Тема:

- **Формулы приведения, формулы сложения. Формулы удвоения. Формулы половинного угла.**

Свойства четности и нечетности

$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$

четная

$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$

нечетная

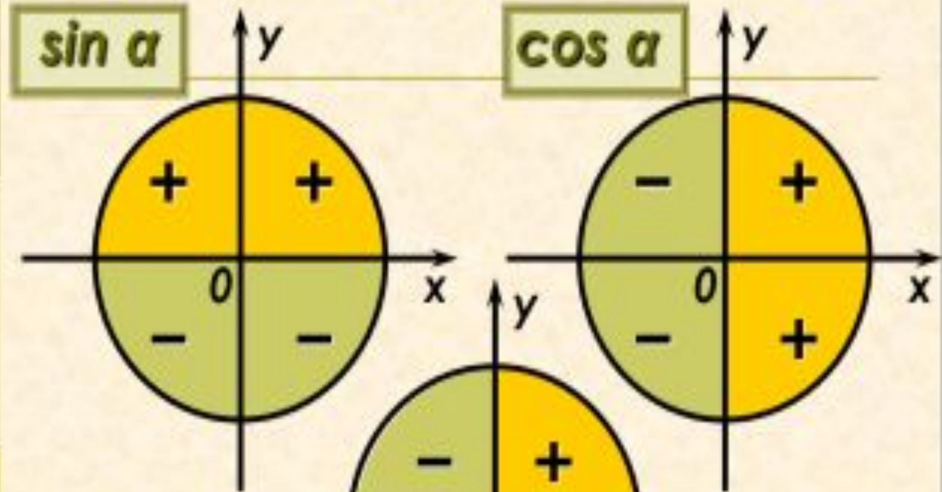
$tg(-\alpha) = -tg\,\alpha$

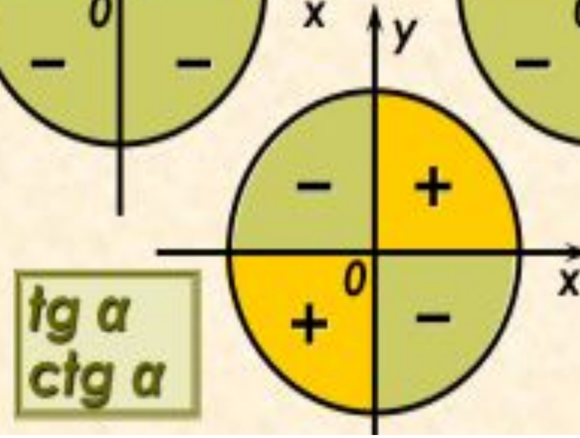
нечетная

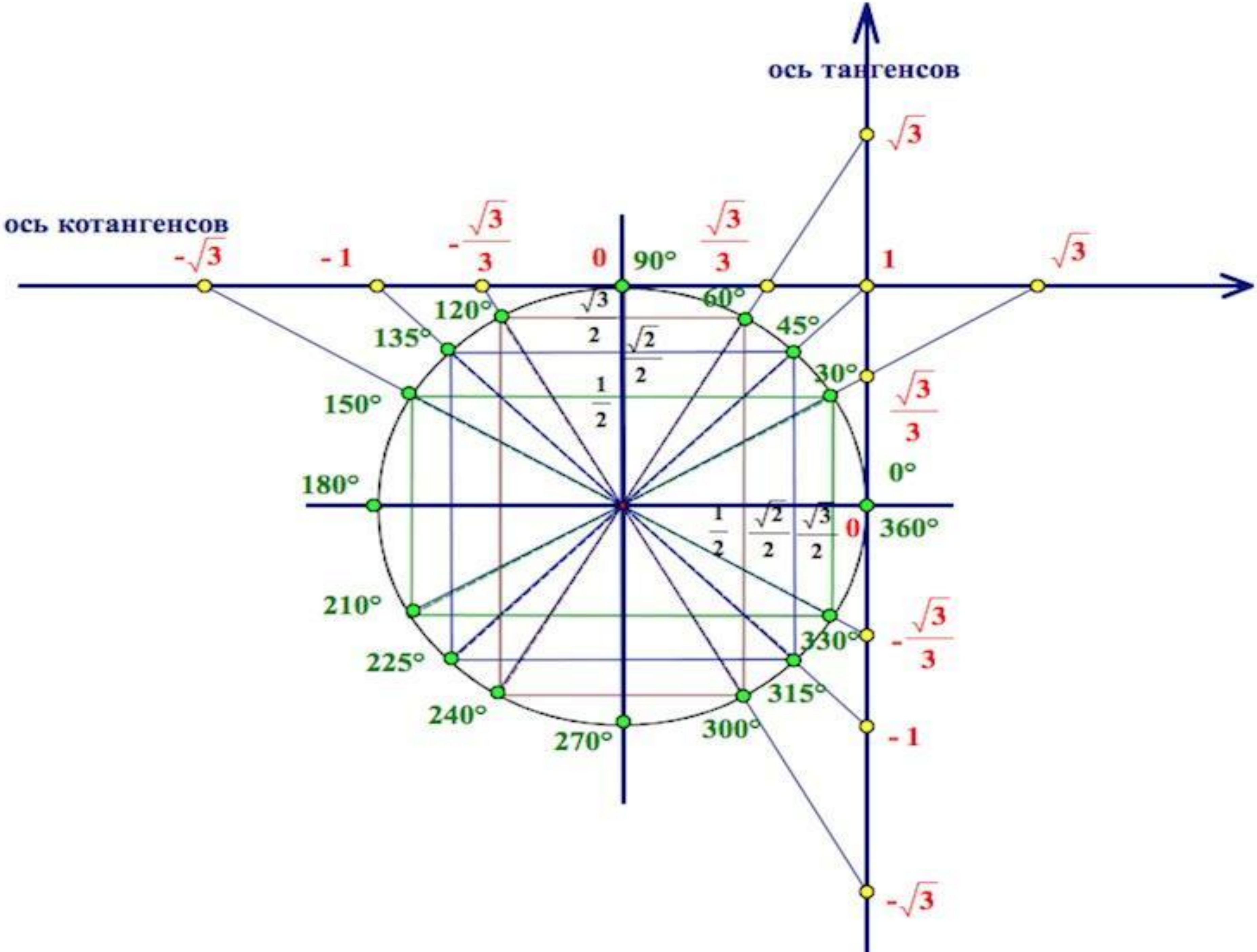
$ctg(-\alpha) = -ctg\,\alpha$

нечетная

Знаки синуса и косинуса







ось тангенсов
ось котангенсов
$-\sqrt{3}$
- 1
$-\frac{\sqrt{3}}{3}$
0
90°
$\frac{\sqrt{3}}{3}$
1
$\sqrt{3}$
$\sqrt{3}$
120°
60°
$\frac{\sqrt{3}}{2}$
135°
45°
$\frac{\sqrt{2}}{2}$
30°
$\frac{1}{2}$
150°
$\frac{\sqrt{3}}{3}$
0°
180°
$\frac{1}{2}$
$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{\sqrt{3}}{2}$
0
360°
210°
$-\frac{\sqrt{3}}{3}$
330°
225°
315°
240°
300°
270°
- 1
$-\sqrt{3}$

ТРИГОНОМЕТРИЯ

Тригонометрические формулы

Основные тождества:

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \qquad tg\alpha \cdot ctg\alpha = 1$

$tg\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \qquad ctg\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$

$1 + tg^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha} \qquad 1 + ctg^2\alpha = \dfrac{1}{\sin^2\alpha}$

Формулы сложения:

$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta \pm \cos\alpha \cdot \sin\beta$

$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta \mp \sin\alpha \cdot \sin\beta$

$tg(\alpha \pm \beta) = \dfrac{tg\alpha \pm tg\beta}{1 \mp tg\alpha \cdot tg\beta};$

$ctg(\alpha \pm \beta) = \dfrac{ctg\alpha \cdot ctg\beta \mp 1}{ctg\beta \pm ctg\alpha}$

Формулы кратных углов:

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha \qquad \sin\alpha \cdot \cos\alpha = \dfrac{1}{2}\sin 2\alpha$

$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$

$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha \qquad \cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$

$tg2\alpha = \dfrac{2 \cdot tg\alpha}{1 - tg^2\alpha} \qquad ctg2\alpha = \dfrac{ctg^2\alpha - 1}{2 \cdot ctg\alpha}$

$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha \qquad \cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$

$tg3\alpha = \dfrac{3tg\alpha - tg^3\alpha}{1 - 3tg^2\alpha} \qquad ctg3\alpha = \dfrac{ctg^3\alpha - 3ctg\alpha}{3ctg^2\alpha - 1}$

Формулы половинных углов:

$2\sin^2\dfrac{\alpha}{2} = 1 - \cos\alpha \qquad 2\cos^2\dfrac{\alpha}{2} = 1 + \cos\alpha$

$1 \pm \sin\alpha = (\sin\dfrac{\alpha}{2} \pm \cos\dfrac{\alpha}{2})^2 \qquad tg^2\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{1 - \cos\alpha}{1 + \cos\alpha}$

$tg\,\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{\sin\alpha}{1 + \cos\alpha} = \dfrac{1 - \cos\alpha}{\sin\alpha}$

При использовании формул, содержащих tg и ctg, необходимо учитывать О.Д.З. левой и правой частей формул.

Формулы суммы:

$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$

$\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}$

$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$

$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}$

$tg\alpha \pm tg\beta = \dfrac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$

$ctg\alpha \pm ctg\beta = \dfrac{\sin(\beta \pm \alpha)}{\sin\alpha\sin\beta}$

$tg\alpha \pm ctg\beta = \dfrac{\pm\cos(\alpha \mp \beta)}{\cos\alpha\sin\beta}$

Формулы произведения:

$\sin\alpha\sin\beta = \dfrac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta))$

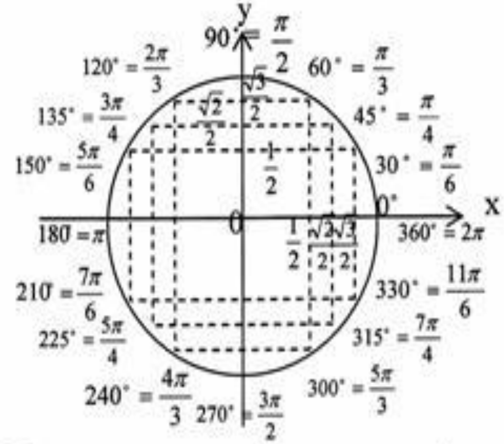
$\cos\alpha\cos\beta = \dfrac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta))$

$\sin\alpha\cos\beta = \dfrac{1}{2}(\sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta))$

Выражение функций через $tg\,\dfrac{\alpha}{2}$

$\sin\alpha = \dfrac{2tg(\alpha/2)}{1 + tg^2(\alpha/2)} \qquad \cos\alpha = \dfrac{1 - tg^2(\alpha/2)}{1 + tg^2(\alpha/2)}$

$tg\alpha = \dfrac{2tg(\alpha/2)}{1 - tg^2(\alpha/2)}$



$\pi\ рад = 180^\circ$

$1\,рад = \dfrac{180^\circ}{\pi} \approx 57^\circ$

$1^\circ = \dfrac{\pi}{180}\,рад$

Обратные тригонометрические функции:

$\sin(\arcsin a) = a, \quad a \in [-1;1] \qquad \cos(\arccos a) = a, \quad a \in [-1;1]$

$\arcsin(\sin a) = a, \quad a \in \left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right] \qquad \arccos(\cos a) = a, \quad a \in [0;\pi]$

$tg(arctga) = a, \quad a \in R \qquad ctg(arcctga) = a, \quad a \in R$

$arctg(tga) = a, \quad a \in \left(-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right) \qquad arcctg(ctga) = a, \quad a \in (0;\pi)$

Четность тригонометр-ких и обратнотриг-их функций:

1. четная: $\cos(-x) = \cos x$, $f(-x) = f(x)$
2. общего вида: $arc\cos(-x) = \pi - \arccos x$

   $arcctg(-x) = \pi - arcctgx$
3. нечетные: остальные, $f(-x) = -f(x)$

Рейтинг углов.

1. табличные: 30°, 45°, 180°, 120°, 210°, 330°…(ф-лы приведения)
2. через 15: 15° = 45° - 30°, 105° = 60° + 45°,…(формулы сложения)
3. одинаковые: 17°, α, …(основные тождества)
4. кратные: 17°, 34°; 2α, α, $\dfrac{\alpha}{2}$ …(кратных и половинных углов)
5. сумма или разность табличная: 127° + 53° = 180°, 93° – 3° = 90°, 2° + 58° = 60°, 35° – 5° = 30° (формулы приведения, суммы, произведения, сложения)
6. произвольные: α и β; 5° и 2° (формулы суммы, произведения, сложения)

ФОРМУЛЫ ПРИВЕДЕНИЯ

$$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$$
$$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$$
$$tg(-\alpha) = -tg\,\alpha$$
$$ctg(-\alpha) = -ctg\,\alpha$$

Происходит от симметрии и периодичности движения точки по окружности. Формулами приведения называют формулы, с помощью которых значения тригонометрических функций аргументов (π/2±α), (π±α), (2π±α), (3π/2±α) – выражаются через значения **sin** α, **cos** α, **tg** α, **ctg** α.

ТАБЛИЦА ПРИВЕДЕНИЯ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

β	$\frac{\pi}{2}+\alpha$	$\pi+\alpha$	$\frac{3\pi}{2}+\alpha$	$\frac{\pi}{2}-\alpha$	$\pi-\alpha$	$\frac{3\pi}{2}-\alpha$	$2\pi-\alpha$
$\sin\beta$	$\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$
$\cos\beta$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$\cos\alpha$
$\mathrm{tg}\,\beta$	$-\mathrm{ctg}\,\alpha$	$\mathrm{tg}\,\alpha$	$-\mathrm{ctg}\,\alpha$	$\mathrm{ctg}\,\alpha$	$-\mathrm{tg}\,\alpha$	$\mathrm{ctg}\,\alpha$	$\mathrm{tg}\,\alpha$
$\mathrm{ctg}\,\beta$	$-\mathrm{tg}\,\alpha$	$\mathrm{ctg}\,\alpha$	$-\mathrm{tg}\,\alpha$	$\mathrm{tg}\,\alpha$	$-\mathrm{ctg}\,\alpha$	$\mathrm{tg}\,\alpha$	$\mathrm{ctg}\,\alpha$

ПРИМЕРЫ:

$$\sin 150° = \sin(180° - 30°) = \sin 30° = 0{,}5$$

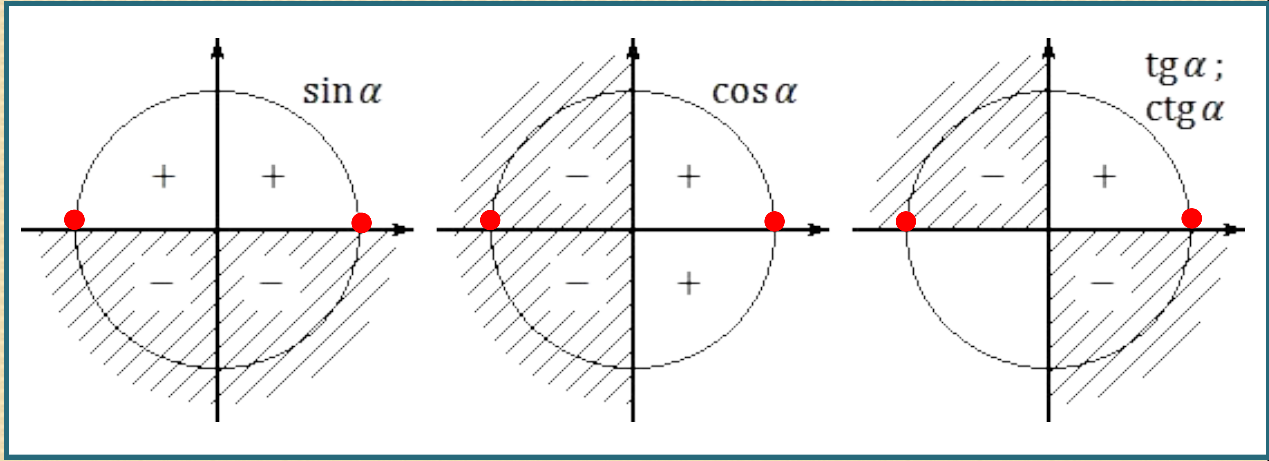
$$\sin(-960°) = \sin[360° \cdot (-3) + 120°] = \sin 120° = \sin(90° + 30°) = \cos 30° = \sqrt{3}/2,$$

$$\cos(-960°) = \cos[360° \cdot (-3) + 120°] = \cos 120° = \cos(90° + 30°) = -\sin 30° = -{}^1/_2,$$

$$\operatorname{tg}(-960°) = \frac{\sin(-960°)}{\cos(-960°)} = \frac{\sqrt{3}/2}{-{}^1/_2} = -\sqrt{3},$$

$$\operatorname{ctg}(-960°) = 1/\operatorname{tg}(-960°) = -1/\sqrt{3}.$$

Функция / угол	π/2 – α	π/2 + α	π – α	π + α	3π/2 – α	3π/2 + α	2π – α	2π + α
sin	cos α	cos α	sin α	– sin α	– cos α	– cos α	– sin α	sin α
cos	sin α	– sin α	– cos α	– cos α	– sin α	sin α	cos α	cos α
tg	ctg α	– ctg α	– tg α	tg α	ctg α	– ctg α	– tg α	tg α
ctg	tg α	– tg α	– ctg α	ctg α	tg α	– tg α	– ctg α	ctg α
Функция / угол в °	90° – α	90° + α	180° – α	180° + α	270° – α	270° + α	360° – α	360° + α



$\sin(-330°) = -\sin 330°$;

$\sin(-330°) = -\sin 330° = -\sin(360° - 30°)$;

$360° = 2\pi$ $\Longrightarrow$ наименование функции сохраняем;

$330° = 360° - 30°$ — аргумент IV четверти;

$-\sin(360° - 30°) = -(-\sin 30°) = -(-\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$;

Ответ: $\sin(-330°) = \frac{1}{2}$.

ФОРМУЛЫ СЛОЖЕНИЯ
УГОЛ НЕ 90, НЕ 180, НЕ 270, НЕ 360

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$$

$$tg(\alpha+\beta)=\frac{tg\,\alpha+tg\,\beta}{1-tg\,\alpha\,tg\,\beta}$$

$$tg(\alpha-\beta)=\frac{tg\,\alpha-tg\,\beta}{1+tg\,\alpha\,tg\,\beta}$$

$$ctg(\alpha+\beta)=\frac{ctg\,\alpha\cdot ctg\,\beta-1}{ctg\,\beta+ctg\,\alpha}$$

$$ctg(\alpha-\beta)=\frac{ctg\,\alpha\cdot ctg\,\beta+1}{ctg\,\beta-ctg\,\alpha}$$

ПРИМЕРЫ:

$$\sin 75^\circ = \sin(45^\circ + 30^\circ) = \sin 45^\circ \cdot \cos 30^\circ + \cos 45^\circ \cdot \sin 30^\circ =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4};$$

$$\cos 75^\circ = \cos(45^\circ + 30^\circ) = \cos 45^\circ \cdot \cos 30^\circ - \sin 45^\circ \cdot \sin 30^\circ =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}.$$

Ответ: $\sin 75^\circ = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$; $\cos 75^\circ = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

$$\operatorname{tg} 75^\circ = \operatorname{tg}(45^\circ + 30^\circ) = \frac{\operatorname{tg} 45^\circ + \operatorname{tg} 30^\circ}{1 - \operatorname{tg} 45^\circ \operatorname{tg} 30^\circ} =$$

$$= \frac{1 + \frac{\sqrt{3}}{3}}{1 - 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{3 + \sqrt{3}}{3 - \sqrt{3}}.$$

ОСНОВНЫЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ТОЖДЕСТВА

1) $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

2) $tg\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

3) $ctg\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$

4) $tg\alpha \cdot ctg\alpha = 1$

5) $\dfrac{1}{\cos^2\alpha} = tg^2\alpha + 1$

6) $\dfrac{1}{\sin^2\alpha} = ctg^2\alpha + 1$

Найдите $\cos\alpha, tg\alpha, ctg\alpha$, *если* $\sin\alpha = \dfrac{12}{13}$.

Решение

$\sin\alpha = \dfrac{12}{13}.$

$\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha} = \sqrt{1-\left(\dfrac{12}{13}\right)^2} = \sqrt{1-\dfrac{144}{169}} = \sqrt{\dfrac{169-144}{169}} = \sqrt{\dfrac{25}{169}} = \dfrac{5}{13}.$

$tg\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{12}{13} : \dfrac{5}{13} = \dfrac{12\cdot\cancel{13}}{\cancel{13}\cdot 5} = \dfrac{12}{5} = 2\dfrac{2}{5}.$

$ctg\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \dfrac{5}{13} : \dfrac{12}{13} = \dfrac{5\cdot\cancel{13}}{\cancel{13}\cdot 12} = \dfrac{5}{12}.$

Ответ: $\cos\alpha = \dfrac{5}{13}, tg\alpha = 2\dfrac{2}{5}, ctg\alpha = \dfrac{5}{12}.$

ФОРМУЛЫ ДВОЙНОГО И ТРОЙНОГО УГЛОВ
(КРАТНЫХ УГЛОВ)

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$$
$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$
$$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$$
$$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$$
$$tg\,2\alpha = \frac{2tg\,\alpha}{1 - tg^2\alpha}$$
$$ctg\,2\alpha = \frac{ctg^2\alpha - 1}{2ctg\,\alpha}$$

1) $\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$
2) $\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$
3) $tg\,3\alpha = \dfrac{3tg\,\alpha - tg^3\alpha}{1 - 3tg^2\alpha}$
4) $ctg\,3\alpha = \dfrac{ctg^3\alpha - 3ctg\,\alpha}{3ctg^2\alpha - 1}$

ПРИМЕР 1: Сократить дробь $\dfrac{1 + \sin 2x}{\cos 2x}$.

$$\frac{1 + \sin 2x}{\cos 2x} = \frac{(\cos x + \sin x)^2}{\cos^2 x - \sin^2 x} =$$
$$= \frac{(\cos x + \sin x)^2}{(\cos x + \sin x)(\cos x - \sin x)} = \frac{\cos x + \sin x}{\cos x - \sin x}.$$

ПРИМЕР 2:

Вычислить: $\cos^2\dfrac{\pi}{8} - \sin^2\dfrac{\pi}{8} =$

$$= \cos\frac{2\pi}{8} = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$