Тема:

- Формулы приведения, формулы сложения. Формулы удвоения. Формулы половинного угла.

Свойства четности и нечетности

$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$

четная

$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$

нечетная

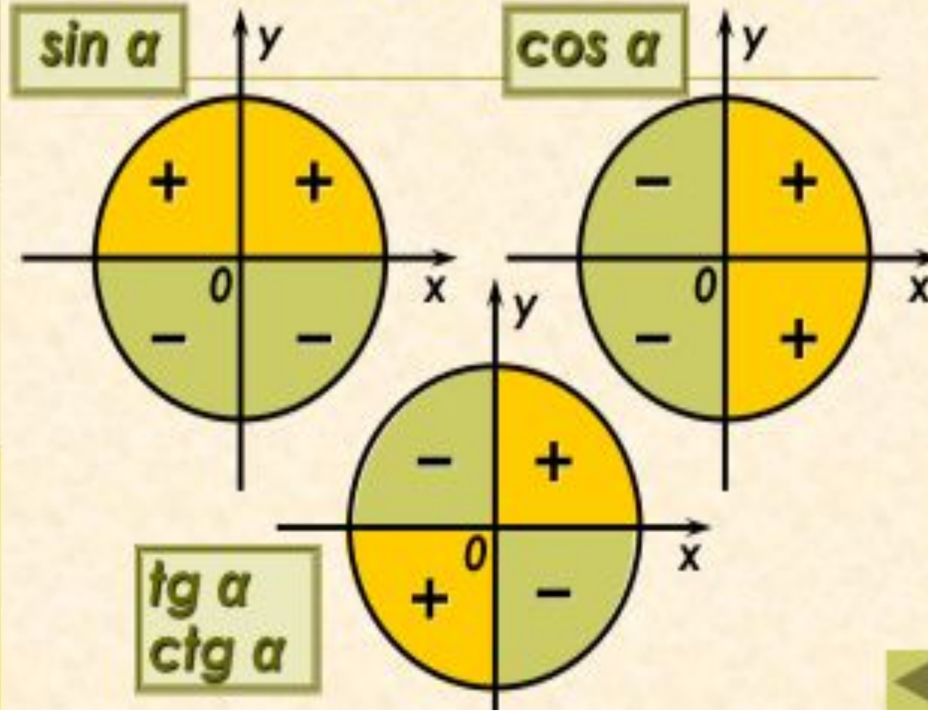
$\mathrm{tg}(-\alpha) = -\mathrm{tg}\,\alpha$

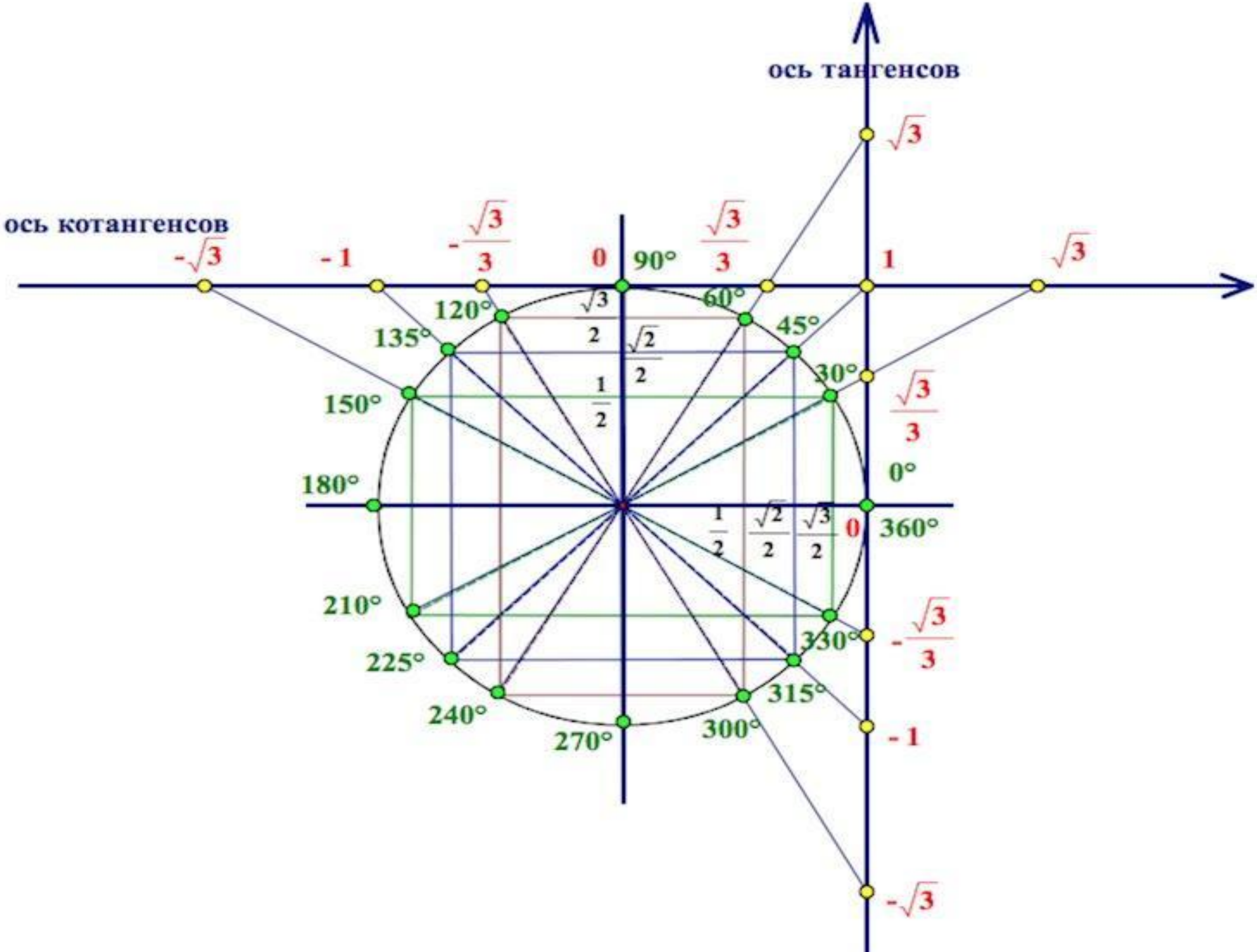
нечетная

$\mathrm{ctg}(-\alpha) = -\mathrm{ctg}\,\alpha$

нечетная

Знаки синуса и косинуса





ось тангенсов
ось котангенсов
$-\sqrt{3}$
- 1
$-\frac{\sqrt{3}}{3}$
0
90°
$\frac{\sqrt{3}}{3}$
1
$\sqrt{3}$
$\sqrt{3}$
120°
60°
135°
45°
30°
150°
$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{1}{2}$
$\frac{\sqrt{3}}{3}$
180°
0°
$\frac{1}{2}$
$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{\sqrt{3}}{2}$
0
360°
210°
330°
$-\frac{\sqrt{3}}{3}$
225°
315°
240°
300°
270°
- 1
$-\sqrt{3}$

ТРИГОНОМЕТРИЯ

Тригонометрические формулы

Основные тождества:

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \qquad tg\alpha \cdot ctg\alpha = 1$

$tg\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \qquad ctg\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$

$1 + tg^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha} \qquad 1 + ctg^2\alpha = \dfrac{1}{\sin^2\alpha}$

Формулы сложения:

$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta \pm \cos\alpha \cdot \sin\beta$

$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta \mp \sin\alpha \cdot \sin\beta$

$tg(\alpha \pm \beta) = \dfrac{tg\alpha \pm tg\beta}{1 \mp tg\alpha \cdot tg\beta};$

$ctg(\alpha \pm \beta) = \dfrac{ctg\alpha \cdot ctg\beta \mp 1}{ctg\beta \pm ctg\alpha}$

Формулы кратных углов:

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha \qquad \sin\alpha \cdot \cos\alpha = \dfrac{1}{2}\sin 2\alpha$

$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$

$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha \qquad \cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$

$tg2\alpha = \dfrac{2 \cdot tg\alpha}{1 - tg^2\alpha} \qquad ctg2\alpha = \dfrac{ctg^2\alpha - 1}{2 \cdot ctg\alpha}$

$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha \qquad \cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$

$tg3\alpha = \dfrac{3tg\alpha - tg^3\alpha}{1 - 3tg^2\alpha} \qquad ctg3\alpha = \dfrac{ctg^3\alpha - 3ctg\alpha}{3ctg^2\alpha - 1}$

Формулы половинных углов:

$2\sin^2\dfrac{\alpha}{2} = 1 - \cos\alpha \qquad 2\cos^2\dfrac{\alpha}{2} = 1 + \cos\alpha$

$1 \pm \sin\alpha = (\sin\dfrac{\alpha}{2} \pm \cos\dfrac{\alpha}{2})^2 \qquad tg^2\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{1 - \cos\alpha}{1 + \cos\alpha}$

$tg\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{\sin\alpha}{1 + \cos\alpha} = \dfrac{1 - \cos\alpha}{\sin\alpha}$

При использовании формул, содержащих tg и ctg, необходимо учитывать О.Д.З. левой и правой частей формул.

Формулы суммы:

$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$

$\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}$

$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$

$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}$

$tg\alpha \pm tg\beta = \dfrac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$

$ctg\alpha \pm ctg\beta = \dfrac{\sin(\beta \pm \alpha)}{\sin\alpha\sin\beta}$

$tg\alpha \pm ctg\beta = \dfrac{\pm\cos(\alpha \mp \beta)}{\cos\alpha\sin\beta}$

Формулы произведения:

$\sin\alpha\sin\beta = \dfrac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta))$

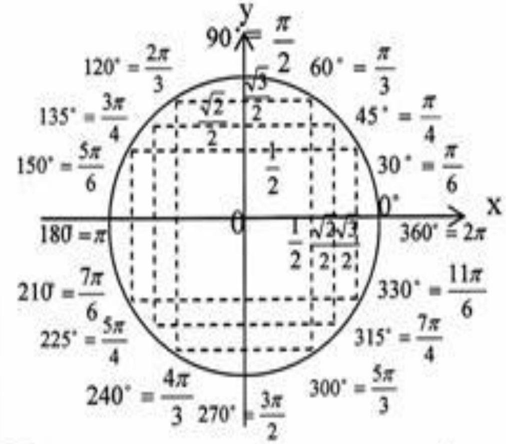
$\cos\alpha\cos\beta = \dfrac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta))$

$\sin\alpha\cos\beta = \dfrac{1}{2}(\sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta))$

Выражение функций через $tg\dfrac{\alpha}{2}$

$\sin\alpha = \dfrac{2tg(\alpha/2)}{1 + tg^2(\alpha/2)} \qquad \cos\alpha = \dfrac{1 - tg^2(\alpha/2)}{1 + tg^2(\alpha/2)}$

$tg\alpha = \dfrac{2tg(\alpha/2)}{1 - tg^2(\alpha/2)}$



$\pi\ рад = 180^\circ$

$1 рад = \dfrac{180^\circ}{\pi} \approx 57^\circ$

$1^\circ = \dfrac{\pi}{180} рад$

Обратные тригонометрические функции:

$\sin(\arcsin a) = a, \quad a \in [-1;1] \qquad cos(\arccos a) = a, \quad a \in [-1;1]$

$\arcsin(\sin a) = a, \quad a \in \left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right] \qquad \arccos(\cos a) = a, \quad a \in [0;\pi]$

$tg(arctga) = a, \quad a \in R \qquad ctg(arcctga) = a, \quad a \in R$

$arctg(tga) = a, \quad a \in \left(-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right) \qquad arcctg(ctga) = a, \quad a \in (0;\pi)$

Четность тригонометр-ких и обратнотриг-их функций:

1. четная: $\cos(-x) = \cos x$, $f(-x) = f(x)$
2. общего вида: $arc\cos(-x) = \pi - \arccos x$
   $arcctg(-x) = \pi - arcctgx$
3. нечетные: остальные, $f(-x) = -f(x)$

Рейтинг углов.

1. табличные: $30^\circ, 45^\circ, 180^\circ, 120^\circ, 210^\circ, 330^\circ$…(ф-лы приведения)
2. через 15: $15^\circ = 45^\circ - 30^\circ$, $105^\circ = 60^\circ + 45^\circ$,…(формулы сложения)
3. одинаковые: 17°, α, …(основные тождества)
4. кратные: $17^\circ, 34^\circ$; 2α, α, $\dfrac{\alpha}{2}$ …(кратных и половинных углов)
5. сумма или разность табличная: $127^\circ + 53^\circ = 180^\circ$, $93^\circ - 3^\circ = 90^\circ$, $2^\circ + 58^\circ = 60^\circ$, $35^\circ - 5^\circ = 30^\circ$ (формулы приведения, суммы, произведения, сложения)
6. произвольные: α и β; 5° и 2° (формулы суммы, произведения, сложения)

ФОРМУЛЫ ПРИВЕДЕНИЯ

$$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$$
$$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$$
$$tg(-\alpha) = -tg\,\alpha$$
$$ctg(-\alpha) = -ctg\,\alpha$$

Происходит от симметрии и периодичности движения точки по окружности. Формулами приведения называют формулы, с помощью которых значения тригонометрических функций аргументов (π/2±α), (π±α), (2π±α), (3π/2±α) – выражаются через значения **sin** α, **cos** α, **tg** α, **ctg** α.

ТАБЛИЦА ПРИВЕДЕНИЯ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

β	$\frac{\pi}{2}+\alpha$	$\pi+\alpha$	$\frac{3\pi}{2}+\alpha$	$\frac{\pi}{2}-\alpha$	$\pi-\alpha$	$\frac{3\pi}{2}-\alpha$	$2\pi-\alpha$
$\sin\beta$	$\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$
$\cos\beta$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$\cos\alpha$
$tg\,\beta$	$-ctg\,\alpha$	$tg\,\alpha$	$-ctg\,\alpha$	$ctg\,\alpha$	$-tg\,\alpha$	$ctg\,\alpha$	$tg\,\alpha$
$ctg\,\beta$	$-tg\,\alpha$	$ctg\,\alpha$	$-tg\,\alpha$	$tg\,\alpha$	$-ctg\,\alpha$	$tg\,\alpha$	$ctg\,\alpha$

ПРИМЕРЫ:

$$\sin 150^\circ = \sin(180^\circ - 30^\circ) = \sin 30^\circ = 0{,}5$$

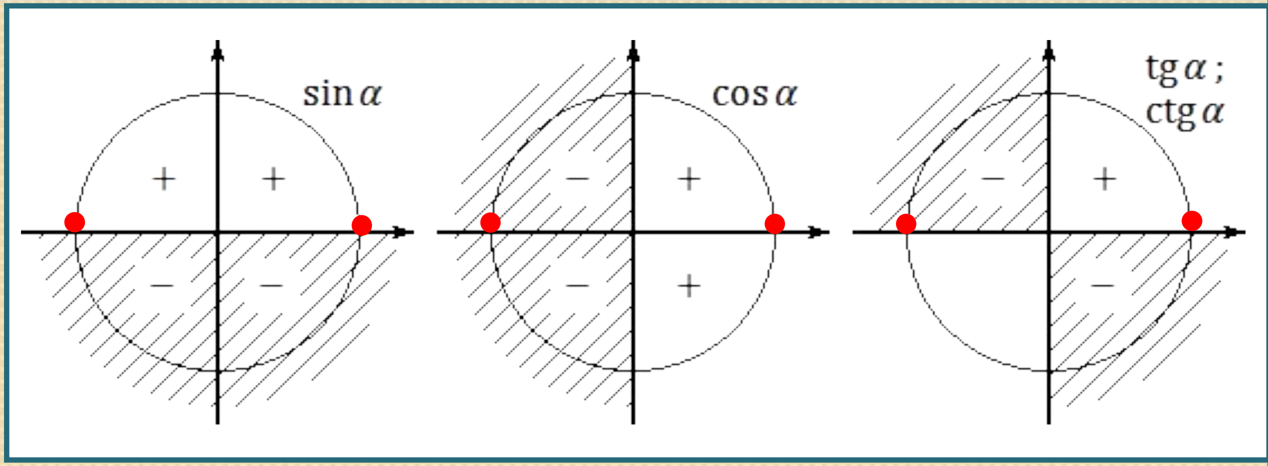
$$\sin(-960^\circ) = \sin[360^\circ \cdot (-3) + 120^\circ] = \sin 120^\circ = \sin(90^\circ + 30^\circ) = \cos 30^\circ = \sqrt{3}/2,$$

$$\cos(-960^\circ) = \cos[360^\circ \cdot (-3) + 120^\circ] = \cos 120^\circ = \cos(90^\circ + 30^\circ) = -\sin 30^\circ = -{}^1/_2,$$

$$\mathrm{tg}(-960^\circ) = \frac{\sin(-960^\circ)}{\cos(-960^\circ)} = \frac{\sqrt{3}/2}{-{}^1/_2} = -\sqrt{3},$$

$$\mathrm{ctg}(-960^\circ) = 1/\mathrm{tg}(-960^\circ) = -1/\sqrt{3}.$$

Функция / угол	π/2 – α	π/2 + α	π – α	π + α	3π/2 – α	3π/2 + α	2π – α	2π + α
sin	cos α	cos α	sin α	– sin α	– cos α	– cos α	– sin α	sin α
cos	sin α	– sin α	– cos α	– cos α	– sin α	sin α	cos α	cos α
tg	ctg α	– ctg α	– tg α	tg α	ctg α	– ctg α	– tg α	tg α
ctg	tg α	– tg α	– ctg α	ctg α	tg α	– tg α	– ctg α	ctg α
Функция / угол в °	90° – α	90° + α	180° – α	180° + α	270° – α	270° + α	360° – α	360° + α



$\sin(-330°) = -\sin 330°;$

$\sin(-330°) = -\sin 330° = -\sin(360° - 30°);$

$360° = 2\pi$ $\Longrightarrow$ наименование функции сохраняем;

$330° = 360° - 30°$ — аргумент IV четверти;

$-\sin(360° - 30°) = -(-\sin 30°) = -(-\frac{1}{2}) = \frac{1}{2};$

Ответ: $\sin(-330°) = \frac{1}{2}.$

ФОРМУЛЫ СЛОЖЕНИЯ
УГОЛ НЕ 90, НЕ 180, НЕ 270, НЕ 360

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$$

$$tg(\alpha+\beta)=\frac{tg\,\alpha+tg\,\beta}{1-tg\,\alpha\, tg\,\beta}$$

$$tg(\alpha-\beta)=\frac{tg\,\alpha-tg\,\beta}{1+tg\,\alpha\, tg\,\beta}$$

$$ctg(\alpha+\beta)=\frac{ctg\,\alpha\cdot ctg\,\beta-1}{ctg\,\beta+ctg\,\alpha}$$

$$ctg(\alpha-\beta)=\frac{ctg\,\alpha\cdot ctg\,\beta+1}{ctg\,\beta-ctg\,\alpha}$$

ПРИМЕРЫ:

$$\sin 75° = \sin(45° + 30°) = \sin 45° \cdot \cos 30° + \cos 45° \cdot \sin 30° =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4};$$

$$\cos 75° = \cos(45° + 30°) = \cos 45° \cdot \cos 30° - \sin 45° \cdot \sin 30° =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}.$$

Ответ: $\sin 75° = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$; $\cos 75° = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

$$\operatorname{tg} 75° = \operatorname{tg}(45° + 30°) = \frac{\operatorname{tg} 45° + \operatorname{tg} 30°}{1 - \operatorname{tg} 45° \operatorname{tg} 30°} =$$

$$= \frac{1 + \frac{\sqrt{3}}{3}}{1 - 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{3+\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}}.$$

ОСНОВНЫЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ТОЖДЕСТВА

1) $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

2) $tg\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

3) $ctg\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$

4) $tg\alpha \cdot ctg\alpha = 1$

5) $\dfrac{1}{\cos^2\alpha} = tg^2\alpha + 1$

6) $\dfrac{1}{\sin^2\alpha} = ctg^2\alpha + 1$

Найдите $\cos\alpha$, $tg\alpha$, $ctg\alpha$, *если* $\sin\alpha = \dfrac{12}{13}$.

Решение

$\sin\alpha = \dfrac{12}{13}.$

$$\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha} = \sqrt{1-\left(\frac{12}{13}\right)^2} = \sqrt{1-\frac{144}{169}} = \sqrt{\frac{169-144}{169}} = \sqrt{\frac{25}{169}} = \frac{5}{13}.$$

$$tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{12}{13} : \frac{5}{13} = \frac{12\cdot\cancel{13}}{\cancel{13}\cdot 5} = \frac{12}{5} = 2\frac{2}{5}.$$

$$ctg\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{5}{13} : \frac{12}{13} = \frac{5\cdot\cancel{13}}{\cancel{13}\cdot 12} = \frac{5}{12}.$$

Ответ: $\cos\alpha = \dfrac{5}{13}$, $tg\alpha = 2\dfrac{2}{5}$, $ctg\alpha = \dfrac{5}{12}$.

ФОРМУЛЫ ДВОЙНОГО И ТРОЙНОГО УГЛОВ (КРАТНЫХ УГЛОВ)

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$

$$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$$

$$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$$

$$tg\,2\alpha = \frac{2tg\,\alpha}{1 - tg^2\alpha}$$

$$ctg\,2\alpha = \frac{ctg^2\alpha - 1}{2ctg\,\alpha}$$

1) $\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$

2) $\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$

3) $tg\,3\alpha = \dfrac{3tg\,\alpha - tg^3\alpha}{1 - 3tg^2\alpha}$

4) $ctg\,3\alpha = \dfrac{ctg^3\alpha - 3ctg\,\alpha}{3ctg^2\alpha - 1}$

ПРИМЕР 1: Сократить дробь $\dfrac{1 + \sin 2x}{\cos 2x}$.

$$\frac{1 + \sin 2x}{\cos 2x} = \frac{(\cos x + \sin x)^2}{\cos^2 x - \sin^2 x} =$$

$$= \frac{(\cos x + \sin x)^2}{(\cos x + \sin x)(\cos x - \sin x)} = \frac{\cos x + \sin x}{\cos x - \sin x}.$$

ПРИМЕР 2:

Вычислить: $\cos^2\dfrac{\pi}{8} - \sin^2\dfrac{\pi}{8} =$

$$= \cos\frac{2\pi}{8} = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$