11 класс

экстернат

Производная

- Производной функции *f* в точке *x0* называется число, к которому стремится разностное отношение

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

при Δx, стремящемся к нулю.

Правила дифференцирования

$$(u+v)' = u' + v'$$

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$$

$$(C \cdot u)' = C \cdot u'$$

$$(\frac{u}{v})' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

$$(x^n)' = nx^{n-1}$$

$$C' = 0$$

$$x' = 1$$

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Пример

$$(x^2 + x^3)' =$$

$$\left(\frac{1}{x} + 5x - 2\right)' =$$

$$(x^3 + \sqrt{x})' =$$

$$\left(\frac{x^3 - 3x}{1 + 4x^5}\right)' =$$

$$(\sqrt{x}(3x^5 - x))' =$$

Производная сложной функции

$$h'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$$

Пример

$$((2x-7)^8)' =$$

$$(\sqrt{4x^2+5})' =$$

$$((5x-2)^{13}-(4x+7)^{-6})' =$$

Производная тригонометрических функций

$$(\sin x)' = \cos x$$

$$(\cos x)' = -\sin x$$

$$(tgx)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$(ctgx)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

Пример

$$(2\sin x)' =$$

$$(\cos x - tgx)' =$$

$$(2\cos\frac{x}{2})' =$$

$$(x^3 \cdot \sin 2x)' =$$

$$(\frac{x}{\sin x})' =$$

Метод интервалов

$$\frac{x^2-1}{x^2-5x+6}\geq 0$$

Пример

$$x^2 - 5x + 4 \le 0$$

$$\frac{(x-2)(x-4)}{x^2 + 2x - 3} \ge 0$$

Возрастание (убывание) функции

Найти промежутки возрастания и убывания функции:

$$f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + 1$$

Пример

$$f(x) = x^3 - 27x$$

$$f(x) = 2 + 9x + 3x^2 - x^3$$

- Внутренние точки области определения функции, в которых ее производная равна нулю или не существует, называются ***критическими точками*** этой функции

Признак максимума функции

- Если в точке x_0 производная меняет знак с плюса на минус, то x_0 есть точка максимума

Признак минимума функции

- Если в точке x_0 производная меняет знак с минуса на плюса, то x_0 есть точка минимума

Пример

- Исследовать на экстремумы функцию

$$y = 2x^3 - 15x^2 + 36x + 1$$

Решение

$$y' = (2x^3)' - (15x^2)' + (36x)' + (1)'$$

$$y' = 6x^2 - 30x + 36$$

$$6x^2 - 30x + 36 = 0$$

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

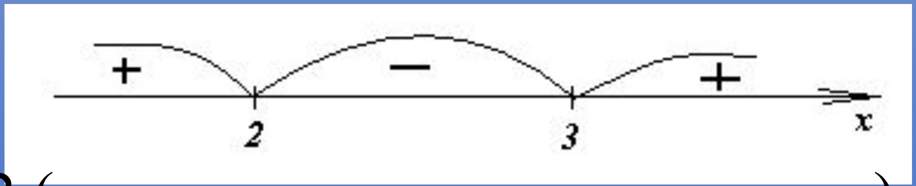
$$D = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 25 - 24 = 1$$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{1}}{2 \cdot 1} = \frac{5 \pm 1}{2}$$

$$x_1 = 3$$

$$x_2 = 2$$

$$y' = (x-3)(x-2)$$



x=2 (меняет знак с плюса на минус) – точка максимума

x= 3 (меняет знак с минуса на плюс) – точка минимума

$$x_{\max} = 2 \Rightarrow y_{\max} = 2 \cdot 2^3 - 15 \cdot 2^2 + 36 \cdot 2 + 1 = 29$$

$$x_{\min} = 3 \Rightarrow y_{\min} = 2 \cdot 3^3 - 15 \cdot 3^2 + 36 \cdot 3 + 1 = 28$$

Исследование функций и построение их графиков

Схема исследования функции (10 класс)

1. Найти область определения и значения данной функции
2. Выяснить, обладает ли функция особенностями, облегчающими исследование, т.е. является ли функция: а) четной или нечетной; б) периодической
3. Вычислить координаты точек пересечения графика с осями координат
4. Найти промежутки знакопостоянства функции
5. выяснить, на каких промежутках функция возрастает, а на каких убывает
6. Найти точки экстремума, вид экстремума (max или min) и вычислить значения функции в этих точках
7. Исследовать поведение функции в окрестности характерных точек, не входящих в область определения и при больших (по модулю) значениях аргумента

- Исследовать функцию и построить ее график:

$$y = \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - x^2$$

Решение

1. Область определения: D (y) = R
2. Четность, нечетность, периодичность

$$y(-x)=\frac{(-x)^4}{4}-\frac{(-x)^3}{3}-(-x)^2=\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}-x^2$$

тогда функция является ни четной ни нечетной

ни периодическая

3. Найдем точки пересечения графика

с Ox $(y = 0)$:

$$\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - x^2 = 0$$

$$3x^4 - 4x^3 - 12x^2 = 0$$

$$x^2(3x^2 - 4x - 12) = 0$$

$$x^2 = 0 \qquad 3x^2 - 4x - 12 = 0$$

$$x_1 = 0 \qquad D = (-4)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-12) = 16 + 144 = 160$$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{160}}{6} = \frac{4 \pm 4\sqrt{10}}{6} = \frac{2 \pm 2\sqrt{10}}{3}$$

$$x_2 \approx -1{,}4$$

$$x_3 \approx 2{,}8$$

Пересечения с *Oy*: x = 0, y = 0

Возьмем также дополнительные точки:

$$y(1) = -\frac{13}{12}$$

$$y(3) = \frac{9}{4}$$

4. Найдем производную:

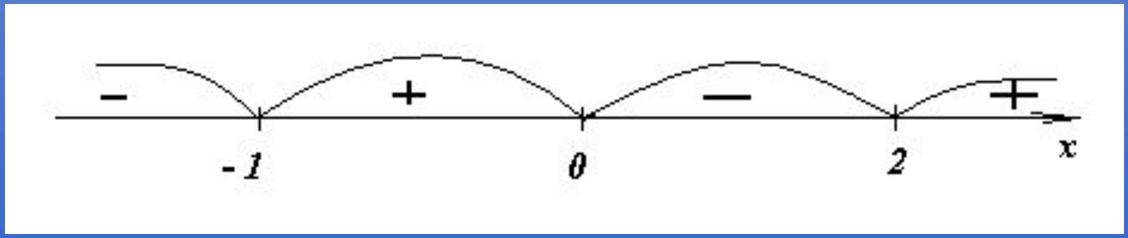
$$y' = (\frac{x^4}{4})' - (\frac{x^3}{3})' - (x^2)' = x^3 - x^2 - 2x = x(x^2 - x - 2) = x(x+1)(x-2)$$

$$x(x+1)(x-2) = 0$$

$$x_1 = 0$$

$$x_2 = -1$$

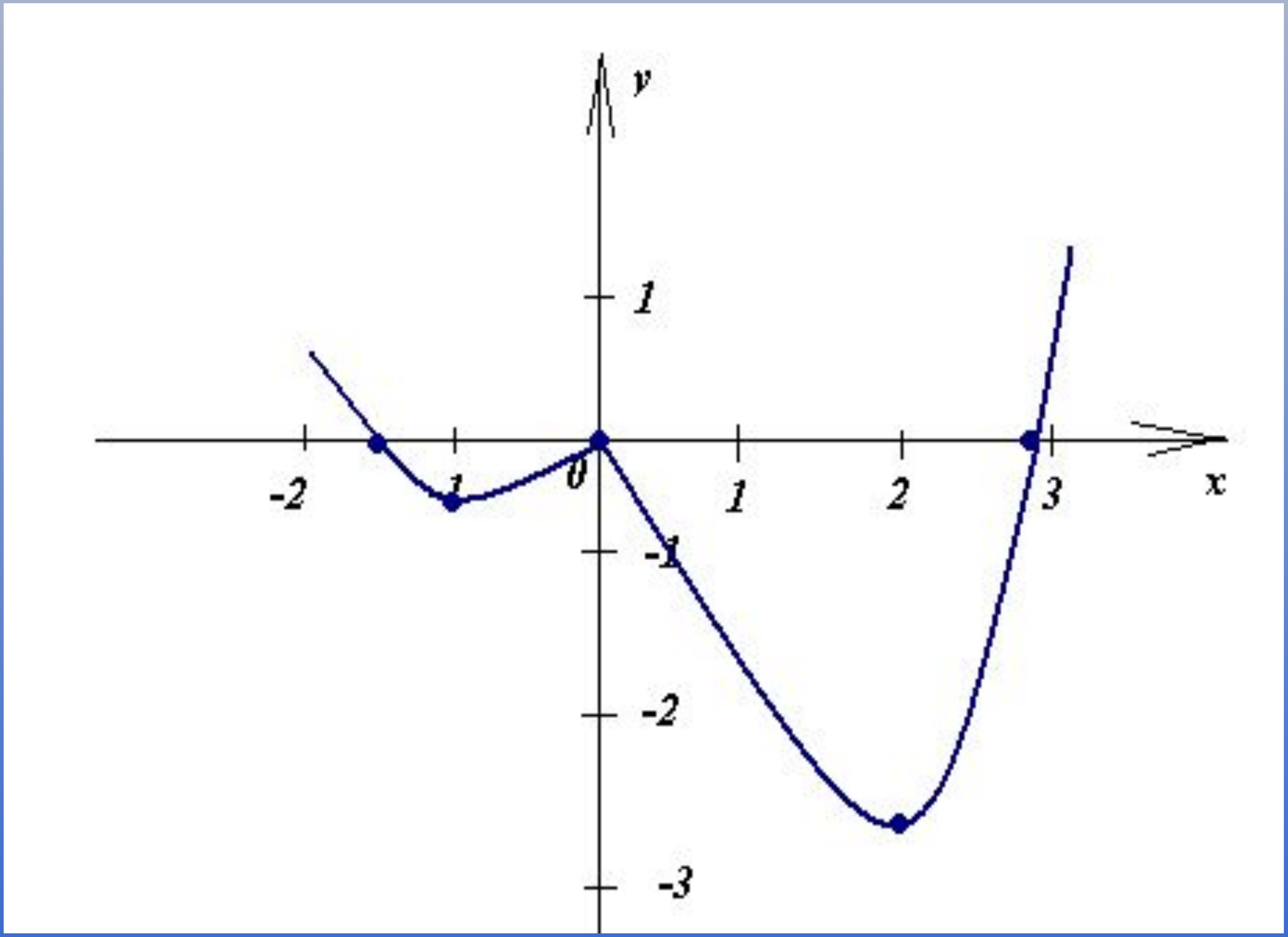
$$x_3 = 2$$



5. Составим таблицу:

x	$(-\infty; -1)$	-1	$(-1; 0)$	0	$(0; 2)$	2	$(2; +\infty)$
$f'(x)$	-	0	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\searrow$	$-\frac{5}{12}$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\frac{8}{3}$	$\nearrow$
	убывает	*min*	*возрастает*	*max*	*убывает*	*min*	*возрастает*

6. Строим график:



Наибольшее и наименьшее значение функции

- Чтобы найти наибольшее и наименьшее значения функции, имеющей на отрезке конечное число критических точек, нужно вычислить значения функции во всех критических точках и на концах отрезках, а затем из полученных чисел выбрать наибольшее и наименьшее.

Пример

- Найдем наибольшее и наименьшее значения функции

$$f(x) = x^3 - 1{,}5x^2 - 6x + 1$$

на отрезке $[-2;0]$

Определение первообразной. Основное свойство первообразной

- Функция F называется первообразной для функции f на заданном промежутке, если для всех x из этого промежутка

$$F'(x) = f(x)$$

Пример № 1

- Функция $F(x) = \frac{x^3}{3}$ есть первообразная для функции $f(x) = x^2$ на интервале (- ∞;∞), т.к.

$$F'(x) = (\frac{x^3}{3})' = \frac{1}{3}(x^3)' = \frac{1}{3} \cdot 3x^2 = x^2 = f(x)$$

Пример № 2

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$F(x) = ?$$

Решить

$$(...)' = 7x$$

$$(...)' = \frac{1}{\sin^2 x}$$

$$(...)' = -\frac{1}{x^2}$$

$$(...)' = \sin 3x$$

$$(...)' = \cos x$$

$$(...)' = 2\sin x$$

$$(...)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$(...)' = \sin(2x+3)$$

Теорема

- Любая первообразная для функции f на промежутке I может быть записана в виде

$$\boldsymbol{F(x) + C},$$

где $F(x)$ – одна из первообразных для функции $f(x)$ на промежутке I, а C – произвольная постоянная

Таблица первообразных

Функция	k (постоянная)	x^n $(n \in Z,$ $n \neq -1)$	$\dfrac{1}{\sqrt{x}}$	$\sin x$	$\cos x$	$\dfrac{1}{\cos^2 x}$	$\dfrac{1}{\sin^2 x}$
Общий вид первообразных для f	$kx + C$	$\dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C$	$2\sqrt{x} + C$	$-\cos x + C$	$\sin x + C$	$\operatorname{tg} x + C$	$-\operatorname{ctg} x + C$

Правило № 1

- Если F есть первообразная для f, а G – первообразная для g, то $F + G$ есть первообразная для $f + g$

Пример

- Найти общий вид первообразных для функции

$$f(x) = x^3 + \frac{1}{x^2}$$

Правило № 2

- Если F есть первообразная для f, а k- постоянная, то функция kF – первообразная для kF

Пример

- Найдем одну из первообразных для функции

$$f(x) = 5\cos x$$

Правило № 3

- Если *F(x)* есть первообразная для *f(x)*, а *k* и *b* – постоянные, причем $k \neq 0$, то

$$\frac{1}{k}F(kx+b)$$

есть первообразная для $f(kx + b)$

Пример

- Найдем одну из первообразных для функции

$$f(x) = \frac{1}{(7-3x)^5}$$

Решить

$$f(x) = 2\sin 3x$$

$$f(x) = 3\cos 2x$$

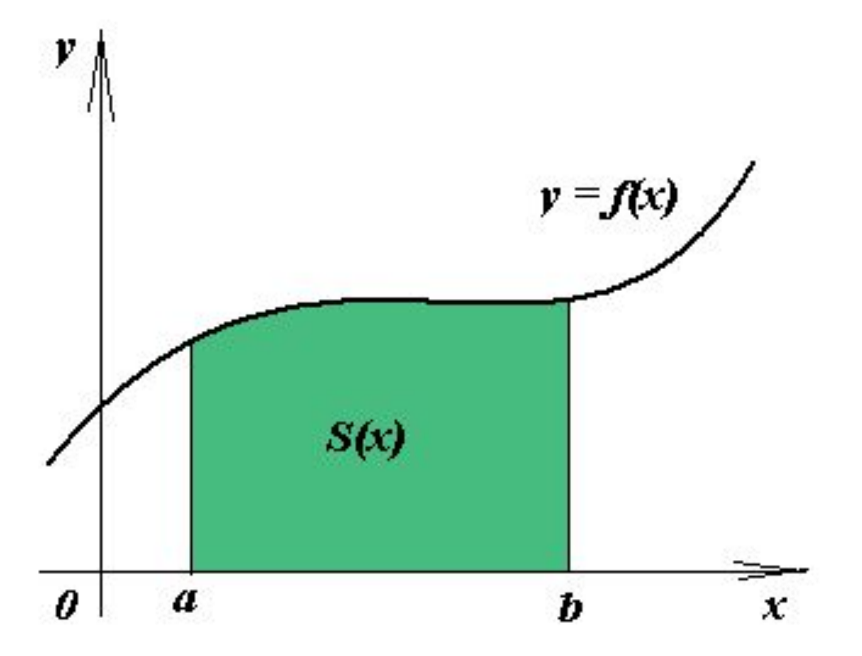
$$f(x) = 2 - x^3 + \frac{1}{x^3}$$

$$f(x) = x - \frac{2}{x^5} + \cos x$$

Площадь криволинейной трапеции

- Если f – непрерывная и неотрицательная на отрезке $[a; b]$ функция, а F – ее первообразная на этом отрезке, то площадь S соответствующей криволинейной трапеции равна приращению первообразной на отрезке $[a; b]$, т.е.

$$S = F(b) - F(a)$$



Пример

- Вычислим площадь S криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции $f(x) = x^2$, прямыми y = 0,

x = 1 и x = 2

Понятие об интеграле

- Для любой непрерывной на отрезке [a; b] функции f (не обязательно неотрицательной) S_n при $n \to \infty$ стремится к некоторому числу. Это число называется ***интегралом функции*** f от a до b и обозначается

$$\int_a^b f(x)dx$$

$$\int_a^b f(x)dx$$

- Читается: «Интеграл от *a* до *b* эф от икс дэ икс»
- Числа *a* и *b* – пределы интегрирования: *a* – нижний предел, *b* – верхний предел
- Функция *f* – подынтегральная функция
- *x* – переменная интегрирования

Формула Ньютона - Лейбница

- Если F – первообразная для f на $[a; b]$, то

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Пример

- Вычислить $$\int_{-1}^{2} x^2 dx$$