# ФУНКЦІЇ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ

- **Функція двох змінних**
- **Частинна похідна.**
- **Диференціал функції.**
- **Дотична площина і нормаль до поверхні**
- **Градієнт**
- **Застосування диференціала для наближених обрахунків.**
- **Дослідження функції двох змінних на умовний екстремум**
- **Найбільше і найменше значення функції в замкненій області**

# Функція двох змінних

*Означення:* $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ - **функція n змінних**, яка набору n чисел ставить у відповідність одне число.

*Приклад.* $u = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + ... + x_n^2}$.

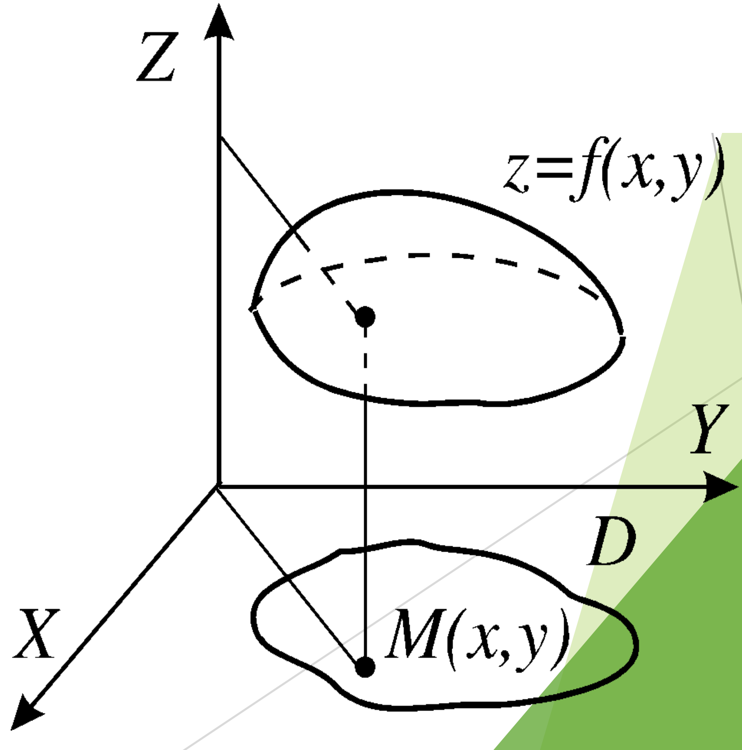
При n=2 $z = f(x; y)$ - функція двох змінних.

*Приклад.* $z = x^2 + x\sin y$.

**Графік функції двох змінних** – це поверхня.

$$z = f(x, y)$$

$$z = f(M)$$




Точці M площини Oxy з координатами M(x,y) ставиться у відповідність число z, яке відкладаємо на осі Oz.

# Функція двох змінних

**Область визначення функції двох змінних** – це область допустимих значень для пар (x,y), тобто це деяка частина площини Oxy, при яких можна обчислити значення функції.

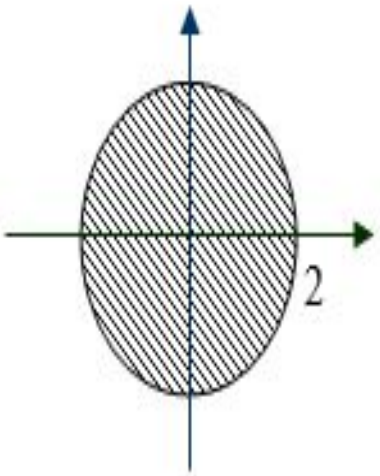
ОДЗ зображаємо на площині Oxy, заштриховуючи її. Це також проекція графіка функції на площину Oxy.

*Приклад:* $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$

$$4 - x^2 - y^2 \geq 0$$

$$x^2 + y^2 \leq 4$$

$$x^2 + y^2 = 4$$




коло з центром в початку координат і радіусом 2.

ОДЗ -- круг з центром в початку координат і радіусом 2.

# Функція двох змінних

Розгляньмо функцію $u = f(M), M(x_1; x_2; \ldots; x_n) \in D$. Нехай точка

$$M_0(x_{10}; x_{20}; \ldots; x_{n0})$$

є граничною точкою множини $D$.

**Означення** Число $A$ називають *границею функції* $f$ у точці $M_0$, якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ можна вказати таке $\delta > 0$, що для всіх точок $M$ з проколеного $\delta$-околу точки $M_0$ виконано нерівність

$$\boxed{\left|f(M) - A\right| < \varepsilon}$$

і позначають

$$\boxed{\lim_{M \to M_0} f(M) = \lim_{\substack{x_1 \to x_{10} \\ \cdots\cdots\cdots \\ x_n \to x_{n0}}} f(x_1, \ldots, x_n) = A.}$$

**Означення** Функцію $u = f(M)$ називають *неперервною в точці* $M_0$, якщо

$$\boxed{\lim_{M \to M_0} f(M) = f(M_0).}$$

Якщо позначити

$$\Delta f(M_0) = f(M) - f(M_0),$$

то умову неперервності функції $u = f(M)$ у точці $M_0$ можна переписати як

$$\boxed{\lim_{M \to M_0} \Delta f(M_0) = 0.}$$

Точки, в околі яких функція означена (крім, можливо, самих точок), але не є неперервною називають *точками розриву* функції.

# Функція двох змінних

**Означення** Функцію $z = f(x, y)$ називають *диференційовною в точці* $M_0$, якщо в деякому околі цієї точки повний приріст функції можна записати як

$$\boxed{\Delta f(M_0) = A\Delta x + B\Delta y + \alpha\Delta x + \beta\Delta y,}$$

де $A = A(M_0)$, $B = B(M_0)$ — сталі щодо $\Delta x, \Delta y$;
$\alpha = \alpha(\Delta x, \Delta y) \to 0$ і $\beta = \beta(\Delta x, \Delta y) \to 0$, коли $\Delta x \to 0, \Delta y \to 0$.

**Теорема** (необхідні умови диференційовності). Якщо функція $z = f(x, y)$ диференційовна в точці $M_0(x_0; y_0)$, то:
1) в цій точці існують частинні похідні за обома змінними, причому

$$\boxed{\frac{\partial f(M_0)}{\partial x} = A; \frac{\partial f(M_0)}{\partial x} = B;}$$

2) функція неперервна в точці $M_0$.

**Теорема** (достатня умова диференційовності). Якщо функція $z = f(x, y)$ має неперервні частинні похідні в деякому околі точки $M_0$, то функція $z = f(x, y)$ диференційовна в точці $M_0$.

# Частинні прирости і частинні похідні

Якщо $z = f(x, y)$, то частинні прирости за змінними x, y та повний приріст функції визначається за формулами:

$$\Delta_x z = f(x + \Delta x, y) - f(x, y);$$

$$\Delta_y z = f(x; y + \Delta y) - f(x, y);$$

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y).$$

Якщо існує $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x}$, то ця границя називається частинною похідною функції $z = f(x, y)$ за змінною $x$ і позначається одним із символів: $\frac{\partial z}{\partial x}$, $z'_x$.

Аналогічно визначається частинна похідна за змінною $y$. Частинна похідна за однією із змінних знаходиться за правилами диференціювання функцій однієї змінної, при чому друга змінна залишається сталою.

# Частинні прирости і частинні похідні

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x z}{\Delta x} \qquad \frac{\partial z}{\partial x};\quad z'_x;\quad \frac{\partial f(x,y)}{\partial x};\quad f'_x(x,y).$$

$$\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta_y z}{\Delta y} \qquad \frac{\partial z}{\partial y};\quad z'_y;\quad \frac{\partial f(x,y)}{\partial y};\quad f'_y(x,y).$$

# Частинні прирости і частинні похідні

П р и к л а д: Знайти частинні похідні $\frac{\partial z}{\partial x}$ і $\frac{\partial z}{\partial y}$ функцій:

а) $z = 4xy^3 + 2\sqrt{x}y^2 + 7y$; б) $z = e^x \cdot \sqrt{y}$; в) $z = \dfrac{\sqrt{x^2 + 3y}}{sinxy}$.

*Розв'язання:*

а) $z = 4xy^3 + 2\sqrt{x}y^2 + 7y$;

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 4 \cdot 1 \cdot y^3 + 2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot y^2 + 0 = 4y^3 + \frac{y^2}{\sqrt{x}};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 4 \cdot x \cdot 3y^2 + 2\sqrt{x} \cdot 2y + 7 = 12xy^2 + 4y\sqrt{x} + 7.$$

б) $z = e^x \cdot \sqrt{y}$;

$$\frac{\partial z}{\partial x} = e^x \cdot \sqrt{y}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = e^x \cdot \frac{1}{2\sqrt{y}}.$$

# Частинні прирости і частинні похідні

в) $z = \dfrac{\sqrt{x^2+3y}}{sinxy}$;

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+3y}} \cdot sinxy - \sqrt{x^2+3y} \cdot ycosxy}{sin^2 xy} = \frac{\dfrac{x}{\sqrt{x^2+3y}} \cdot sinxy - \sqrt{x^2+3y} \cdot ycosxy}{sin^2 xy};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\dfrac{3}{2\sqrt{x^2+3y}} \cdot sinxy - \sqrt{x^2+3y} \cdot xcosxy}{sin^2 xy}.$$

# Повний приріст і повний диференціал

***Озн. 1:*** Повним диференціалом функції двох змінних $dz$ називається головна лінійна відносно $\Delta x$ та $\Delta y$ частина повного приросту функції, який обчислюється за формулою: $dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$.

***Озн. 2:*** Частинними похідними другого порядку від функції $z = f(x, y)$ називають частинні похідні від її перших похідних:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right), \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right), \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right), \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right).$$

Останні дві називають мішаними і вони рівні між собою за умови їх неперервності.

Повний диференціал обчислюється за формулою:

$$d^2 z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(dx)^2 + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(dy)^2 \qquad (1)$$

# Повний приріст і повний диференціал

П р и к л а д: Знайти похідну другого порядку функції

$$z = 4x^5y^3 + 2y^2 + 3xy.$$

*Розв'язання:* Обчислимо похідні першого порядку:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 20x^4y^3 + 3y; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 12x^5y^2 + 4y + 3x.$$

Обчислимо похідні другого порядку:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = 80x^3y^3;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = 24x^5y + 4;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = 60x^4y^3 + 3.$$

Тоді повна похідна другого порядку:

$$d^2z = \left(80x^3y^3\right)d^2x + 2\left(60x^4y^3 + 3\right)dxdy + \left(24x^5y + 4\right)d^2y$$

# Повний приріст і повний диференціал

$$\Delta z = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y)$$

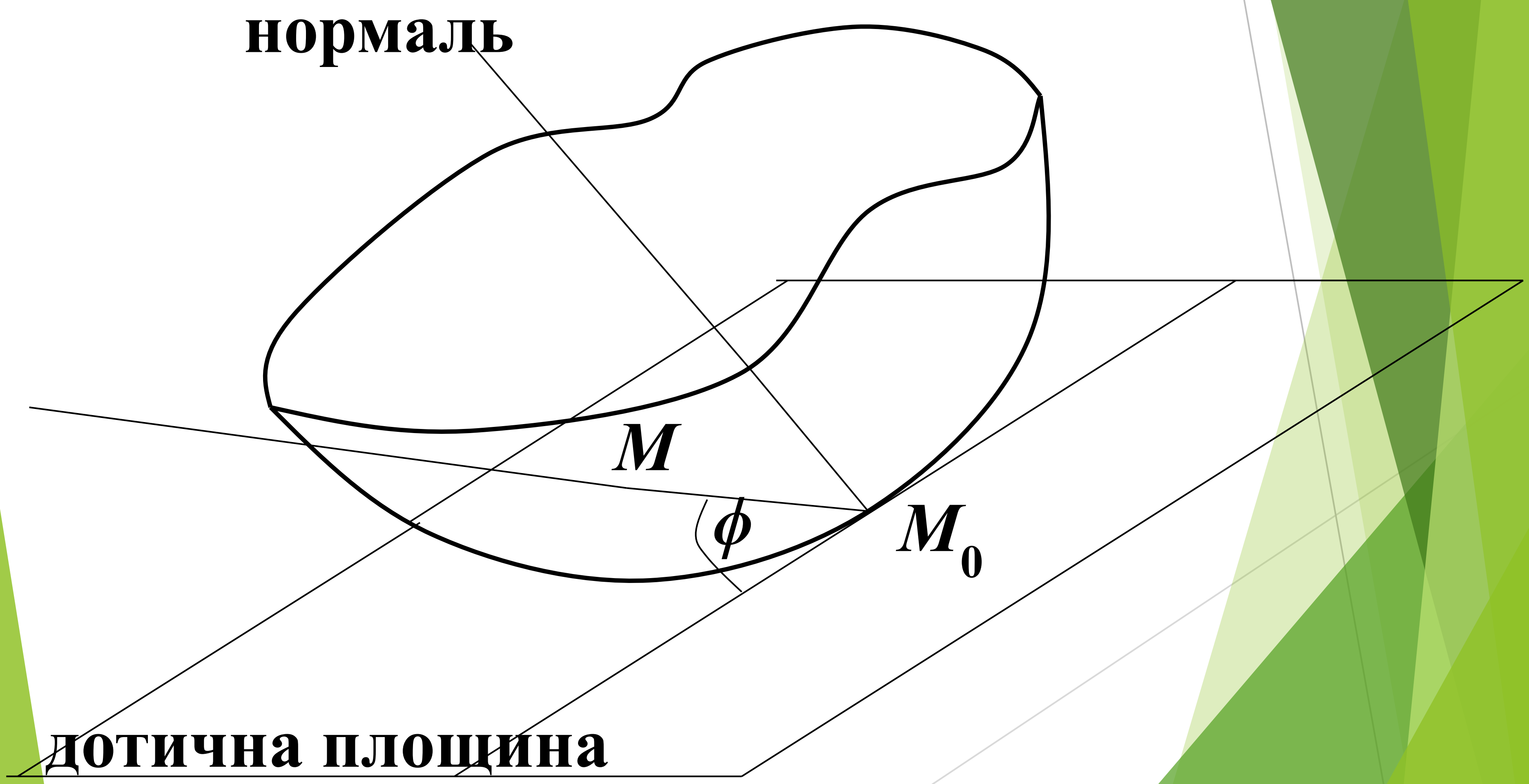
$$dz = f'_x(x,y)dx + f'_y(x,y)dy$$

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$$

$$d^2 z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2$$

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz$$

# Дотична площина і нормаль до поверхні



$$F(x,y,z)=0 \qquad M_0(x_0,y_0,z_0)$$

$$\left(F_x'\right)_{M_0}(x-x_0)+\left(F_y'\right)_{M_0}(y-y_0)+\left(F_z'\right)_{M_0}(z-z_0)=0$$

$$\frac{x-x_0}{\left(F_x'\right)_{M_0}}=\frac{y-y_0}{\left(F_y'\right)_{M_0}}=\frac{z-z_0}{\left(F_z'\right)_{M_0}}$$

$$z=f(x,y)$$

$$z-z_0=f_x'(x_0,y_0)(x-x_0)+f_y'(x_0,y_0)(y-y_0)$$

$$\frac{x-x_0}{f_x'(x_0 y_0)}=\frac{y-y_0}{f_y'(x_0,y_0)}=\frac{z-z_0}{-1}$$

$$z = x^2 - 2xy + y^2 - x + 2y \qquad M(1, 1, 1)$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x - 2y - 1; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -2x + 2y + 2$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_M = -1; \quad \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_M = 2;$$

$$z - 1 = -(x-1) + 2(y-1) \quad \text{или} \quad x - 2y + z = 0$$

$$\frac{x-1}{-1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{-1}$$