \frac{1}{2} \sin 2\alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$\cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha \quad \cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \cdot \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha} \quad \operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{\operatorname{ctg}^2 \alpha - 1}{2 \cdot \operatorname{ctg} \alpha}$$

$$\sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha \quad \cos 3\alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha$$

$$\operatorname{tg} 3\alpha = \frac{3 \operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg}^3 \alpha}{1 - 3 \operatorname{tg}^2 \alpha} \quad \operatorname{ctg} 3\alpha = \frac{\operatorname{ctg}^3 \alpha - 3 \operatorname{ctg} \alpha}{3 \operatorname{ctg}^2 \alpha - 1}$$

### Формулы половинных углов:

$$2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} = 1 - \cos \alpha \quad 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} = 1 + \cos \alpha$$

$$1 \pm \sin \alpha = \left( \sin \frac{\alpha}{2} \pm \cos \frac{\alpha}{2} \right)^2 \quad \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}$$

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha}$$

## ТРИГОНОМЕТРИЯ

При использовании формул, содержащих  $\operatorname{tg}$  и  $\operatorname{ctg}$ , необходимо учитывать О.Д.З. левой и правой частей формул.

### Формулы суммы:

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\operatorname{tg} \alpha \pm \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\cos \alpha \cos \beta}$$

$$\operatorname{ctg} \alpha \pm \operatorname{ctg} \beta = \frac{\sin(\beta \pm \alpha)}{\sin \alpha \sin \beta}$$

$$\operatorname{tg} \alpha \pm \operatorname{ctg} \beta = \frac{\pm \cos(\alpha \mp \beta)}{\cos \alpha \sin \beta}$$

### Формулы произведения:

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} (\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta))$$

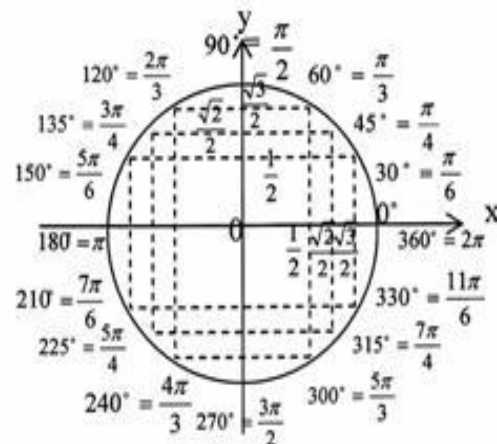
$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} (\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta))$$

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} (\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta))$$

### Выражение функций через $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$

$$\sin \alpha = \frac{2 \operatorname{tg}(\frac{\alpha}{2})}{1 + \operatorname{tg}^2(\frac{\alpha}{2})} \quad \cos \alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2(\frac{\alpha}{2})}{1 + \operatorname{tg}^2(\frac{\alpha}{2})}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{2 \operatorname{tg}(\frac{\alpha}{2})}{1 - \operatorname{tg}^2(\frac{\alpha}{2})}$$



$$\pi \text{ рад} = 180^\circ$$

$$1 \text{ рад} = \frac{180^\circ}{\pi} \approx 57'$$

$$1' = \frac{\pi}{180} \text{ рад}$$

### Обратные тригонометрические функции:

$$\sin(\arcsin a) = a, \quad a \in [-1; 1] \quad \cos(\arccos a) = a, \quad a \in [-1; 1]$$

$$\arcsin(\sin a) = a, \quad a \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \quad \arccos(\cos a) = a, \quad a \in [0; \pi]$$

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} a) = a, \quad a \in \mathbb{R} \quad \operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} a) = a, \quad a \in \mathbb{R}$$

$$\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} a) = a, \quad a \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right) \quad \operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg} a) = a, \quad a \in (0; \pi)$$

### Четность тригонометрических и обратнотригонометрических функций:

1. четная:  $\cos(-x) = \cos x$ ,  $f(-x) = f(x)$

2. общего вида:  $\operatorname{arc} \cos(-x) = \pi - \arccos x$

$$\operatorname{arcctg}(-x) = \pi - \operatorname{arcctg} x$$

3. нечетные: остальные,  $f(-x) = -f(x)$

### Рейтинг углов.

1. табличные: 30, 45, 180, 120, 210, 330... (ф-лы приведения)

2. через 15: 15 = 45 - 30, 105 = 60 + 45, ... (формулы сложения)

3. одинаковые: 17,  $\alpha$ , ... (основные тождества)

4. кратные: 17, 34; 2 $\alpha$ ,  $\frac{\alpha}{2}$ , ... (кратных и половинных углов)

5. сумма или разность табличная: 127 + 53 = 180, 93 - 3 = 90, 2 + 58 = 60, 35 - 5 = 30 (формулы приведения, суммы, произведения, сложения)

6. произвольные:  $\alpha$  и  $\beta$ ; 5 и 2 (формулы суммы, произведения, сложения)

# ФОРМУЛЫ ПРИВЕДЕНИЯ

$$\begin{aligned}\sin(-\alpha) &= -\sin \alpha \\ \cos(-\alpha) &= \cos \alpha \\ \operatorname{tg}(-\alpha) &= -\operatorname{tg} \alpha \\ \operatorname{ctg}(-\alpha) &= -\operatorname{ctg} \alpha\end{aligned}$$

Происходит от симметрии и периодичности движения точки по окружности. Формулами приведения называют формулы, с помощью которых значения тригонометрических функций аргументов  $(\pi/2 \pm \alpha)$ ,  $(\pi \pm \alpha)$ ,  $(2\pi \pm \alpha)$ ,  $(3\pi/2 \pm \alpha)$  – выражаются через значения  $\sin \alpha$ ,  $\cos \alpha$ ,  $\operatorname{tg} \alpha$ ,  $\operatorname{ctg} \alpha$ .

## ТАБЛИЦА ПРИВЕДЕНИЯ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

$\beta$	$\frac{\pi}{2} + \alpha$	$\pi + \alpha$	$\frac{3\pi}{2} + \alpha$	$\frac{\pi}{2} - \alpha$	$\pi - \alpha$	$\frac{3\pi}{2} - \alpha$	$2\pi - \alpha$
$\sin \beta$	$\cos \alpha$	$-\sin \alpha$	$-\cos \alpha$	$\cos \alpha$	$\sin \alpha$	$-\cos \alpha$	$-\sin \alpha$
$\cos \beta$	$-\sin \alpha$	$-\cos \alpha$	$\sin \alpha$	$\sin \alpha$	$-\cos \alpha$	$-\sin \alpha$	$\cos \alpha$
$\operatorname{tg} \beta$	$-\operatorname{ctg} \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{ctg} \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$
$\operatorname{ctg} \beta$	$-\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{ctg} \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$

# ПРИМЕР

Ы:

$$\sin 150^\circ = \sin(180^\circ - 30^\circ) = \sin 30^\circ = 0,5$$

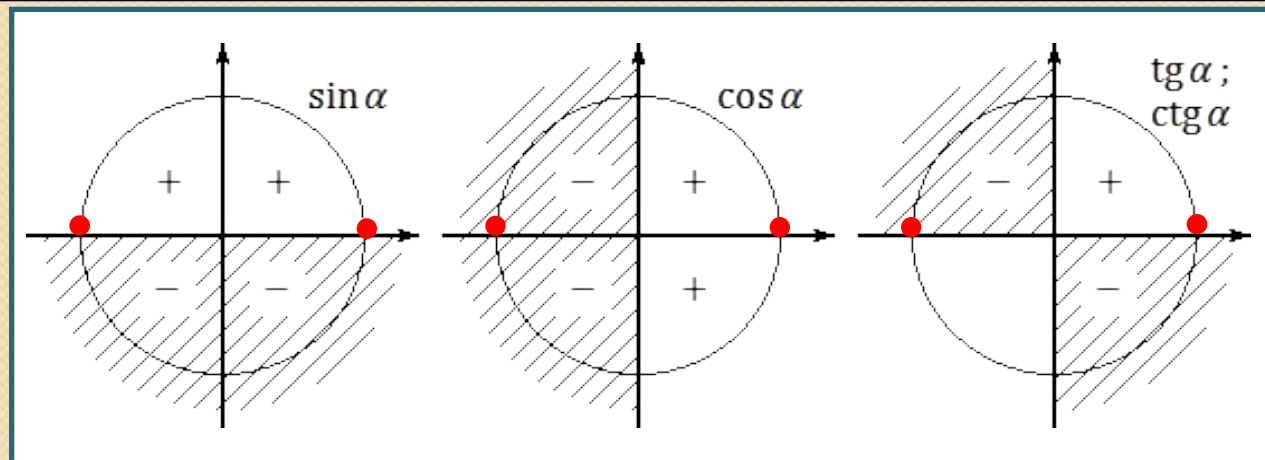
$$\begin{aligned}\sin(-960^\circ) &= \sin[360^\circ \cdot (-3) + 120^\circ] = \sin 120^\circ = \\ &= \sin(90^\circ + 30^\circ) = \cos 30^\circ = \sqrt{3}/2,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos(-960^\circ) &= \cos[360^\circ \cdot (-3) + 120^\circ] = \cos 120^\circ = \\ &= \cos(90^\circ + 30^\circ) = -\sin 30^\circ = -1/2,\end{aligned}$$

$$\operatorname{tg}(-960^\circ) = \frac{\sin(-960^\circ)}{\cos(-960^\circ)} = \frac{\sqrt{3}/2}{-1/2} = -\sqrt{3},$$

$$\operatorname{ctg}(-960^\circ) = 1/\operatorname{tg}(-960^\circ) = -1/\sqrt{3}.$$

Функция / угол	$\pi/2 - \alpha$	$\pi/2 + \alpha$	$\pi - \alpha$	$\pi + \alpha$	$3\pi/2 - \alpha$	$3\pi/2 + \alpha$	$2\pi - \alpha$	$2\pi + \alpha$
sin	cos $\alpha$	cos $\alpha$	sin $\alpha$	- sin $\alpha$	- cos $\alpha$	- cos $\alpha$	- sin $\alpha$	sin $\alpha$
cos	sin $\alpha$	- sin $\alpha$	- cos $\alpha$	- cos $\alpha$	- sin $\alpha$	sin $\alpha$	cos $\alpha$	cos $\alpha$
tg	ctg $\alpha$	- ctg $\alpha$	- tg $\alpha$	tg $\alpha$	ctg $\alpha$	- ctg $\alpha$	- tg $\alpha$	tg $\alpha$
ctg	tg $\alpha$	- tg $\alpha$	- ctg $\alpha$	ctg $\alpha$	tg $\alpha$	- tg $\alpha$	- ctg $\alpha$	ctg $\alpha$
Функция / угол в °	$90^\circ - \alpha$	$90^\circ + \alpha$	$180^\circ - \alpha$	$180^\circ + \alpha$	$270^\circ - \alpha$	$270^\circ + \alpha$	$360^\circ - \alpha$	$360^\circ + \alpha$



$$\sin(-330^\circ) = -\sin 330^\circ;$$

$$\sin(-330^\circ) = -\sin 330^\circ = -\sin(360^\circ - 30^\circ);$$

$360^\circ = 2\pi \Rightarrow$  наименование функции сохраняем;

$330^\circ = 360^\circ - 30^\circ$  — аргумент **IV** четверти;

$$-\sin(360^\circ - 30^\circ) = -(-\sin 30^\circ) = -(-\frac{1}{2}) = \frac{1}{2};$$

**Ответ:**  $\sin(-330^\circ) = \frac{1}{2}.$

# УГОЛ НЕ 90, НЕ 180, НЕ 270, НЕ

360

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}$$

$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}$$

$$\operatorname{ctg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{ctg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \beta - 1}{\operatorname{ctg} \beta + \operatorname{ctg} \alpha}$$

$$\operatorname{ctg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{ctg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \beta + 1}{\operatorname{ctg} \beta - \operatorname{ctg} \alpha}$$



# ПРИМЕРЫ:

$$\begin{aligned}\sin 75^\circ &= \sin (45^\circ + 30^\circ) = \sin 45^\circ \cdot \cos 30^\circ + \cos 45^\circ \cdot \sin 30^\circ = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4};\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos 75^\circ &= \cos (45^\circ + 30^\circ) = \cos 45^\circ \cdot \cos 30^\circ - \sin 45^\circ \cdot \sin 30^\circ = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}.\end{aligned}$$

*Ответ:*  $\sin 75^\circ = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$ ;  $\cos 75^\circ = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$ .

$$\begin{aligned}\operatorname{tg} 75^\circ &= \operatorname{tg} (45^\circ + 30^\circ) = \frac{\operatorname{tg} 45^\circ + \operatorname{tg} 30^\circ}{1 - \operatorname{tg} 45^\circ \operatorname{tg} 30^\circ} = \\ &= \frac{1 + \frac{\sqrt{3}}{3}}{1 - 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{3 + \sqrt{3}}{3 - \sqrt{3}}.\end{aligned}$$

# ОСНОВНЫЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ТОЖДЕСТВА

$$1) \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$2) \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

$$3) \operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$$

$$4) \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1$$

$$5) \frac{1}{\cos^2 \alpha} = \operatorname{tg}^2 \alpha + 1$$

$$6) \frac{1}{\sin^2 \alpha} = \operatorname{ctg}^2 \alpha + 1$$

Найдите  $\cos \alpha$ ,  $\operatorname{tg} \alpha$ ,  $\operatorname{ctg} \alpha$ , если  $\sin \alpha = \frac{12}{13}$ .

**Решение**

$$\sin \alpha = \frac{12}{13}$$

$$\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \sqrt{1 - \left(\frac{12}{13}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{144}{169}} = \sqrt{\frac{169 - 144}{169}} = \sqrt{\frac{25}{169}} = \frac{5}{13}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{12}{13} : \frac{5}{13} = \frac{12 \cdot \cancel{13}}{\cancel{13} \cdot 5} = \frac{12}{5} = 2 \frac{2}{5}$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{5}{13} : \frac{12}{13} = \frac{5 \cdot \cancel{13}}{\cancel{13} \cdot 12} = \frac{5}{12}$$

**Ответ:**  $\cos \alpha = \frac{5}{13}$ ,  $\operatorname{tg} \alpha = 2 \frac{2}{5}$ ,  $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{5}{12}$ .

# ФОРМУЛЫ ДВОЙНОГО И ТРОЙНОГО

## УГЛОВ

### (КРАТНЫХ УГЛОВ)

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$\cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$$

$$\cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}$$

$$\operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{\operatorname{ctg}^2 \alpha - 1}{2 \operatorname{ctg} \alpha}$$

**ПРИМЕР 1:** Сократить дробь  $\frac{1 + \sin 2x}{\cos 2x}$ .

$$\begin{aligned} \frac{1 + \sin 2x}{\cos 2x} &= \frac{(\cos x + \sin x)^2}{\cos^2 x - \sin^2 x} = \\ &= \frac{(\cos x + \sin x)^2}{(\cos x + \sin x)(\cos x - \sin x)} = \frac{\cos x + \sin x}{\cos x - \sin x}. \end{aligned}$$

1)  $\sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha$

2)  $\cos 3\alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha$

3)  $\operatorname{tg} 3\alpha = \frac{3 \operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg}^3 \alpha}{1 - 3 \operatorname{tg}^2 \alpha}$

4)  $\operatorname{ctg} 3\alpha = \frac{\operatorname{ctg}^3 \alpha - 3 \operatorname{ctg} \alpha}{3 \operatorname{ctg}^2 \alpha - 1}$

**ПРИМЕР 2:**

**Вычислить:**  $\cos^2 \frac{\pi}{8} - \sin^2 \frac{\pi}{8} =$

$$= \cos \frac{2\pi}{8} = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$