Функции и их графики

Содержание

Содержание

Введение

При изучении явлений окружающего мира и в практической деятельности нам приходится рассматривать величины различной природы: длину, площадь, объём, массу, температуру, время и т. д. В зависимости от рассматриваемых условий одни из величин имеют постоянные числовые значения, у других эти значения переменные. Такие величины соответственно называются постоянными и переменными.

Математика изучает зависимость между переменными в процессе их изменения. Например, при изменении радиуса круга меняется и его площадь, и мы рассматриваем вопрос об изменении площади круга в зависимости от изменения его радиуса.

Математическим выражением взаимной связи реальных величин является идея функциональной зависимости. Понятие функции – важнейшее понятие математики. Слово «функция» (от латинского «Functio» - исполнение обязанностей, деятельность) впервые ввел немецкий ученый Г. Лейбниц.

на главную

Понятие функции

Пусть D и E – непустые числовые множества, а x и y – соответственно их элементы. Если каждому $x \in D$ (x принадлежит множеству D) ставится, в соответствии с некоторым законом, только одно значение $y \in E$, то говорят, что между переменными x и y существует функциональная зависимость, и x называют независимой переменной (или аргументом), а y – зависимой переменной (или функцией).

Символическая запись функции: $y = f(x)$ ($x \in D$, $y \in E$). Множество D называют областью определения функции и обозначают $D(f)$, а множество E называют областью изменения функции – $E(f)$. Говорят еще, что функция f отображает множество D на множестве E.

на главную

Общие свойства функции

Четность и нечетность

Периодичность

Нули функции

Промежутки знакопостоянства

Монотонность

на главную

Четность и нечетность

Определение: Функция **y = f(x)** называется четной, если для любого значения **x**, взятого из области определения функции, значение **–x** также принадлежит области определения и выполняется равенство **f(–x) = f(x).**

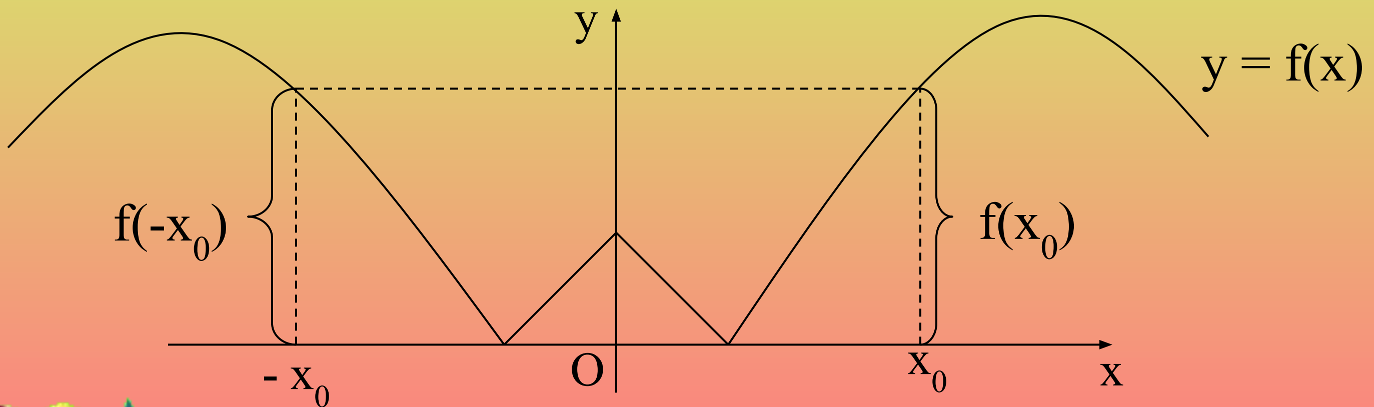
Примеры четных функций:

$y = x^2$; $y = x^2 + 5$; $y = -3x^2 + 1$; $y = ½x½$; $y = 3$.

($y = x^2$; $y(1) = 1^2 = 1$; $y(-1) = (-1)^2 = 1$; $y(1) = y(-1)$).

Согласно определению, четная функция определена на множестве, симметричном относительно начала координат.

График четной функции симметричен относительно оси ординат:



назад   далее

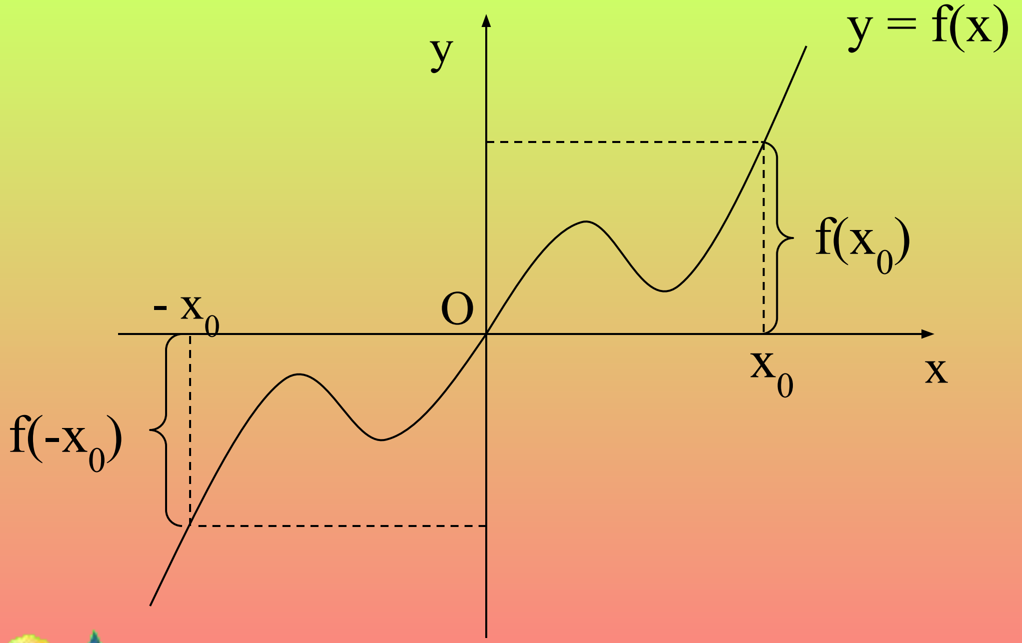
Определение: Функция **$y = f(x)$** называется нечетной, если для любого значения **x**, взятого из области определения функции, значение **$-x$** также принадлежит области определения и выполняется равенство **$f(-x) = -f(x)$.**

Примеры нечетных функций:

$y = x^3$; $y = x^3 + x$.

($y = x^3$; $y(1) = 1^3 = 1$; $y(-1) = (-1)^3 = -1$; $y(-1) = -y(1)$).

График нечетной функции симметричен относительно начала координат:



[назад](#) [далее](#)

При построении графиков четной и нечетной функции достаточно построить только правую ветвь графика для положительных значений аргумента. Левая ветвь достраивается симметрично относительно начала координат для нечетной функции и относительно оси ординат для четной функции.

Произведение двух четных или двух нечетных функций представляет собой четную функцию, а произведение четной и нечетной функций – нечетную функцию.

Конечно, большинство функций не являются ни четными, ни нечетными.

Пример:

$y = x^3 + x^2$

$y(-1) = (-1)^3 + (-1)^2 = -1 + 1 = 0$

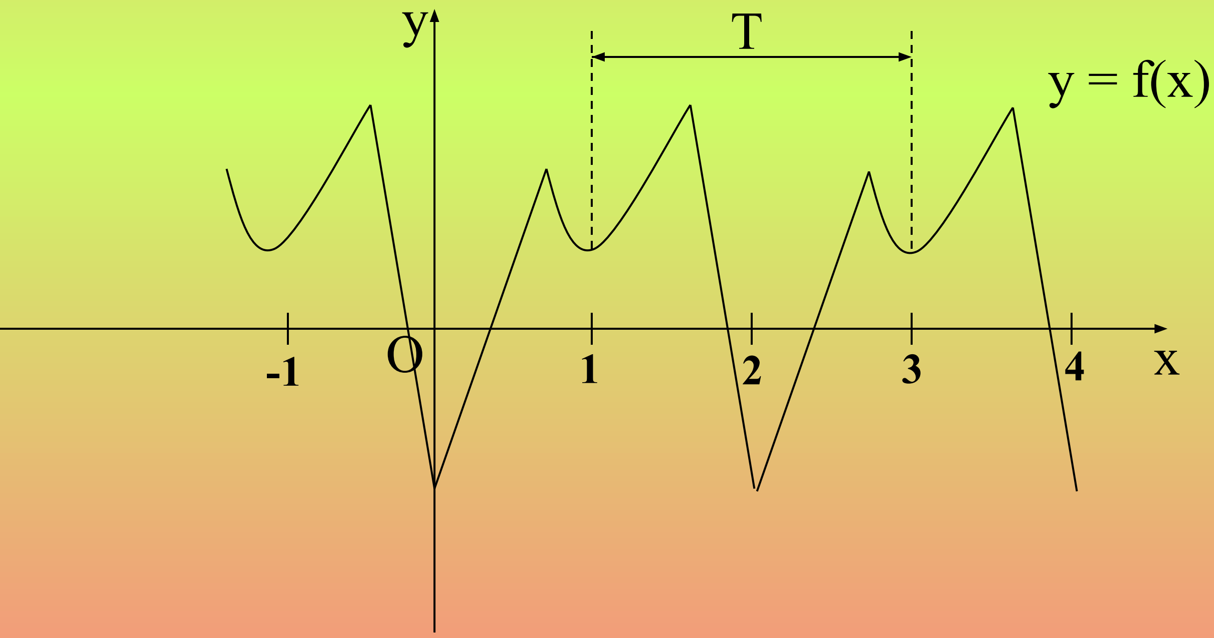
$y(1) = (1)^3 + (1)^2 = 1 + 1 = 2$

назад

Периодичность

Определение: Функция **y = f(x)** называется периодической, если существует такое число **T≠0**, что для любого значения **x**, взятого из области определения, значения **x + T** и **x – T** также принадлежат области определения и выполняется равенство

f(x) = f(x + T) = f(x – T):



назад далее

Число T называется периодом функции. Всякая периодическая функция имеет бесконечное число периодов.В самом деле, числа вида nT при любом целом n также являются периодом функции $f(x)$, так как $f(x + nT) = f(x + (n - 1)T + T) = f(x + (n - 1)T) = f(x + (n - 2)T + T) = f(x + (n - 2)T) = \ldots = f(x)$.

Иногда периодом называют наименьшее их всех чисел $T > 0$, удовлетворяющее данному выше определению. Примеры периодических функций:

$y = \sin x$; $y = \mathrm{ctg}\, x$; $y = \sin^3 x$.

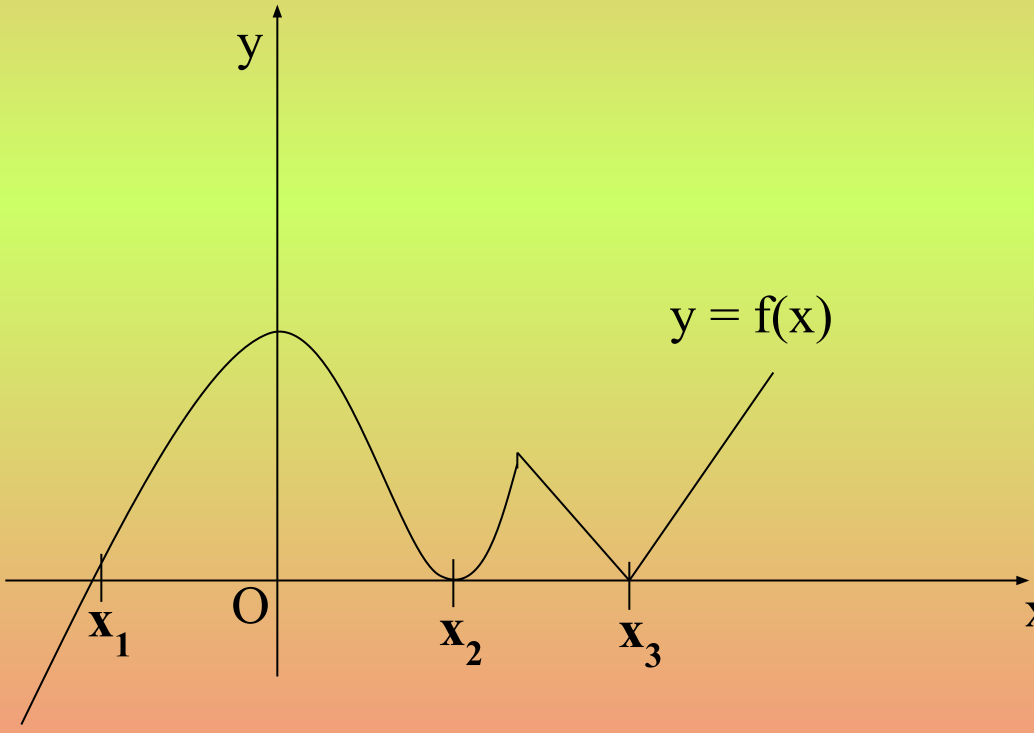
Периодической является и всякая постоянная функция, причем ее периодом служит любое ненулевое число. Например: $y = 2$; $y = 10$.

назад

Нули функции

Определение: Нулем функции называется такое действительное значение x, при котором значение функции равно нулю.

Для того, чтобы найти нули функции, следует решить уравнение **f(x) = 0.** Действительные корни этого уравнения являются нулями функции **y = f(x),** и обратно. Нули функции представляют собой абсциссы точек, в которых график этой функции либо пересекает ось абсцисс, либо касается ее, либо имеет общую точку с этой осью.



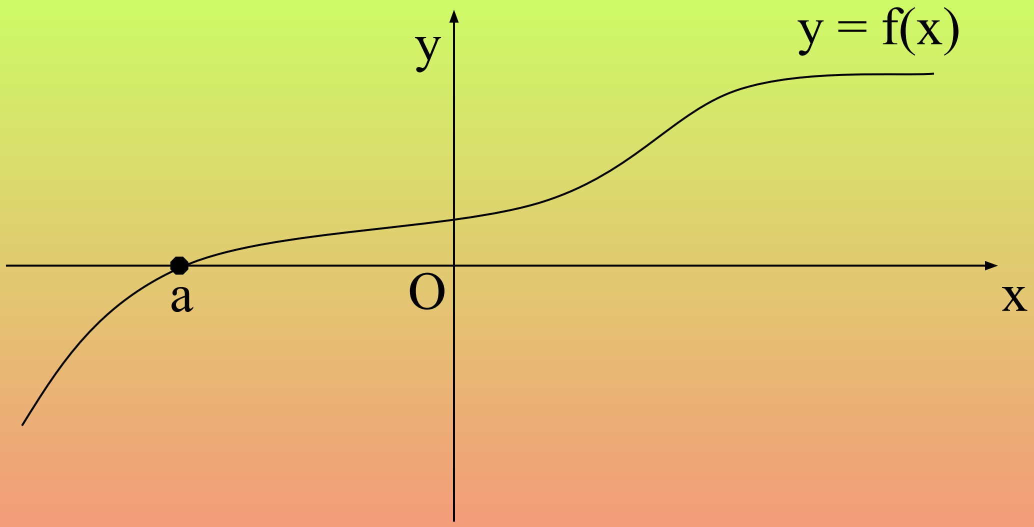
x_1, x_2, x_3 – нули функции y = f(x).

назад

Промежутки знакопостоянства

Определение: Числовые промежутки, на которых непрерывная функция сохраняет свой знак и не обращается в нуль, называются промежутками знакопостоянства.

Над этими промежутками график функции лежит выше оси абсцисс, если **$f(x) > 0$**, и ниже оси абсцисс, если **$f(x) < 0$**.



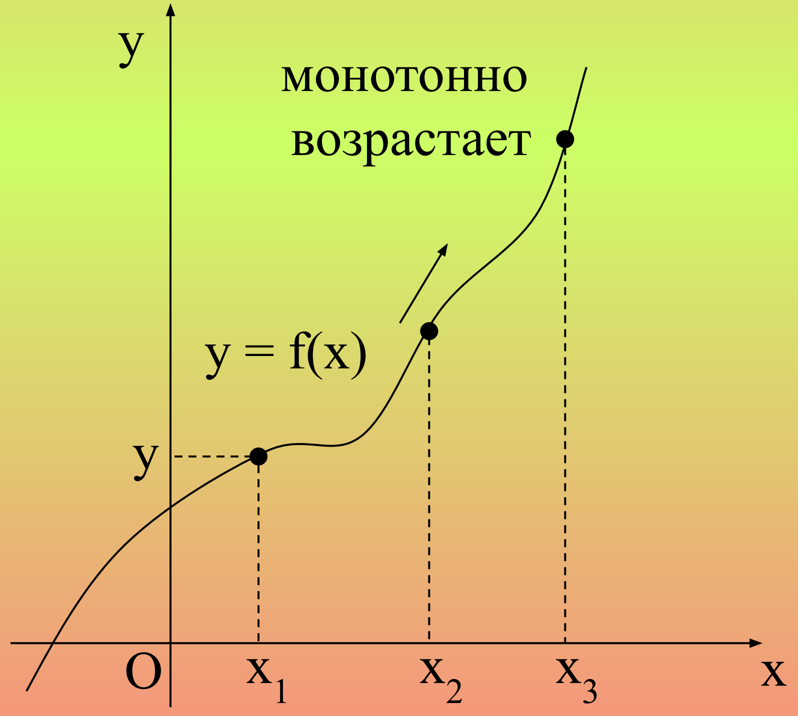
$f(x) > 0$ при $x > a$

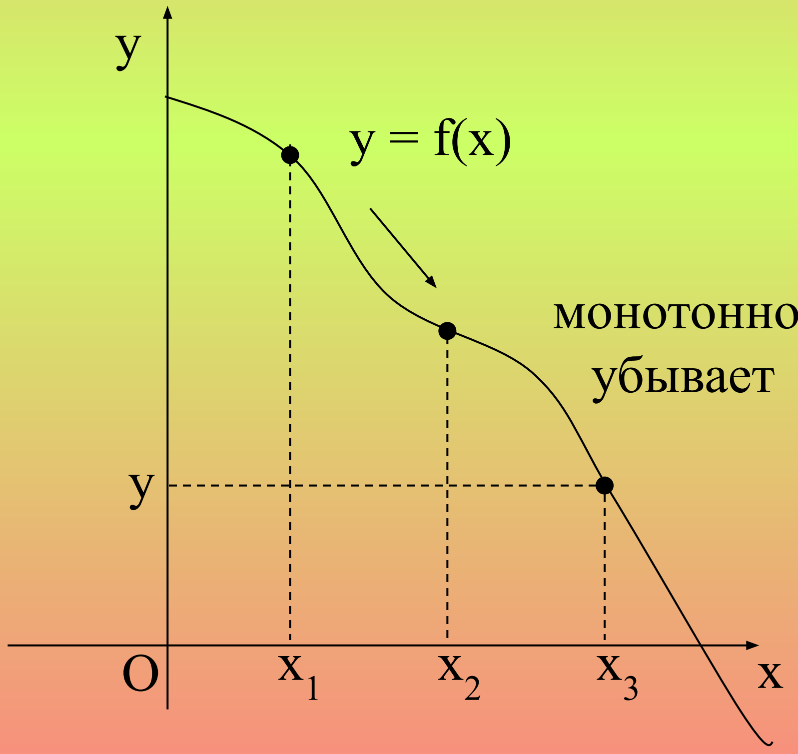
$f(x) < 0$ при $x < a$

назад

Монотонность

Функцию называют монотонно возрастающей, если с увеличением аргумента значение функции увеличивается, и монотонно убывающей, если с увеличением аргумента значение функции уменьшается.





Определение: Функция $y = f(x)$ называется монотонно возрастающей на интервале (a, b), если для любых x_1 и x_2, принадлежащих этому интервалу, из неравенства $x_2 > x_1$ следует неравенство $f(x_2) > f(x_1)$. Функция $y = f(x)$ называется монотонно убывающей на интервале (a, b), если для любых x_1 и x_2, принадлежащих этому интервалу, из неравенства $x_2 > x_1$ следует неравенство $f(x_2) < f(x_1)$. Интервал (a, b) предполагает взятым из области определения функции.

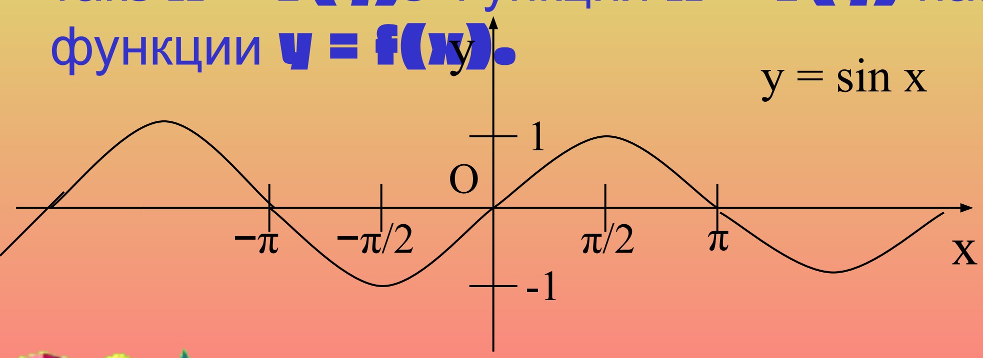
назад

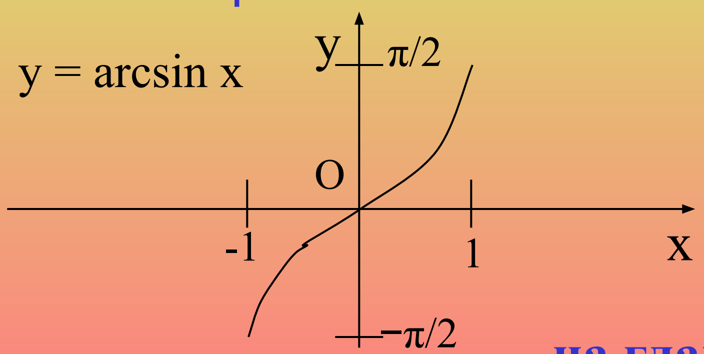
Понятие обратной функции

Функция, принимающая каждое свое значение в единственной точке области определения, называется обратимой. Таким образом, при $k \neq 0$ функция $f(x) = kx + b$ обратима, а функция $f(x) = x^2$ не является обратимой.

Если между величинами x и y существует функциональная зависимость, то, вообще говоря, безразлично, какую из этих величин считать аргументом, а какую – функцией.

Пусть задана функция $y = f(x)$, где y является зависимой переменной, x – аргументом. Очевидно, в этом случае x и y можно поменять ролями, т. е. x будет функцией, а y – аргументом. Тогда рассматриваемая функциональная зависимость между x и y запишется так: $x = \varphi(y)$. Функция $x = \varphi(y)$ называется обратной по отношению к функции $y = f(x)$.





на главную

Экстремумы функции. Наибольшее и наименьшее значение функции

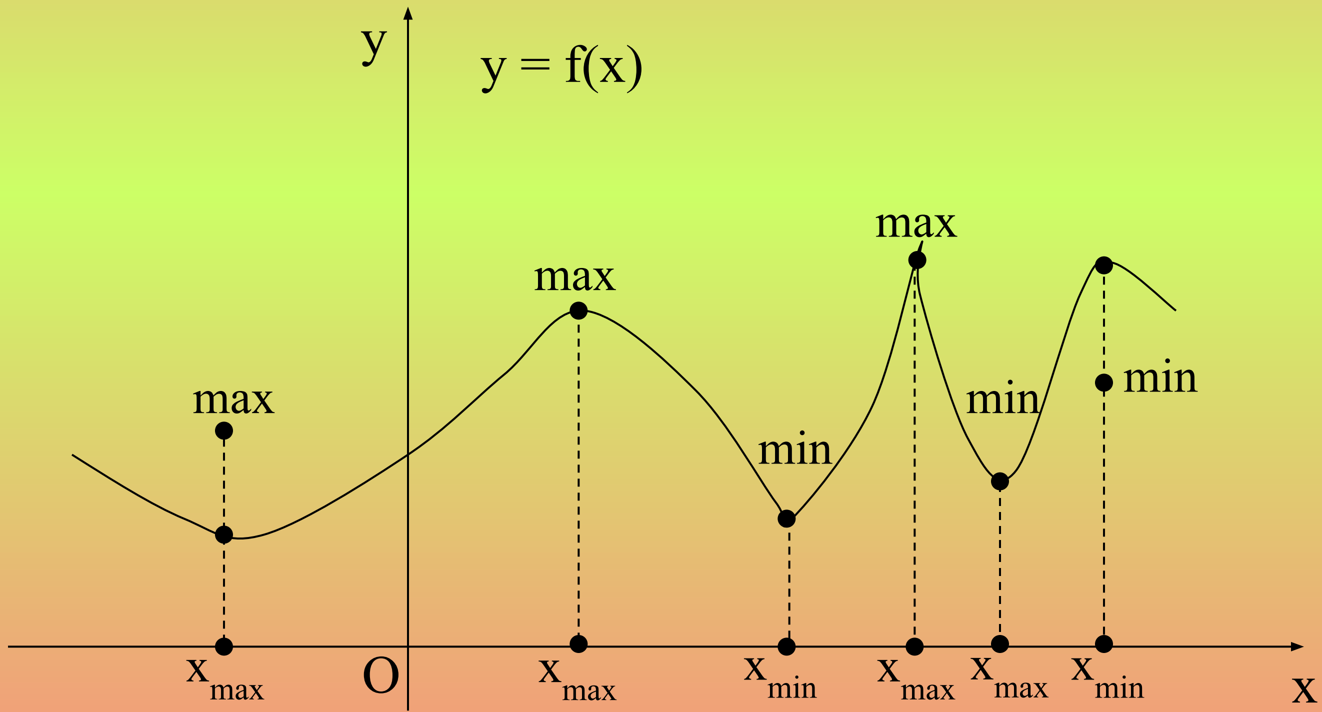
Точка x_0 называется точкой максимума (точкой минимума) для функции $f(x)$, если значение в этой точке больше (меньше), чем значение функции в ближайших соседних точках.

для обозначения максимума и минимума существует общий термин «экстремум» (от латинского «крайний»).

на главную далее

Определение 1. Пусть функция $y = f(x)$ определена на отрезке $[a; b]$. Говорят, что функция имеет максимум в точке $x_0 \in [a; b]$, если существует окрестность точки x_0, целиком содержащаяся в $[a; b]$ и такая, что для любого x, принадлежащего этой окрестности, выполняется неравенство $f(x) < f(x_0)$.

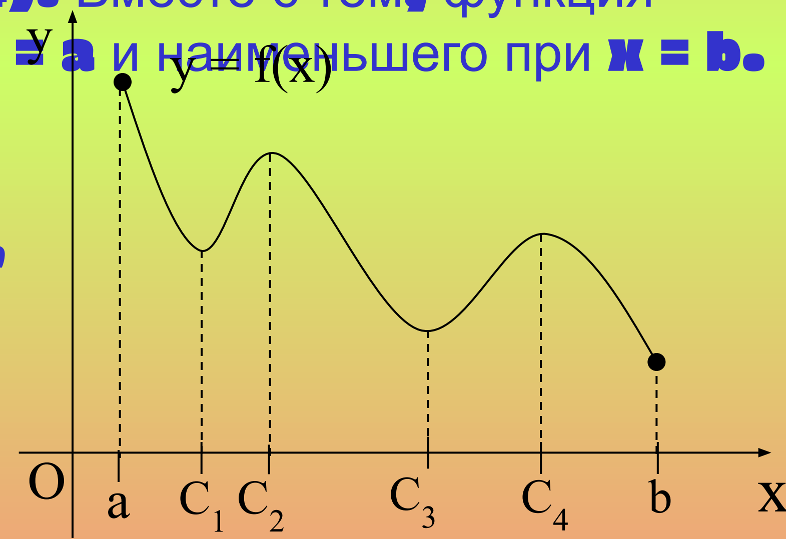
Под окрестностью точки x_0 понимают интервал длины $2e$ с центром в точке x_0, т. е. $(x_0 - e ; x_0 + e)$, где e – произвольное положительное число.



назад далее

Определение 2. Пусть функция $y = f(x)$ определена на отрезке $[a; b]$. Говорят, что функция имеет минимум в точке $x_0 \in [a; b]$, если существует окрестность точки x_0, целиком содержащаяся в $[a; b]$ и такая, что для любого x, принадлежащего этой окрестности, выполняется неравенство $f(x) > f(x_0)$.

Максимумы и минимумы функции не являются обязательно наибольшими и наименьшими значениями этой функции во всей области определения. Например, функция $y = f(x)$ определена на отрезке $[a; b]$, имеет четыре экстремума: два минимума ($x = C1$ и $x = C3$) и два максимума ($x = C2$ и $x = C4$). Вместе с тем, функция достигает наибольшего значения при $x = a$ и наименьшего при $x = b$.



Признак максимума функции:

Если функция непрерывна в точке x_0 и ее производная, переходя через нее, меняет знак с плюса на минус, то x_0 есть точка максимума.

Признак минимума функции:

Если функция непрерывна в точке x_0 и ее производная, переходя через нее, меняет знак с минуса на плюс, то x_0 есть точка минимума.

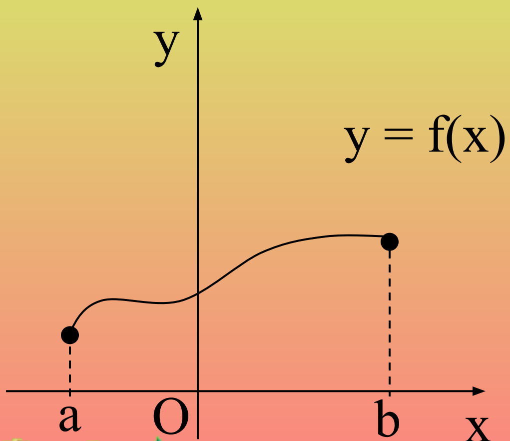
назад

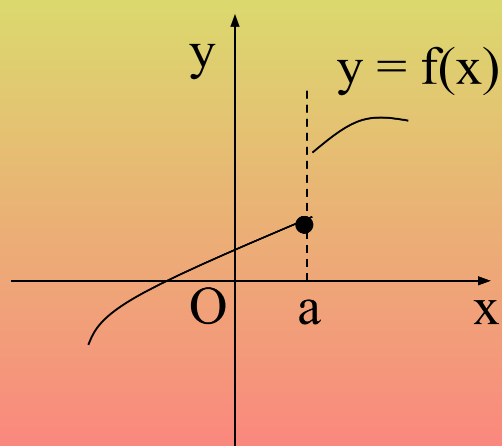
Непрерывность

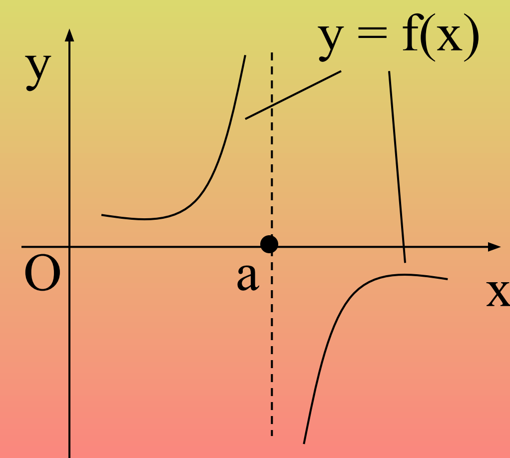
Функция $y = f(x)$ называется непрерывной на промежутке, если она определена на этом промежутке и непрерывна в каждой точке промежутка.

Геометрическая непрерывность функции на промежутке означает, что график этой функции на данном промежутке изображен сплошной линией без скачков и разрывов. При этом малому изменению аргумента соответствует малое изменение функции.

Если при $x = a$ функция $y = f(x)$ существует в окрестности этой точки, но в самой точке $x = a$ не выполняется условие непрерывности, говорят, что точка $x = a$ есть точка разрыва функции. В самой точке $x = a$ функция может существовать, а может и не существовать.







на главную

Элементарные функции

Линейная

Обратная пропорциональность

Квадратичная

Степенная

Показательная

Логарифмическая

Тригонометрические

на главную

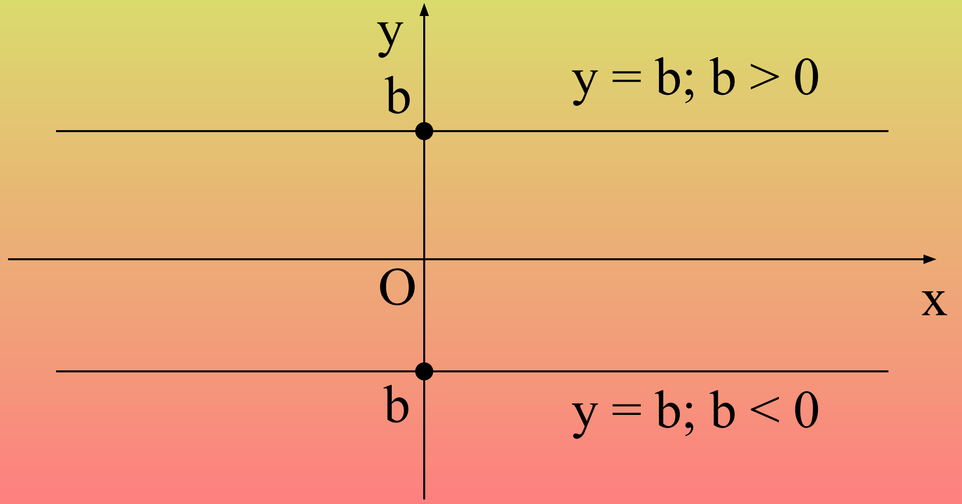
Линейная функция

Определение: Функция вида $y = kx + b$, где k и b некоторые числа, называется линейной функцией.

1. Если $k = 0$, тогда $y = b$.

Эта функция определена на множестве R и для каждого x принимает одно и то же значение, равное b.

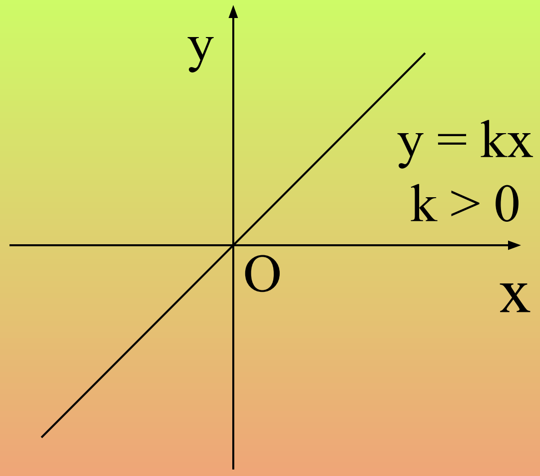
Графиком является прямая, параллельная оси Ox и отстоящая от нее на $|b|$ единиц вверх, если $b > 0$, и вниз, если $b < 0$; если $b = 0$, то прямая совпадает с осью Ox.

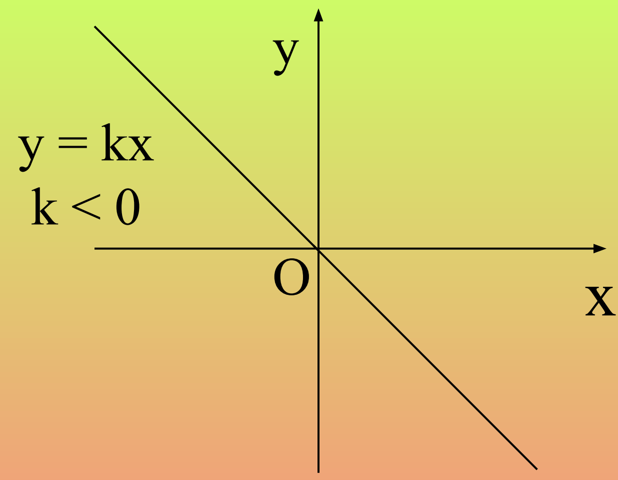


назад далее

2. Если $b = 0$, то $y = kx$.

Линейная функция вида $y = kx$ называется прямой пропорциональностью. Она определена на множестве R. Функция является монотонно возрастающей, если $k > 0$, и монотонно убывающей, если $k < 0$. Графиком функции является прямая, проходящая через начало координат. При $k > 0$ точки графика принадлежат I и III координатным четвертям. При $k < 0$ точки графика принадлежат II и IV координатным четвертям.

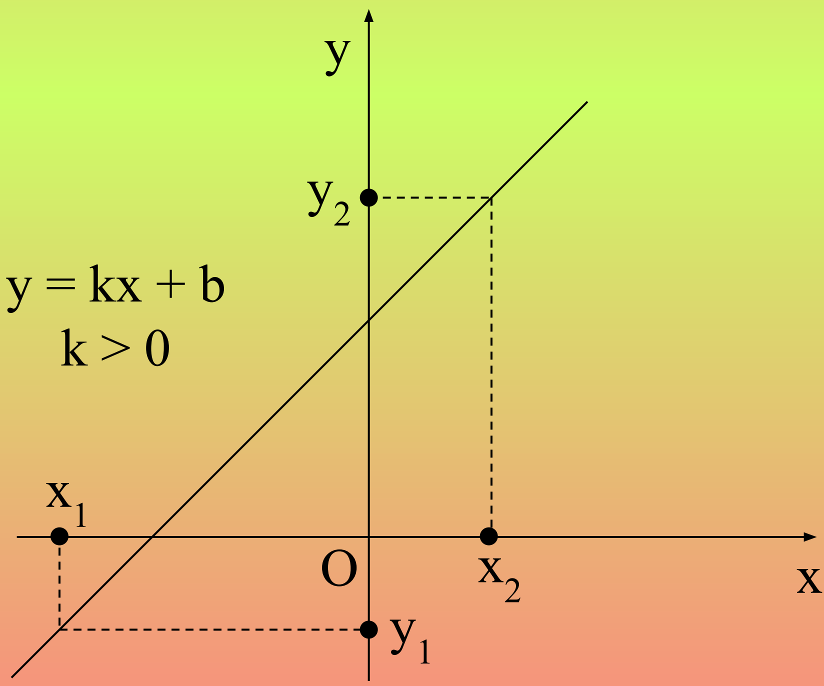


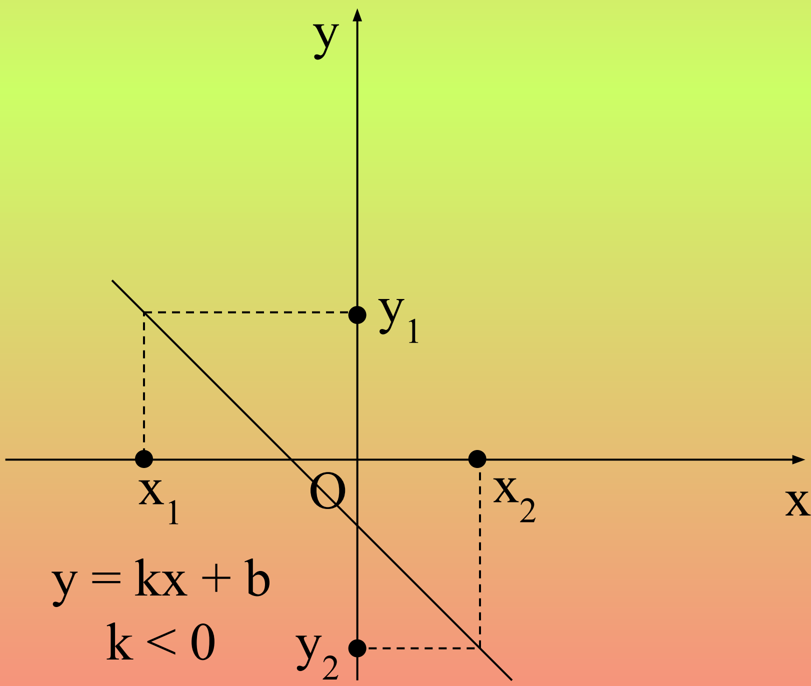


назад далее

3. Если $k \neq 0$ и $b \neq 0$, то $y = kx + b$.

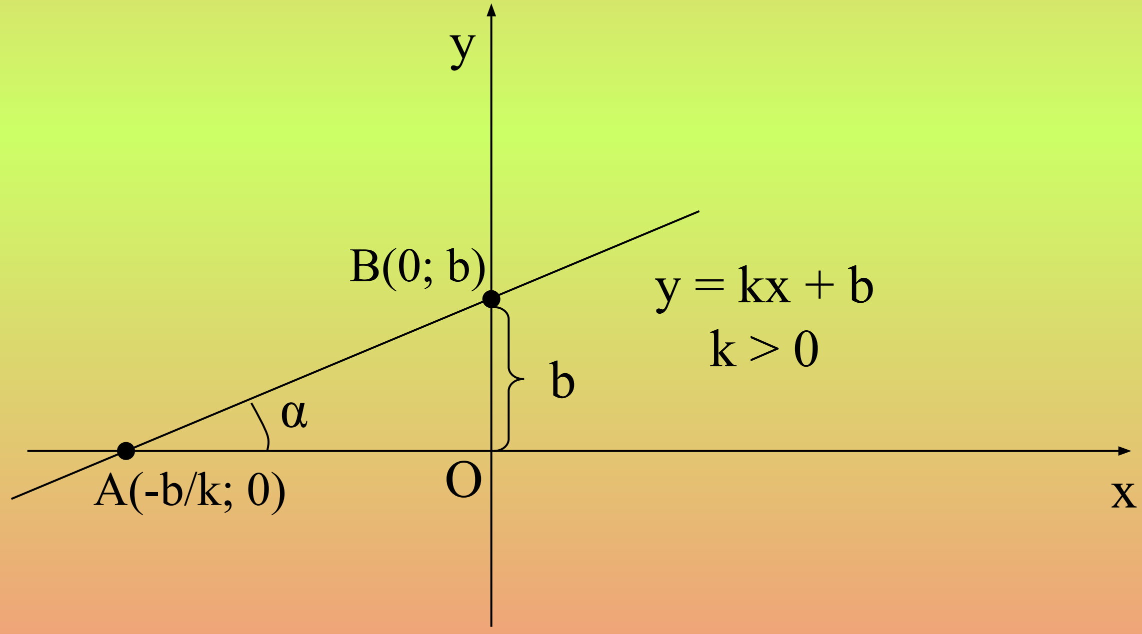
Функция определена на множестве всех действительных чисел. Функция имеет единственный нуль в точке $x = -b/k$ (т. е. график функции пересекает ось Ox в единственной точке $(-b/k; 0)$. Функция является монотонно возрастающей при $k > 0$ и монотонно убывающей при $k < 0$.





назад далее

Коэффициенты **k** и **b** в уравнении линейной функции **y = kx + b**, имеют наглядное геометрическое толкование. Значение коэффициента **b** определяет отрезок, отсекаемый графиком линейной функции на оси ординат, а коэффициент **k** определяет тангенс угла α, образованного осью абсцисс и прямой; угол отсчитывается от положительного направления оси абсцисс. Если **k > 0**, то образованный угол острый, если **k < 0**, то угол тупой.



[назад](#)

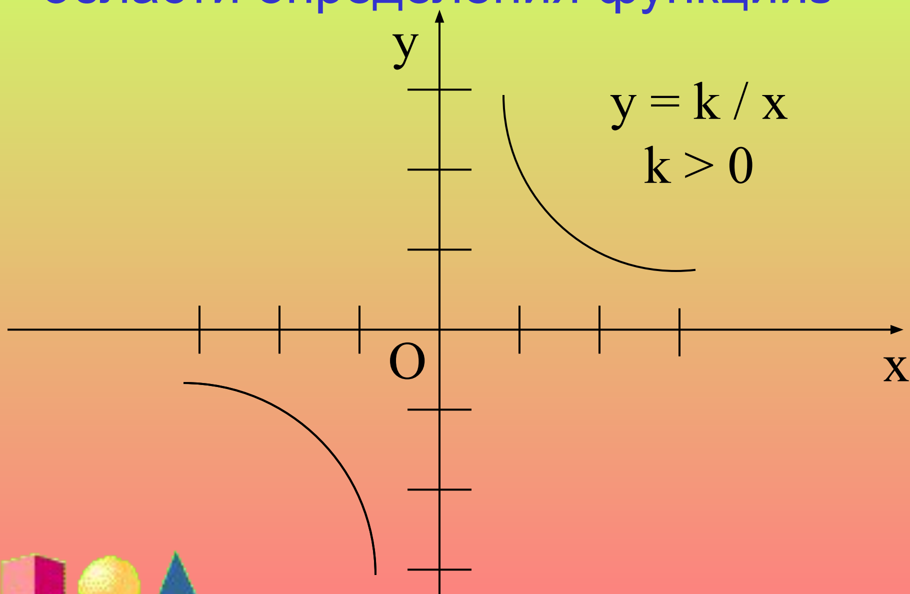
Обратная пропорциональность

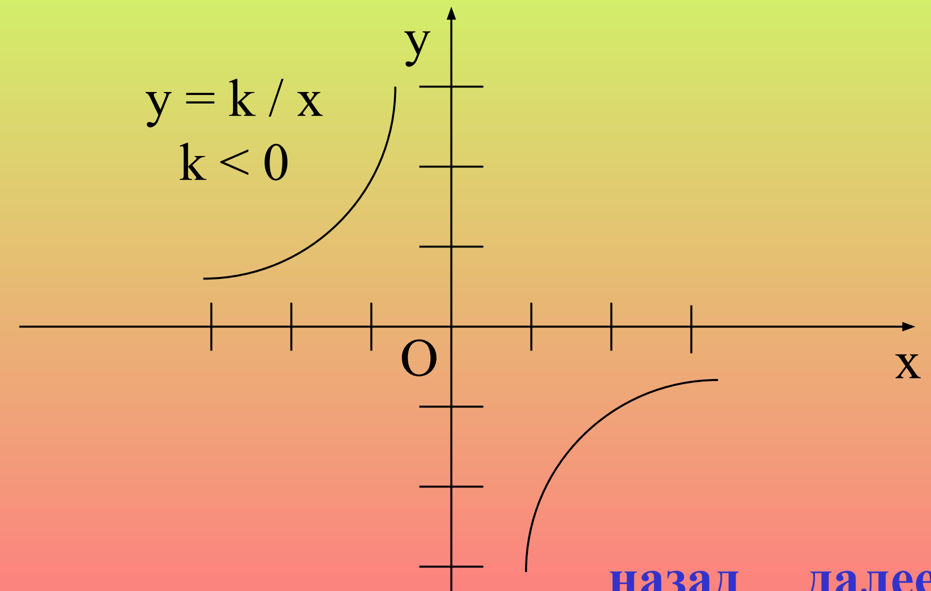
Определение: Функция вида $x = k/x$, $k \neq 0$, называется обратной пропорциональностью.

Область определения этой функции совпадает с ее областью значений и представляет собой объединение двух промежутков: $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.

Функция не имеет нулей, так как уравнение $k/x = 0$ не имеет корней.

Если $k > 0$, то функция монотонно убывает на всей области определения. Если $k < 0$, то функция монотонно возрастает на всей области определения функции.





назад далее

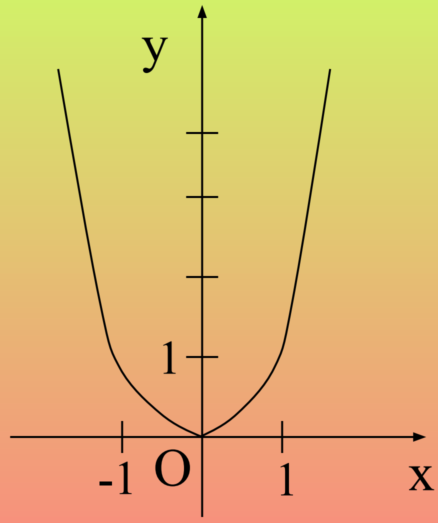
График обратной пропорциональности называется гиперболой. Участки кривой при $x > 0$ и $x < 0$ называются ветвями гиперболы.

назад

Квадратичная функция

Определение: Функция вида $y = ax^2 + bx + c$, где a, b, c – некоторые числа, $a \neq 0$, называется квадратичной.

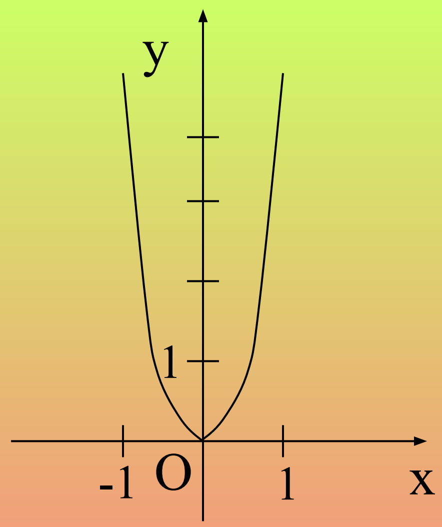
1. Функция вида $y = x^2$ – простейшая квадратичная функция. Это четная функция, у которой $D = (-\infty; +\infty)$, а $E = [0; +\infty)$. При $x > 0$ она возрастающая, а при $x < 0$ – убывающая. Ее график называется параболой. График проходит через начало координат, симметричен относительно оси ординат, ветви параболы направлены вверх.



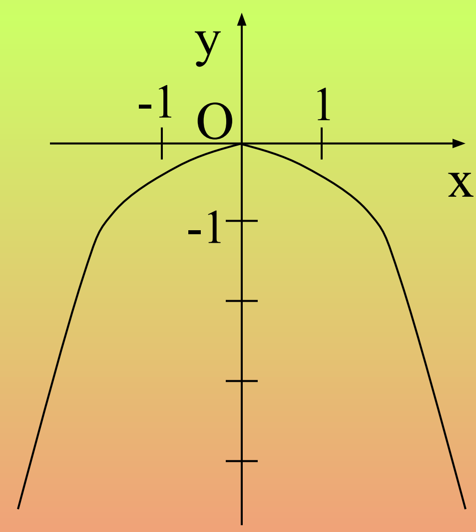
$y = x^2$

назад далее

2. Квадратичная функция вида $y = ax^2$ также четная, неограниченная, определенная для всех действительных x. Ее график также парабола, проходящая через начало координат и симметричная относительно оси ординат. Но при $a > 0$ ветви ее направлены вверх и $E = [0; +\infty)$, а при $a < 0$ ветви направлены вниз и $E = (-\infty; 0)$. Чем меньше абсолютная величина a, тем дальше отходят ветви параболы от оси ординат, тем «шире» она. Чем больше абсолютная величина a, тем плотнее ветви параболы прижаты к оси ординат, тем «уже» она.



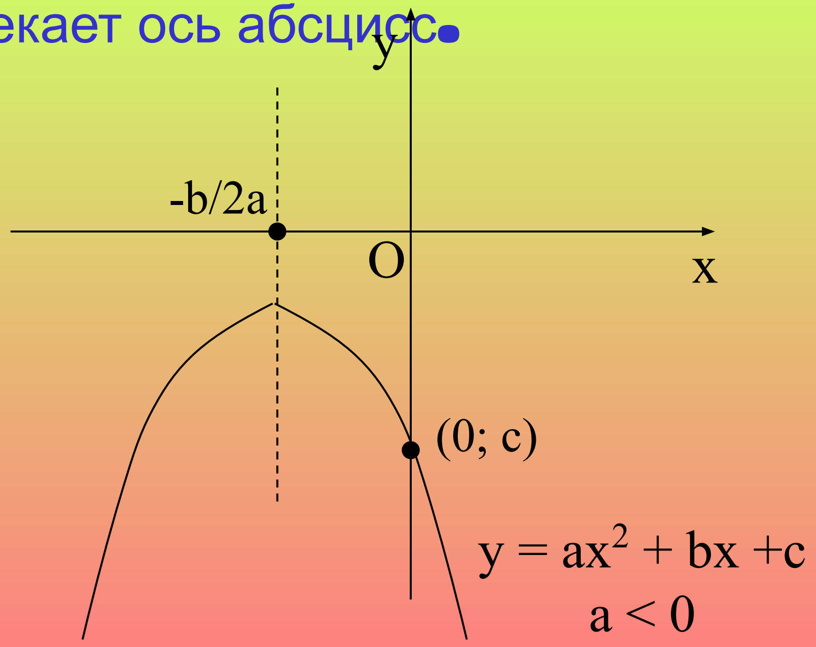
$y = ax^2$
$a > 0;\ |a| > 1$



$y = ax^2$
$a < 0;\ |a| < 1$

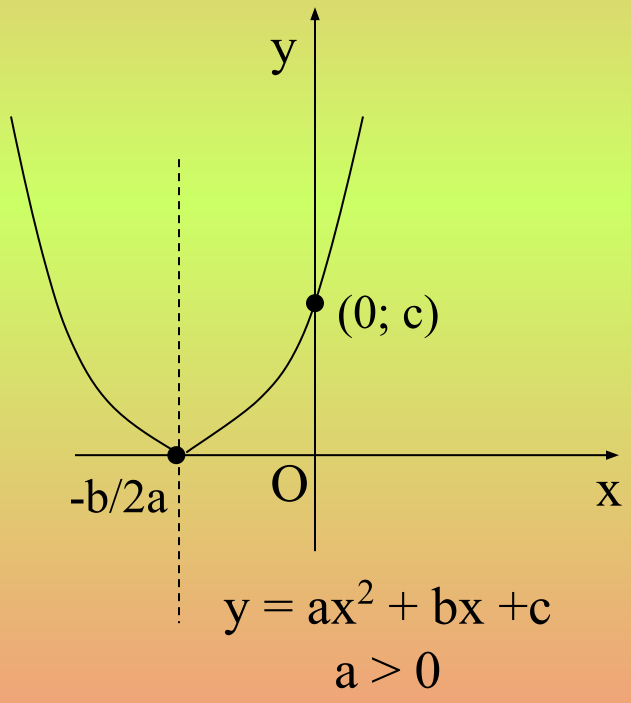
назад далее

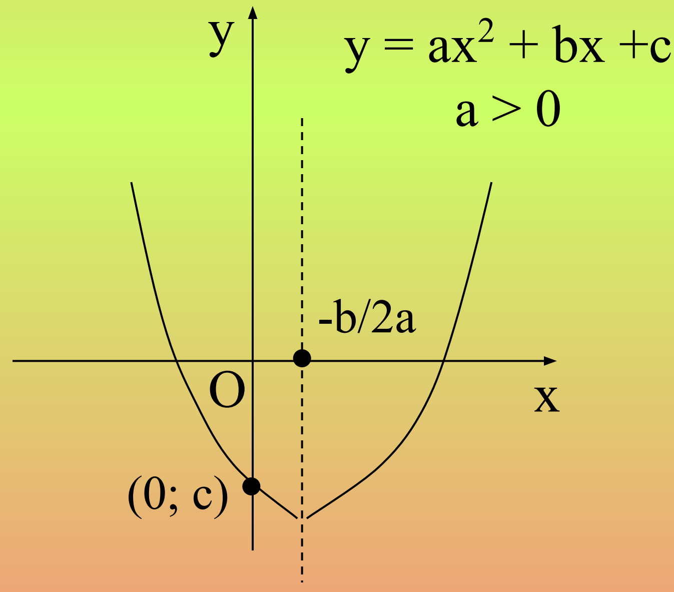
3. Квадратичная функция общего вида $y = ax^2 + bx + c$ также четная, неограниченная, определенная для всех действительных x. Ее график – парабола, симметричная относительно прямой $x = x_0$ (x_0 – абсцисса вершины параболы), параллельной оси ординат. Если $a > 0$, то ее ветви направлены вверх и $E = [y_0; +\infty)$ или вниз при $a < 0$ и тогда $E = (-\infty; y_0)$, где y_0 – ордината вершины параболы. Только вершина этой параболы находится не в начале координат, а в точке $(-b / 2a; (4ac - b^2) / 4a)$. Парабола пересекает ось ординат в точке $(0; c)$. Если дискриминант квадратного трехчлена $ax^2 + bx + c$ отрицательный, т. е. $B^2 - 4ac < 0$, то график функции $y = ax^2 + bx + c$ не пересекает ось абсцисс.



назад далее

Если он равен нулю, то график функции касается оси в точке **(-b / 2a; 0)**. Если дискриминант положительный, то парабола пересекает ось абсцисс в двух точках, являющихся корнями уравнения **$0 = ax^2 + bx + c$**.





назад

Степенная функция

Определение: Функция, заданная формулой $y = x^n$, называется степенной.

1. При n, равном 1; 2; -1, имеем соответственно функции $y = x$, $y = x^2$; $y = -1 / x$, уже рассмотренные ранее.

2. Если n – число целое и четное, то функция $y = x^n$ – четная; при нечетном n она нечетная. При положительных n эта функция определена для всех действительных значений аргумента x, при отрицательных n она определена для всех x, кроме $x = 0$.

При любом $n \neq 0$ степенная функция неограниченная, график каждой из них проходит через точку (1; 1).

Если n – число иррациональное, то функция $y = x^n$ определена только для положительных значений аргумента x или для неотрицательных x, если $n > 0$.

назад

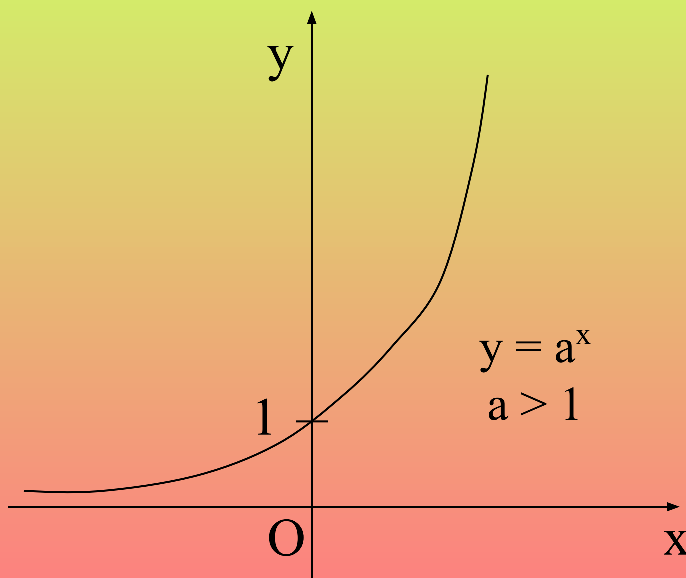
Показательная функция

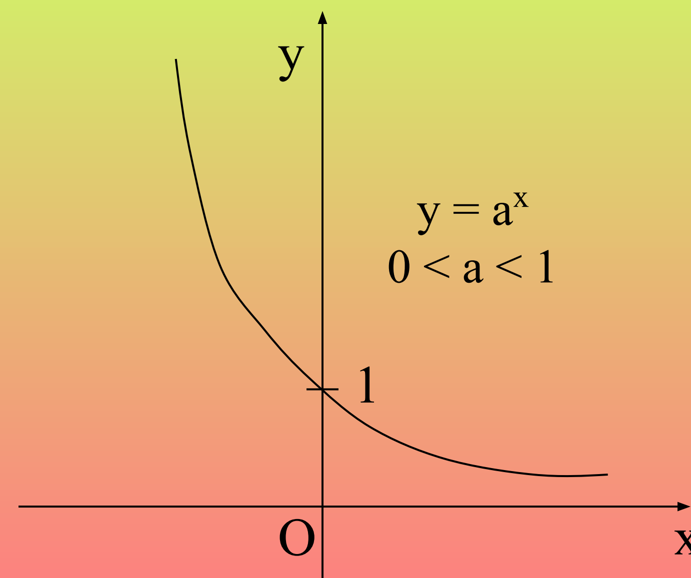
Определение: Функция, которую можно задать формулой $y = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$, называется показательной.

Эта функция определена для любых действительных x, а областью значений является промежуток $(0; +\infty)$.

График показательной функции – кривая, проходящая через точку $(0; 1)$. Он неограниченно приближается к оси абсцисс, но не достигает ее.

При $a > 1$ функция монотонно возрастает, а при $0 < a < 1$ – монотонно убывает.





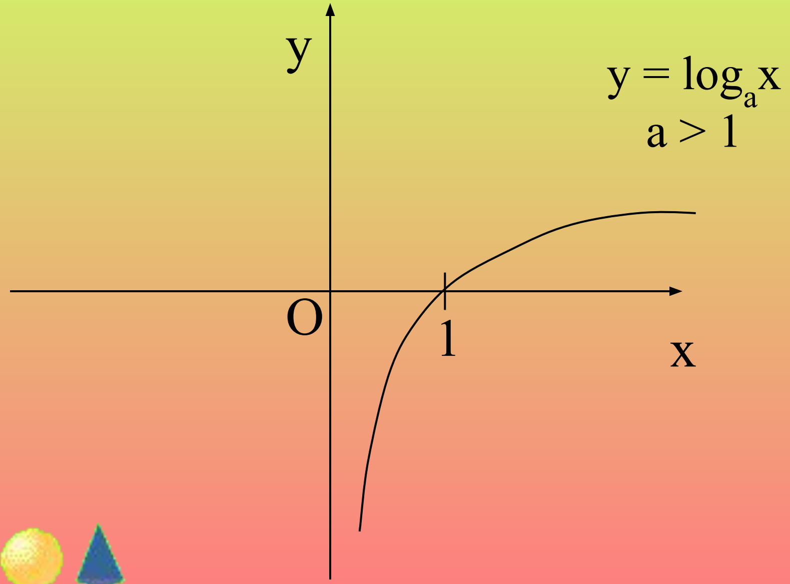
назад

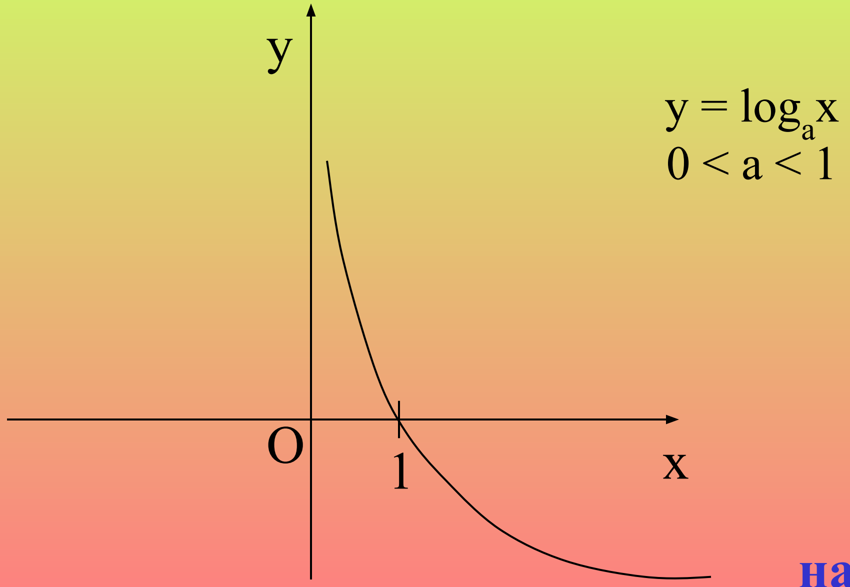
Логарифмическая функция

Определение: Функция вида $y = \log_a x$, где $a > 0$, $a \neq 1$, называется логарифмической.

Эта функция определена на промежутке $(0; +\infty)$, а областью значений является промежуток $(-\infty; +\infty)$.

Графиком логарифмической функции является кривая, проходящая через точку $(1; 0)$. Он неограниченно приближается к оси ординат, но не достигает ее. При $a > 1$ функция монотонно возрастает, а при $0 < a < 1$ – монотонно убывает.





назад

Тригонометрические функции

1.Функция синус.

Определение: Числовая функция, заданная формулой **$y = \sin x$**, называется синусом.

Функция определена и непрерывна на всем множестве действительных чисел. Эта функция ограничена $|\sin x| \le 1$. Она периодическая, ее период $T = 2\pi n,\ n \in Z$: $\sin(x + 2\pi n) = \sin x,\ n \in Z$. Функция **$y = \sin x$** – нечетная: $\sin(-x) = -\sin x$ ее график симметричен относительно начала координат. График этой функции называется синусоидой.

Функция принимает нулевые значения

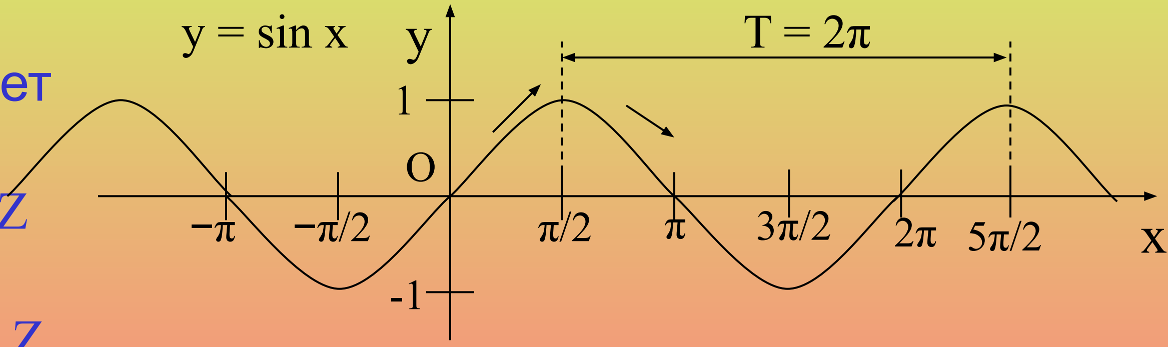
При $x = \pi n,\ n \in Z$.

Функция **$y = \sin x$** возрастает на промежутках

$[-\pi/2 + 2\pi n;\ \pi/2 + 2\pi n],\ n \in Z$

и убывает на промежутках

$[\pi/2 + 2\pi n;\ 3\pi/2 + 2\pi n],\ n \in Z$



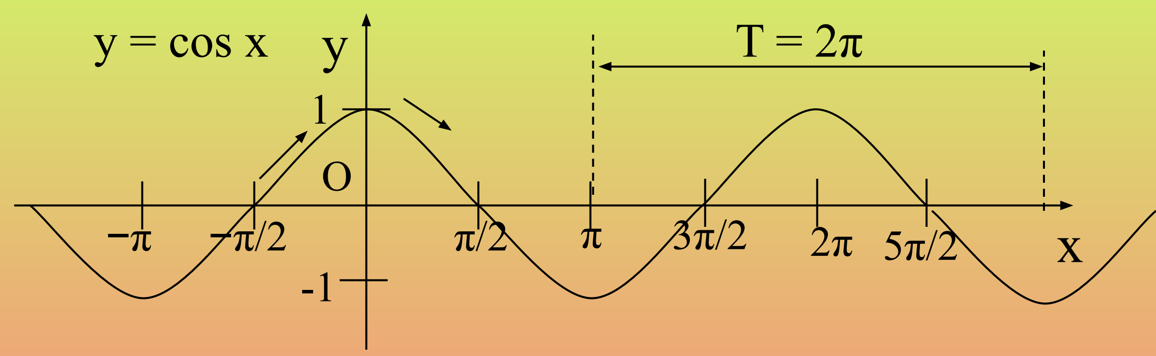
2. Функция косинус.

Определение: Числовая функция, заданная формулой **$y = \cos x$**, называется косинусом.

Функция определена и непрерывна на всем множестве действительных чисел. Эта функция ограничена $|\cos x| \le 1$. Она периодическая, ее период $T = 2\pi n,\ n \in Z$: $\cos(x + 2\pi n) = \cos x,\ n \in Z$. Функция $y = \cos x$ – четная: $\cos(-x) = \cos x$ ее график симметричен относительно оси ординат. График этой функции называется косинусоидой.

Функция принимает нулевые значения при $x = \pi/2 + \pi n,\ n \in Z$.

Функция $y = \cos x$ возрастает на промежутках $[\pi + 2\pi n;\ 2\pi + 2\pi n],\ n \in Z$ и убывает на промежутках $[2\pi n;\ \pi + 2\pi n],\ n \in Z$

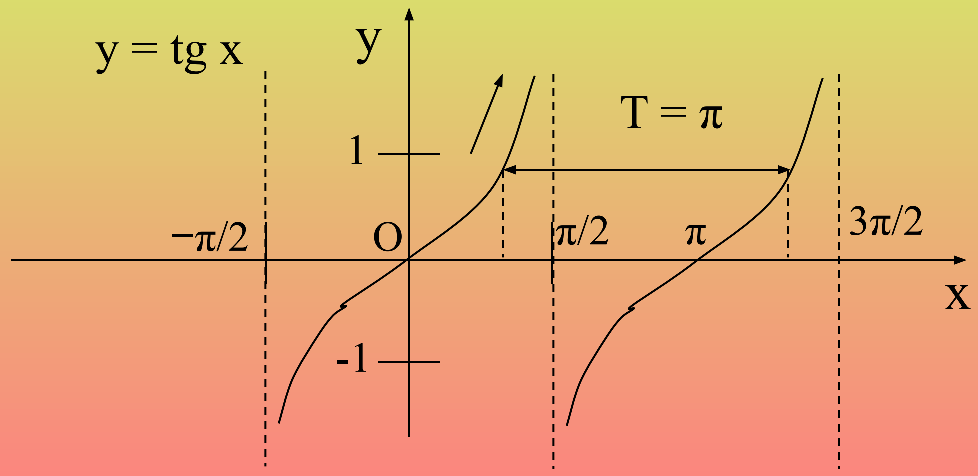


3. Функция тангенс.

Определение: Числовая функция, заданная формулой $y = tg\ x$, называется тангенсом.

Функция определена при $x \neq \pi/2 + \pi n$, $n \in Z$. Ее областью значений является интервал $(-\infty; +\infty)$. Она периодическая, ее период $T = \pi n$, $n \in Z$: $tg(x + \pi n) = tg\ x$, $n \in Z$. Функция $y = tg\ x$ – нечетная: $tg(-x) = -tg\ x$ и ее график симметричен относительно начала координат. В точках $x = \pi/2 + \pi n$, $n \in Z$ функция $y = tg\ x$ не существует, и говорят, что в этих точках функция терпит разрыв, т. е. она не является непрерывной. График этой функции называется тангенсоидой.

Функция принимает нулевые значения при $x = \pi n$, $n \in Z$. Функция $y = tg\ x$ возрастает на всех интервалах определения $(-\pi/2 + \pi n; \pi/2 + \pi n)$, $n \in Z$.



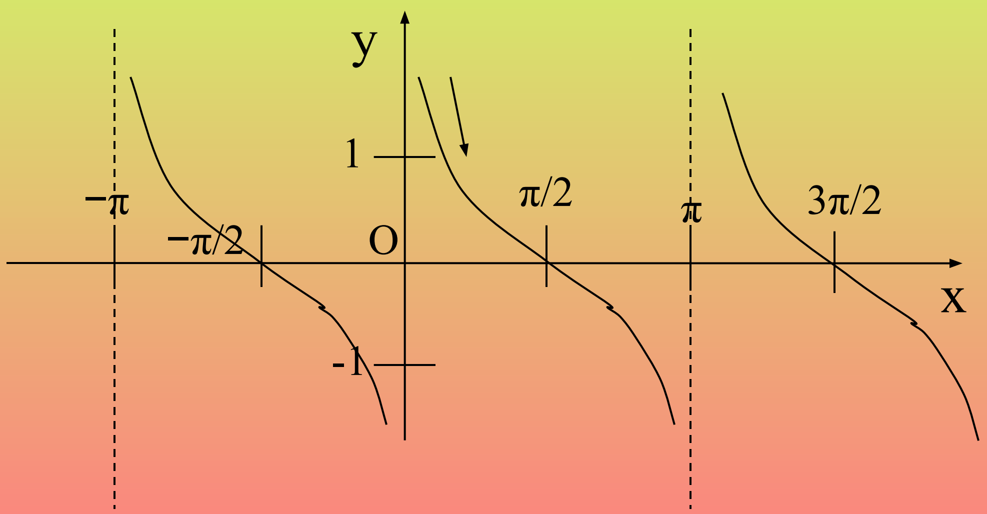
4. Функция котангенс.

Определение: Числовая функция, заданная формулой **$y = ctg\ x$**, называется котангенсом.

Функция определена при **$x \neq \pi n$**, $n \in Z$. Ее областью значений является интервал **$(-\infty; +\infty)$**. Она периодическая, ее период $T = \pi n$, $n \in Z$: **$ctg(x + \pi n) = ctg\ x$**, $n \in Z$. Функция **$y = ctg\ x$** – нечетная: **$ctg(-x) = -ctg\ x$** и ее график симметричен относительно начала координат. В точках **$x = \pi n$**, $n \in Z$ функция **$y = ctg\ x$** не существует, и говорят, что в этих точках функция терпит разрыв, т. е. она не является непрерывной. График этой функции называется котангенсоидой.

Функция принимает нулевые значения при $x = \pi/2 + \pi n$, $n \in Z$. Функция **$y = ctg\ x$** убывает на всех интервалах определения **$(2\pi n; \pi + \pi n)$**, $n \in Z$.

y = ctg x



назад