

# Математический анализ

Составитель: Никулина Л.С.,  
старший преподаватель кафедры  
Математики и Моделирования

# Литература

## Основная литература:

Л. Д. Кудрявцев. Курс математического анализа, т. 1, 2

Г. Н. Берман. Сборник задач по курсу математического анализа.

Н. С. Пискунов. Дифференциальное и интегральное исчисления, т. 1, 2.

## Дополнительная литература:

Кудрявцев В. А., Демидович Б. П.

Краткий курс высшей математики

Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.

Я. Высшая математика в упражнениях и задачах, ч. 1, 2.

## Учебно-методические разработки:

Л. Я. Дубинина, Л. С. Никулина, И. В. Пивоварова. Курс лекций по высшей математике, ч. 1, 2.-Владивосток, изд. ВГУЭиС, 2001.

Сборник задач по высшей математике.  
Сост. И. В. Пивоварова, Л. Я. Дубинина,  
Л. С. Никулина. -Владивосток, изд.  
ВГУЭиС, 2002.

# Содержание

- Функции нескольких переменных
- Дифференциальные уравнения 1-го, 2-го и более высокого порядков
- Кратные интегралы
- Числовые ряды
- Степенные ряды
- Ряды Фурье

# *Функции нескольких переменных*

## Лекция 1

# Определение функции двух переменных

**Определение.** Если каждой паре  $(x, y)$  значений двух независимых друг от друга переменных величин  $x$  и  $y$  из некоторого множества  $D$  соответствует единственное значение величины  $z$ , а каждому  $z$  соответствует хотя бы одна пара  $(x, y)$ , то мы говорим, что  $z$  есть функция двух независимых переменных  $x$  и  $y$ , определенная в  $D$ .

# Обозначения

При этом пишут:

$$z = f(x, y), \quad z = \varphi(x, y), \quad z = z(x, y).$$

Если паре  $(x_0, y_0) \in D$  соответствует число  $z_0 \in L$ , то пишут  $z_0 = f(x_0, y_0)$

$$\text{Или } z_0 = z \Big|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}}$$

$z_0$  называется частным значением функции при  $x = x_0, y = y_0$ .

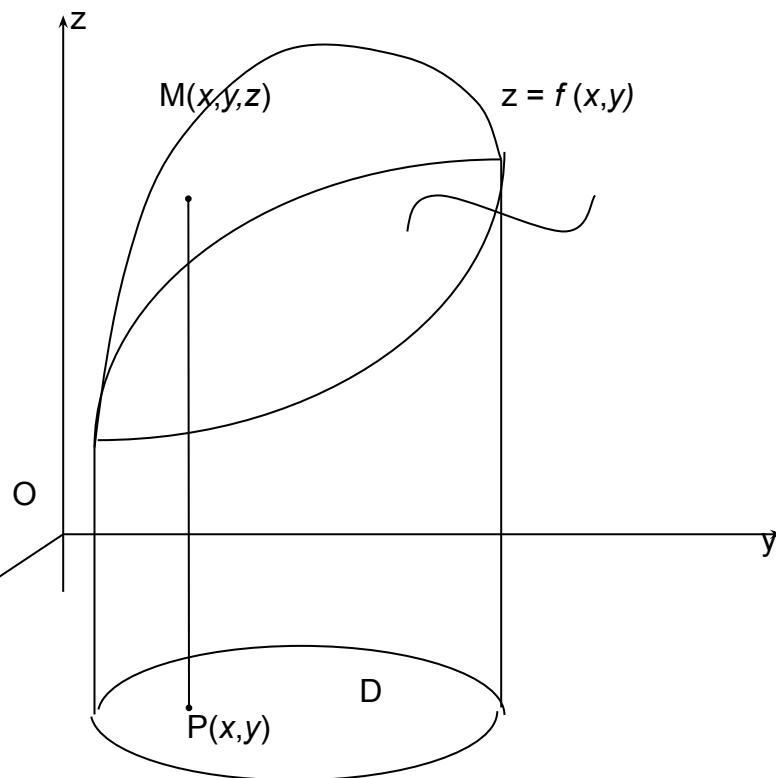


# **График функции 2-х переменных**

Геометрическое место точек, координаты которых удовлетворяют уравнению  $z = f(x, y)$ , называется **графиком функции двух переменных**.

# График функции

Функцию двух переменных можно изобразить графически. Каждой паре  $(x, y) \in D$  ставится в соответствие точка  $M(x, y, z)$ , принадлежащая графику функции и являющаяся концом перпендикуляра  $PM$  к плоскости  $Oxy$ .



# Предел функции 2-х переменных

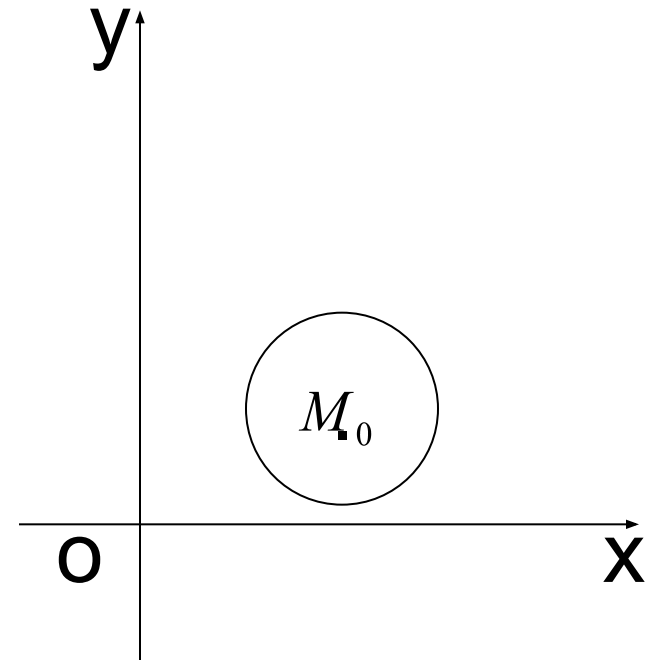
**Окрестностью радиуса  $R$**  точки  $M_0$  называется совокупность всех точек, лежащих внутри круга радиуса  $R$  с центром в точке  $M_0$ , кроме самой точки.

# Предел функции 2-х переменных

Таким образом,  
окрестностью точки  
является множество  
точек,

удовлетворяющих  
неравенству

$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < R$$



# Определение предела функции 2-х переменных

Число  $A$  называется пределом функции  $z=f(x,y)$  при  $M \rightarrow M_0$ , если для любого числа  $\varepsilon > 0$  найдется такое число  $R > 0$ , что для всех точек  $M(x,y)$ , лежащих в окрестности радиуса  $R$  точки  $M_0$ , выполняется условие

$$|f(x, y) - A| < \varepsilon$$

При этом пишут:  $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = A$  или

$$\lim_{M \rightarrow M_0} f(x, y) = A$$

# Непрерывность

Функция  $z=f(x,y)$  называется **непрерывной в точке**  $M_0$  , если выполнены условия:

1) функция определена в точке  $M_0$  ,

2) если существует  $\lim_{M \rightarrow M_0} f(M)$  ,

3) если  $\lim_{M \rightarrow M_0} f(M) = f(M_0)$

# Непрерывность

Другое определение: Функция  $z=f(x,y)$  называется *непрерывной в точке*  $M_0$ , если в этой точке бесконечно малому приращению аргументов соответствует бесконечно малое приращение

функции, т. е.  $\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \Delta z = 0,$

где  $\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$  .

# Внутренние и граничные точки

Линию, ограничивающую некоторую область  $D$  в плоскости  $Oxy$ , мы будем называть *границей* этой области.

Точки области, не лежащие на границе области, мы будем называть *внутренними точками* области, если они принадлежат области вместе со своей окрестностью.



# *Открытая и замкнутая области*

Область, состоящую из одних внутренних точек, мы будем называть открытой или ***незамкнутой***.

Если же к области относятся еще и точки границы, то область называют ***замкнутой***.

# Ограниченная область

Область называют **ограниченной**, если существует такое постоянное  $C > 0$ , что расстояние любой точки  $M$  области от начала координат  $O$  меньше  $C$ , т.е.  $|OM| < C$

# Наибольшее и наименьшее значения функции

*Теорема Вейерштрасса.* Непрерывная функция в замкнутой ограниченной области  $D$  достигает по крайней мере один раз наибольшего значения  $M$  и наименьшего значения  $m$ .

# Частные приращения функции 2-х переменных

Разность  $\Delta_x z = f(x+\Delta x, y) - f(x, y)$   
называется частным приращением  
функции  $f(x, y)$  по переменной  $x$ .

Разность  $\Delta_y z = f(x, y+\Delta y) - f(x, y)$   
называется частным приращением  
функции  $f(x, y)$  по переменной  $y$ .

# Частные производные

**Определение.** Если существует

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x},$$

то он называется частной производной (первого порядка) функции  $z = f(x, y)$  по переменной  $x$  и обозначается

$$z'_x = \frac{\partial z}{\partial x} = f'_x(x, y)$$

# Продолжение

Аналогично определяется частная производная по переменной  $y$ :

$$\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}$$

Эту производную обозначают

$$z'_y = \frac{\partial z}{\partial y} = f'_y(x, y)$$

# Производные высших порядков

**Частной производной**  $n$ -го порядка функции нескольких переменных называется частная производная первого порядка от частной производной  $(n-1)$ -го порядка той же функции. Например, для функции 2-х переменных имеем:

$$\begin{aligned} z''_{xx} &= (z'_x)'_x & z''_{xy} &= (z'_x)'_y \\ z''_{yx} &= (z'_y)'_x & z''_{yy} &= (z'_y)'_y \end{aligned}$$

# Равенство смешанных производных

**Теорема.** Две смешанные частные производные одной и той же функции, отличающиеся лишь порядком дифференцирования, равны между собой при условии их непрерывности.

Так, 
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x},$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} = \frac{\partial^3 z}{\partial y^2 \partial x} = \frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x \partial y}$$