Франсуа Виет и его теорема как инструмент для решения уравнений

Человек живет,пока думает .

Решайте задачи и живите долго!

Только с алгеброй начинается строгое математическое учение.

(Н.И. Лобачевский)

Франсуа Виет

(1540-1603)

В 2010 году исполнилось 470 лет со дня рождения замечательного французского математика, положившего начало алгебре как науке о преобразовании выражений, создателя буквенного исчисления, Франсуа Виета.

Актуальность

- Уравнения не только имеют важное теоретическое значение, но и служат чисто практическим целям. Подавляющее число задач о пространственных формах и количественных отношениях реального мира сводится к решению различных видов уравнений.

- Уравнения решали двадцать пять веков назад. Они создаются и сегодня – как для использования в учебном процессе, так и для конкурсных экзаменов в вузы, для олимпиад самого высокого уровня.

Цель:

изучить материал о великом учёном, французском математике – Франсуа Виете, рассмотреть квадратные уравнения частного порядка, научиться использовать теорему Виета как инструмент для решения уравнений и задач, связанных с корнями и коэффициентами уравнения n-ой степени.

Задачи:

выяснить из различных источников кто такой Франсуа Виет, его вклад в математику;
узнать историю его жизни;
повторить понятие квадратного уравнения,
узнать об уравнениях частного порядка и их решении рациональным способом;
узнать какие уравнения называются уравнениями высших степеней;
рассмотреть теорему Виета как инструмент для решения уравнений и других задач.

Кто Вы, господин Виет?

Франсуа Виет – крупнейший французский математик 16 века

Родился в 1540 году во Франции в городе Фонтене-ле-Конт. По образованию юрист. Но все свое свободное время он отдавал занятиям математикой, а также астрономией. Особенно увлеченно он начал работать в области математики с 1584г. Виет детально изучил труды, как древних, так и современных ему математиков. Разработал почти всю элементарную алгебру. Известны «формулы Виета», дающие зависимость между корнями и коэффициентами алгебраического уравнения. Ввел буквенные обозначения для коэффициентов в уравнениях.

Математические открытия

Франсуа Виет
1540—1603

Главные открытия Ф. Виета изложены в знаменитом «Введении в аналитическое искусство», опубликованном в 1591 году. Основной замысел ученого замечательно удался: началось преобразование алгебры в мощное математическое исчисление. Франсуа называл алгебру аналитическим искусством. Он писал в письме к де Партене: «Все математики знали, что под алгеброй скрыты несравненные сокровища, но не умели их найти…»

Интересные факты из жизни и деятельности ученого

- Франсуа Виет, вычисляя периметры вписанного и описанного 322 216-угольников, получил 9 точных десятичных знаков.
- Впервые обозначать десятичные дроби с помощью запятой предложил Франсуа Виет. До него изображение дробей было весьма сложным. Так, например, дробь 0,3469 писалась так: 3(1)4(2)6(3)9(4).
- Виет первым стал обозначать буквами не только неизвестные, но и данные величины. Тем самым он внедрил в науку великую мысль о возможности выполнять алгебраические преобразования над символами, т.е. ввести понятие математической формулы.
- Ученый мог работать по трое суток без сна!

- **Теорему Виета можно обобщить на многочлены любой степени.**
- **Непосредственно применение трудов Виета очень затруднялось тяжелым и громоздким изложением. Из-за этого они полностью не изданы до сих пор.**
- **Г.Г. Цейтен отмечал, что чтение работ Виета затрудняется несколько изысканной формой, в которой повсюду сквозит его большая эрудиция, и большим количеством изобретенных им и совершенно не привившихся греческих терминов. Потому влияние его, столь значительное по отношению ко всей последующей математике, распространялось сравнительно медленно.**
- **Виет первым стал применять скобки, которые, правда, у него имели вид не скобок, а черты над многочленом.**

Квадратные уравнения

Квадратным уравнением называют уравнения вида $ax^2+bx+c = 0$,

где коэффициенты a, b, c – любые действительные числа, причём $a \neq 0$.

Квадратное уравнение называют приведённым, если его старший коэффициент равен 1.

Пример:

$$x^2 + 2x + 6 = 0.$$

Квадратное уравнение называют не приведенным, если старший коэффициент отличен от 1.

Пример:

$$2x^2 + 8x + 3 = 0.$$

Полное квадратное уравнение - квадратное уравнение, в котором присутствуют все три слагаемых, иными словами, это уравнение, у которого коэффициенты b и c отличны от нуля.

Теорема Виета

Очень любопытное свойство корней квадратного уравнения обнаружил французский математик Франсуа Виет. Это свойство назвали теорема Виета:

Чтобы числа x_1 и x_2 являлись корнями уравнения:

$$\mathbf{ax^2 + bx + c = 0}$$

необходимо и достаточно выполнения равенства

$x_1 + x_2 = -b/a$ и $x_1 x_2 = c/a$

Пример.

$x^2-4x-12=0$

$x_1=-2 \quad x_2=6$

По праву в стихах быть воспета
О свойствах корней теорема Виета.
Что лучше, скажи, постоянства такого:
Умножишь ты корни и дробь уж готова:
В числителе С, в знаменателе А,
А сумма корней тоже дроби равна
Хоть с минусом дробь эта, что за беда-
В числителе *В*, в знаменателе *А*.

И. Дырченко

$\frac{c}{a}$

Квадратные уравнения частного характера

1) Если a + b + c = 0 в уравнении $ax^2 + bx + c = 0$, то $x_1=1$, а $x_2 = \frac{c}{a}$

2)Если a - b + c = 0, в уравнении $ax^2 + bx + c= 0$, то:

$$\mathbf{x_1=-1,\ а\ x_2 = -\frac{c}{a}}$$

3) Метод “переброски”

Корни квадратных уравнений $y^2 + by + ac = 0$ и $ax^2 + bx + c = 0$ связанны соотношениями:

$$x_1 = \frac{y_1}{a} \quad \text{и } x_2 = \frac{y_2}{a}$$

Пример

$418x^2 - 1254x + 836 = 0$

Этот пример очень тяжело решить через дискриминант, но, зная выше приведенную формулу его с легкостью можно решить.

$a = 418$, $b = -1254$, $c = 836$.

$x_1 = 1$, $x_2 = 2$

Формула Виета для многочленов (уравнений) высших степеней

Формулы, выведенные Виетом для квадратных уравнений, верны и для многочленов высших степеней.

Пусть многочлен

$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$ имеет n различных корней x_1 , x_2 …, x_n.

В этом случае он имеет разложение на множители вида:

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n = a_0(x - x_1)(x - x_2)*\ldots*(x - x_n)$$

Разделим обе части этого равенства на $a_0 \neq 0$ и раскроем в первой части скобки. Получим равенство:

$$x^n + \left(\frac{a_1}{a_0}\right)x^{n-1} + \ldots + \left(\frac{a_n}{a_0}\right) = x^n - (x_1 + x_2 + \ldots + x_n)\, x^{n-1} + (x_1x_2$$

$$+ x_2x_3 + \ldots + x_{n-1}x_n)x^{n-2} + \ldots + (-1)^n x_1x_2 \ldots x_n$$

Но два многочлена тождественно равны в том и только в том случае, когда коэффициенты при одинаковых степенях равны. Отсюда следует, что выполняется равенство

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = -\frac{a_1}{a_0}$$

$$x_1x_2 + x_2x_3 + \ldots + x_{n-1}x_n = \frac{a_2}{a_0}$$

$$x_1x_2 \ldots x_n = (-1)^n \frac{a_n}{a_0}$$

Например, для многочленов третей степени

$a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3$ имеем тождества

$$x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{a_1}{a_0}$$

$$x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = \frac{a_2}{a_0}$$

$$x_1x_2x_3 = -\frac{a_3}{a_0}$$

Если старший коэффициент многочлена $a_0 \neq 1$, то для применения формул Виета нужно разделить все коэффициенты на a_0.

В этом случае формулы Виета дают выражение для отношений всех коэффициентов к старшему. Из последней формулы Виета следует, что если корни многочлена целочисленные, то они являются делителями его свободного члена, который также целочислен.

Обратные корни

Напишем приведённое кубическое уравнение $y^3 + b_1 y^2 + b_2 y + b_3 = 0$, корни которого обратны корням уравнения $x^3 - 3x^2 + 7x + 5 = 0$

Решение:

1) Пусть x_1, x_2, x_3 - корни уравнения $x^3 - 3x^2 + 7x + 5 = 0$

2) Т.к. $a = 1$, то по формулам Виета

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_1 x_3 = 7 \\ x_1 x_2 x_3 = -5 \end{cases}$$

3) Пусть y_1, y_2, y_3 - корни уравнения $y^3 + b_1 y^2 + b_2 y + b_3 = 0$

4) Тогда $y_1 = \frac{1}{x_1}$, $y_2 = \frac{1}{x_2}$, $y_3 = \frac{1}{x_3}$.

5) Т.к. $a = 1$, то по формулам Виета

$$b_1 = -(y_1 + y_2 + y_3) = -\frac{x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3}{x_1 x_2 x_3} = -\frac{7}{5}$$

$$b_2 = y_1 y_2 + y_1 y_3 + y_2 y_3 = -\frac{x_1 + x_2 + x_3}{x_1 x_2 x_3} = \frac{3}{5}$$

$$b_3 = -y_1 y_2 y_3 = -\frac{1}{x_1 x_2 x_3} = \frac{1}{5}$$

6) Следовательно искомое уравнение имеет вид:

$y^3 + \frac{7}{5} y^2 - \frac{3}{5} y + \frac{1}{5} = 0$, или $5y^3 + 7y^2 - 3y + 1 = 0$.

Покажем, что формулы Виета позволяют рационально решать уравнения 2-й и 3-й степеней.
Проведём эксперимент для уравнения 2-й степени

В это опыте я сравнила время, потраченное на решение уравнения $x^2+3x+2=0$ через дискриминант, и время на решение этого же уравнения с помощью теоремы Виета. В результате получилось, что в первом случае ученик тратит 35 секунд, а во втором- 15!

Вывод: С формулами Виета можно сэкономить время!

Проведём эксперимент для уравнения 3-й степени

Дано уравнение:

$$x^3 - 3x^2 - x + 3 = 0$$

Ищем корень среди чисел:

$$\pm 1; \pm 3$$

Подбором находим один из корней уравнения, - 1.

Следовательно, $x^3 - 3x^2 - x + 3$ делится на $(x+1)$.

$$
\begin{array}{r|l}
-\; x^3-3x^2-x+3 & x+1 \\ \cline{2-2}
x^3+x^2 & x^2-4x+3 \\ \cline{1-1}
-\; -4x^2-x & \\
-4x^2-4x & \\ \cline{1-1}
-\; 3x+3 & \\
3x+3 & \\ \cline{1-1}
0 &
\end{array}
$$

$$(x+1)(x^2-4x+3)=0$$

$x_1=-1$ или $x^2-4x+3=0$

По формулам Виета:

$$x_2=3$$

$$x_3=1$$

Ответ: $-1;1;3.$

Теперь решим то же уравнение с помощью формул Виета

$$x^3 - 3x^2 - x + 3 = 0$$

По формулам Виета:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3 = -1 \\ x_1x_2x_3 = -3 \end{cases}$$

Следовательно, корни уравнения равны $-1;1;3$.

Вывод: формулы Виета позволяют рационально решить это уравнение.

При решении уравнений было замечено, что уравнения

$$x^2 - 6x + 5 = 0$$

и

$$5x^2 - 6x + 1 = 0$$

имеют взаимно обратные корни.

Гипотеза

Корни уравнений $ax^2 + bx + c = 0$

и $cx^2 + bx + a = 0$, где $a \neq 0, c \neq 0$,

взаимно обратные.

Доказательство

По формулам Виета из первого уравнения:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a} \\ x_1 \times x_2 = \dfrac{c}{a} \end{cases}$$

Рассмотрим числа $\dfrac{1}{x_1}$ и $\dfrac{1}{x_2}$.

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} = -\frac{b}{a} : \frac{c}{a} = -\frac{b}{c}$$

$$\frac{1}{x_1} \times \frac{1}{x_2} = \frac{1}{x_1 x_2} = \frac{a}{c}$$

Значит, эти числа являются корнями уравнения $x^2 + \frac{b}{c}x + \frac{a}{c} = 0$, что равносильно уравнению

$$cx^2 + bx + a = 0.$$

	Кол-во чел. опрошенных	**Кол-во чел. знающих квадратные уравнения**	**Кол-во чел. умеющих решать их с помощью т. Виета**	**Кол-во чел. знающих уравнения высших степеней**	**Кол-во чел. умеющих решать уравнения высших степеней с помощью т. Виета**
9Б класс	25	25	12	18	8
10 класс	14	14	14	2	2
11 класс	14	14	14	2	0
Преподаватели	4	3	3	3	2

Спасибо

за

внимание!