Математический анализ

Составитель: Никулина Л.С.,
старший преподаватель кафедры
Математики и Моделирования

Литература

Основная литература:

Л. Д. Кудрявцев. Курс математического анализа, т. 1, 2

Г. Н. Берман. Сборник задач по курсу математического анализа.

Н. С. Пискунов. Дифференциальное и интегральное исчисления, т. 1, 2.

Дополнительная литература:

Кудрявцев В. А., Демидович Б. П. Краткий курс высшей математики

Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т. Я. Высшая математика в упражнениях и задачах, ч. 1, 2.

Учебно-методические разработки:

Л. Я. Дубинина, Л. С. Никулина, И. В. Пивоварова. Курс лекций по высшей математике, ч. 1, 2.-Владивосток, изд. ВГУЭС, 2001.

Сборник задач по высшей математике. Сост. И. В. Пивоварова, Л. Я. Дубинина, Л. С. Никулина. -Владивосток, изд. ВГУЭС, 2002.

Содержание

- Функции нескольких переменных
- Дифференциальные уравнения 1-го, 2-го и более высокого порядков
- Кратные интегралы
- Числовые ряды
- Степенные ряды
- Ряды Фурье

Функции нескольких переменных

Лекция 1

Определение функции двух переменных

Определение. Если каждой паре (x,y) значений двух независимых друг от друга переменных величин x и y из некоторого множества D соответствует единственное значение величины z, а каждому z соответствует хотя бы одна пара (x,y), то мы говорим, что z есть функция двух независимых переменных x и y, определенная в D.

Обозначения

При этом пишут:

$$z = f(x, y), \quad z = \varphi(x, y), \quad z = z(x, y).$$

Если паре $(x_0, y_0) \in D$ соответствует число $z_0 \in L$, то пишут $z_0 = f(x_0, y_0)$

Или $z_0 = z\Big|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}}$

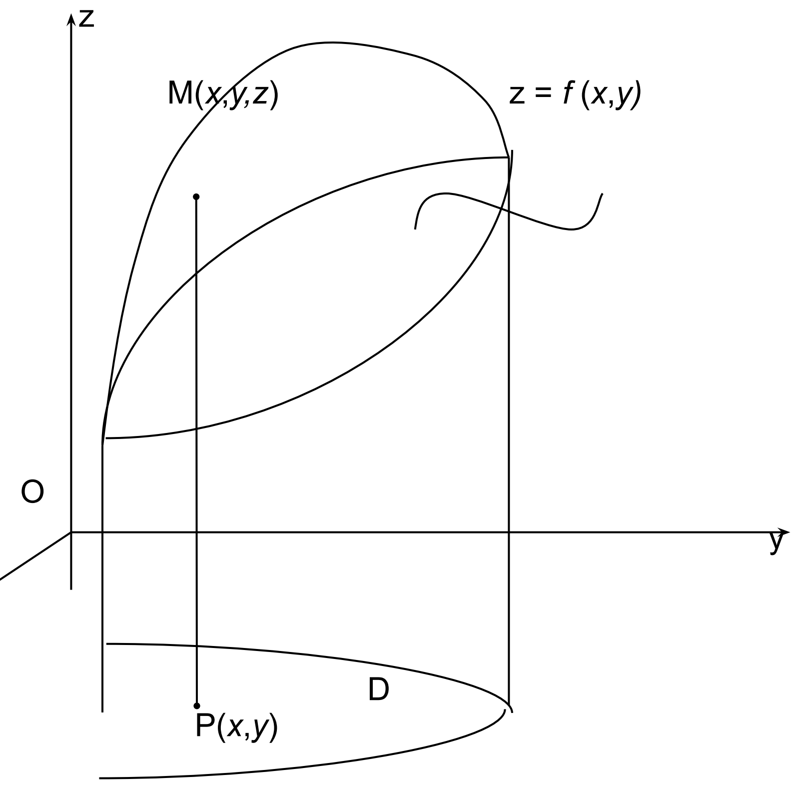
z_0 называется частным значением функции при $x = x_0, y = y_0$.

График функции 2-х переменных

Геометрическое место точек, координаты которых удовлетворяют уравнению $z=$ $=f(x,y)$, *называется* *графиком функции двух переменных*.

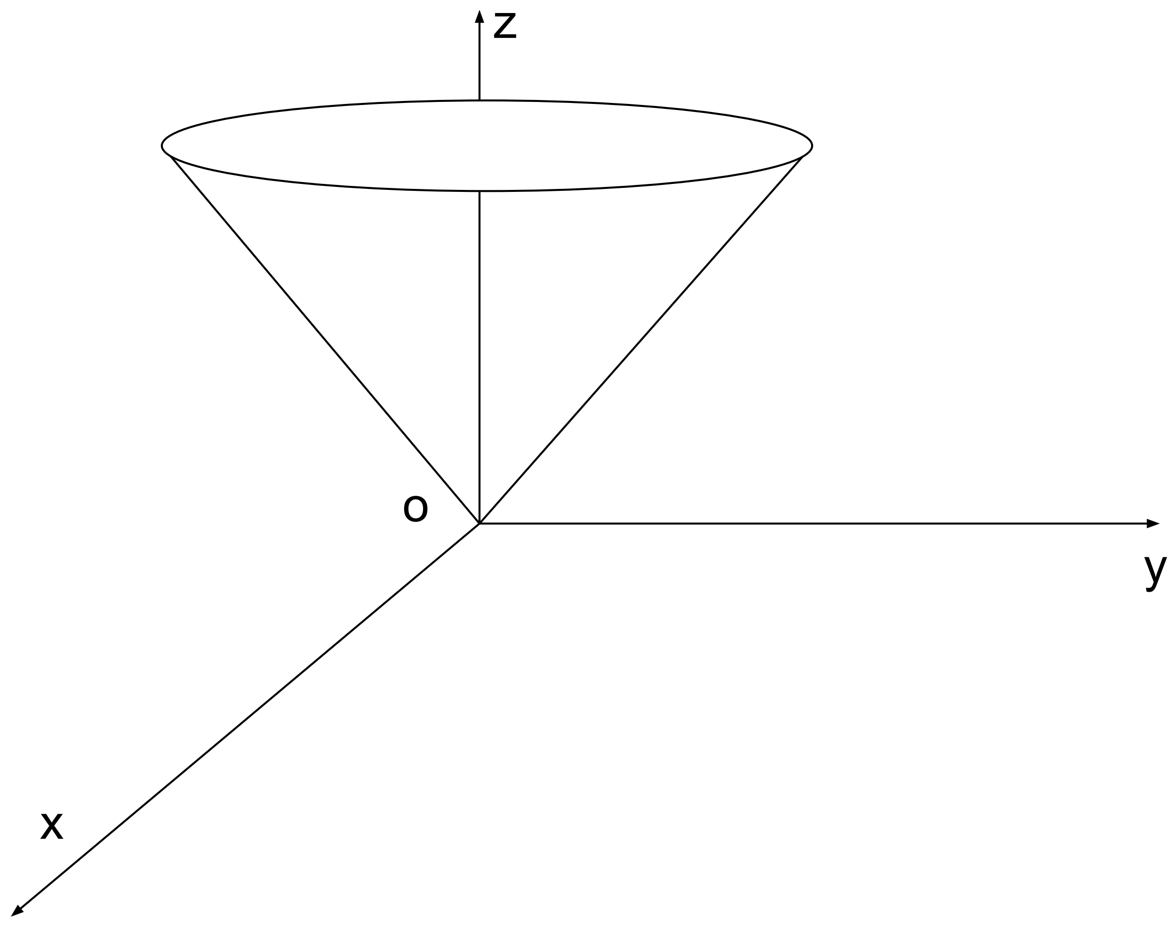
График функции

Функцию двух переменных можно изобразить графически. Каждой паре (x, y)$\in$D ставится в соответствие точка M(x, y,z), принадлежащая графику функции и являющаяся концом перпендикуляра PM к плоскости Oxy.



Пример

На рисунке изображен конус $z = \sqrt{x^2 + y^2}$



Предел функции 2-х переменных

δ ***-окрестностью*** точки M_0 называется совокупность всех точек, лежащих внутри круга радиуса δ с центром в точке M_0 .

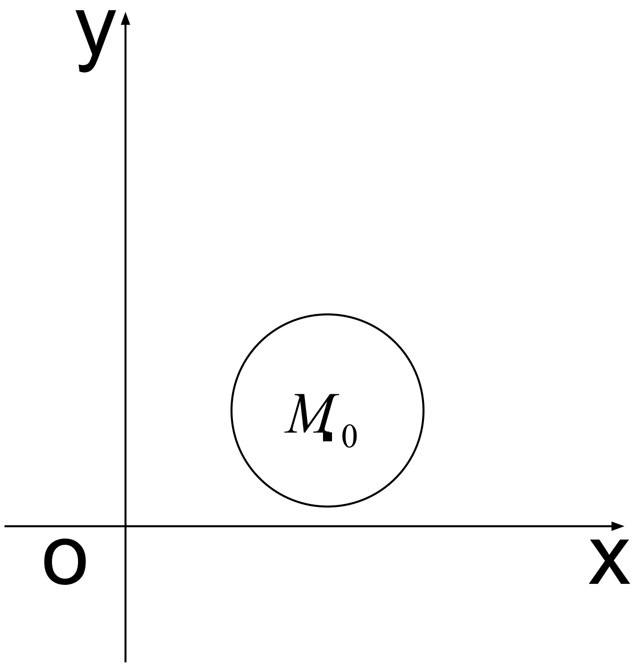
Предел функции 2-х переменных

Таким образом,

δ -окрестностью точки M_0 является множество точек,

УДОВЛЕТВОРЯЮЩИХ НЕРАВЕНСТВУ

$$\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta$$



Определение предела функции 2-х переменных

Число ***A*** называется пределом функции *z=f(x,y)* при $M \to M_0$ *, если для любого числа* $\varepsilon > 0$ *найдется такая* δ *- окрестность точки* M_0*,что для всех точек M(x,y), лежащих в этой окрестности ,* δ *выполняется условие*

$$\left| f(x,y) - A \right| < \varepsilon$$

При этом пишут: $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x,y) = A$ или

$$\lim_{M \to M_0} f(x,y) = A$$

Функция нескольких переменных называется *бесконечно малой*, если ее предел равен нулю.

Правила предельного перехода, установленные для функции одной переменной, остаются справедливыми.

Непрерывность

Функция *z=f(x,y)* называется ***непрерывной в точке*** M_0 , если выполнены условия:

1)функция определена в точке M_0,

2)если существует $\lim\limits_{M\to M_0} f(M)$,

3)если $\lim\limits_{M\to M_0} f(M)=f(M_0)$

Непрерывность

Другое определение: Функция *z=f(x,y)* называется *непрерывной в точке* M_0, если в этой точке бесконечно малому приращению аргументов соответствует бесконечно малое приращение функции, т. е. $\lim\limits_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \Delta z = 0,$

где $\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$.

Области

Областью (*открытой областью*) называется множество точек плоскости, обладающее свойствами:

каждая точка области принадлежит ей вместе с некоторой окрестностью (свойство открытости);

всякие две точки области можно соединить непрерывной линией, целиком лежащей в этой области (свойство связности).

Точка M_0 называется *граничной точкой области G*, если любая окрестность этой точки содержит как точки области *G*, так и точки, ей не принадлежащие.

Множество всех граничных точек области называется ее *границей.*

Если к открытой области присоединить ее границу, то полученное множество точек называется *замкнутой областью*.

Область называется *ограниченной*, если можно подобрать круг, полностью ее покрывающий. В противном случае область называется *неограниченной*

Функция называется *непрерывной в области G*, если она непрерывна в каждой точке этой области.

Свойства функции, непрерывной в замкнутой области

Если функция $z = f(P)$ непрерывна в ограниченной замкнутой области, то она в этой области

1)ограничена: $|f(P)| \leq N$;

2) принимает наименьшее и наибольшее значения (соответственно *m* и *M*);

3) принимает хотя бы в одной точке области любое численное значение, заключенное между *m* и *M*.

Частные приращения функции 2-х переменных

Разность $\Delta_x z = f(x+\Delta x, y) - f(x, y)$ называется частным приращением функции $f(x, y)$ по переменной x.

Разность $\Delta_y z = f(x, y+\Delta y) - f(x, y)$ называется частным приращением функции $f(x, y)$ по переменной y.

Частные производные

Определение. Если существует

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x},$$

то он называется *частной производной* (первого порядка) функции $z = f(x, y)$ по переменной x и обозначается

$$z'_x = \frac{\partial z}{\partial x} = f'_x(x, y)$$

Аналогично определяется частная производная по переменной y:

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}$$

Эту производную обозначают

$$z'_y = \frac{\partial z}{\partial y} = f'_y(x, y)$$

Заметив, что $\Delta_x z$ вычисляется при неизменном *y*, а $\Delta_y z$ – при неизменном *x*, можно сделать вывод: правила вычисления частных производных совпадают с правилами дифференцирования функций одной переменной, но при вычислении z'_x полагают $y = const$, а при вычислении z'_y полагают $x = const$.

Производные высших порядков

Частной производной n-го порядка функции нескольких переменных называется частная производная первого порядка от частной производной (n-1)-го порядка той же функции. Например, для функции 2-х переменных имеем:

$$z''_{xx} = (z'_x)'_x \qquad z''_{xy} = (z'_x)'_y$$

$$z''_{yx} = (z'_y)'_x \qquad z''_{yy} = (z'_y)'_y$$

Равенство смешанных производных

Теорема. Две смешанные частные производные одной и той же функции, отличающиеся лишь порядком дифференцирования, равны между собой при условии их непрерывности.

Так, $$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x},$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} = \frac{\partial^3 z}{\partial y^2 \partial x} = \frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x \partial y}$$

ВГУЭС