



Функции. Пределы функций

Основные
понятия теории
пределов

Студент должен знать

- Роль и место математики в современном мире
- Основные понятия теории функций, виды функций, свойства функций.
- Основные понятия теории пределов, свойства пределов.
- Методы вычисления пределов:
 - Методы раскрытия неопределённостей;
 - Замечательные пределы.

I. Предмет и задачи математики

■ Матемáтика

- Древне-греческий: μαθηματικά
 - Древне-греческий: μάθημα – изучение, наука)
- наука о структурах, порядке и отношениях, которая исторически сложилась на основе операций подсчёта, измерения и описания формы объектов.



Математика

– фундаментальная наука:

- предоставляет (общие) языковые средства другим наукам;
- выявляет их структурную взаимосвязь
- способствует нахождению самых общих законов природы

Инструменты, облегчающие вычисления

- **Блез Паскаль** – 1642 г. – суммирующая машина;
- **Готфрид Вильгельм Лейбниц** – 1673 г. – арифмометр (+, −, ×, :);
- **Чарльз Бэббидж** – 1822-1851 гг. – попытка построить аналитическую машину;
- **Конрад Цузе** – 1943 г. – электромеханическая вычислительная машина «Марк-1».

Вычислительная машина

- «Гуманитарные» области применения:
 - для хранения информации (музыкальная шкатулка, граммофонная пластинка, виниловый диск, аудиокассета; фото, кино, видеокассета, CD);
 - для передачи информации (телеграф, телефон, радио, телевидение).

Конец XX века

- Компьютерные технологии предложили один универсальный метод обработки, передачи и хранения любых видов информации – математический или цифровой.
 - Математика является теоретической базой информатики.
 - Знание основ математического анализа, дискретной математики, теории вероятностей, математической статистики – неотъемлемая часть общей культуры современного человека.

Медработники среднего звена

- Применение сложной компьютерной техники, в профессиональной деятельности
 - (назовите примеры);
 - (назовите примеры);
 - (назовите примеры);
 - (назовите примеры).

Медработники среднего звена

- Решение математических задач различной степени сложности:
 - расчёт процентной концентрации раствора;
 - вычисление минутного объёма дыхания;
 - расчёт прибавки роста и массы детей;
 - оценка пропорциональности развития ребёнка с использованием антропометрических индексов;
 - определение показателей сердечной деятельности;
 - расчёт рациона питания с использованием объёмного и калорийного способов;
 - проведение статистических исследований и обработка полученных данных;
 - применение статистических показателей здоровья населения и деятельности лечебно-профилактических учреждений для построения прогнозов развития, планов и так далее.

II. Функции

Зависимость по некоторому правилу числовой переменной y от числовой переменной x называется *функцией*, если каждому значению x соответствует единственное значение y .

Аргумент и значение функции

- Переменную x называют *независимой переменной* или *аргументом*.
- Значение y , соответствующее заданному значению x , называют *значением функции* или *зависимой переменной*.

Области определения и значений функции

- Все значения, которые принимает независимая переменная x , образуют *область определения функции $D(f)$* .
- Все значения, которые принимает функция $f(x)$, образуют *область значений функции $E(f)$* .

Виды функций

- Линейная функция;
- прямая пропорциональность.
постоянная функция;
- Обратная пропорциональность;
- Степенная функция;
- Показательная функция;
- Логарифмическая функция;
- Тригонометрические функции.



Свойства функций

Чётность

- а) Функция $f(x)$ называется *чётной*, если
- $D(f)$ симметрична относительно начала координат;
 - $\forall x \in D(f)$ справедливо: $f(-x) = f(x)$.

График чётной функции симметричен относительно оси ординат

Чётность

b) Функция $f(x)$ называется *нечётной*, если

- $D(f)$ симметрична относительно начала координат;
- $\forall x \in D(f)$ справедливо: $f(-x) = -f(x)$.

График нечётной функции симметричен относительно начала координат

Чётность

Функция $f(x)$ не обладает чётностью, если условия $a)$ и $b)$ не выполняются.

График такой функции не обладает симметрией относительно оси ординат или начала координат.

Примеры определения чётности функции

Пример 1: $f(x) = 2x^2 - 5$

Решение:

1. $D(f) = R = (-\infty; +\infty)$ – симметрична относительно начала координат;

2. $f(-x) = 2(-x)^2 - 5 = 2x^2 - 5 = f(x)$;

Выполняется условие *a*, значит, $f(x)$ – чётная функция.

Примеры определения чётности функции

Пример 2: $g(x) = x^3 + 3x$

Решение:

1. $D(f) = R = (-\infty; +\infty)$ – симметрична относительно начала координат;

2. $g(-x) = (-x)^3 + 3(-x) = -x^3 - 3x = -(x^3 + 3x) = -g(x)$;

Выполняется условие **b**, значит, $g(x)$ – нечётная функция

Примеры определения чётности функции

Пример 3: $h(x) = x^3 - 7$

Решение:

1. $D(f) = R = (-\infty; +\infty)$ – симметрична относительно начала координат;

2. $h(-x) = (-x)^3 - 7 = -x^3 - 7 = -(x^3 + 7);$

Условия **a** и **b** не выполняются, значит, функция $h(x)$ не является ни чётной, ни нечётной, или чётностью не обладает.

Периодичность

Функция $f(x)$ называется *периодичной* с *наименьшим положительным периодом* $T > 0$, если для любого $x \in D(f)$ справедливо:

$$f(x + T \cdot n) = f(x), \text{ где } n \in \mathbb{Z}.$$

Непрерывность

Функция $f(x)$ называется *непрерывной* в точке x_0 , если

$$f(x) \rightarrow f(x_0) \text{ при } x \rightarrow x_0.$$

МОНОТОННОСТЬ

Функция $f(x)$ *возрастает* на отрезке $[a; b]$,
если $\forall x \in [a; b]$ справедливо:

$$f(x_1) > f(x_2) \text{ при } x_1 > x_2$$

(или:

бóльшее значение функции соответствует
бóльшему значению аргумента);

МОНОТОННОСТЬ

Функция $f(x)$ убывает на отрезке $[a; b]$,
если $\forall x \in [a; b]$ справедливо:

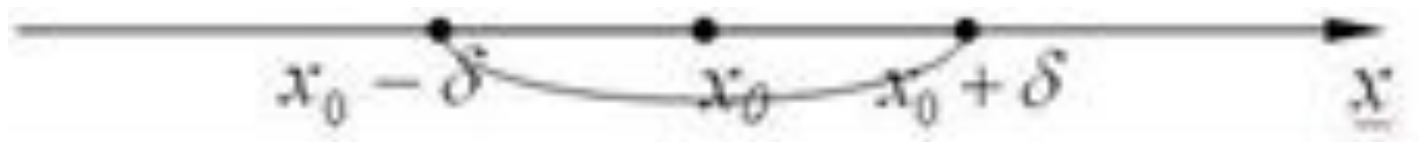
$$f(x_1) > f(x_2) \text{ при } x_1 < x_2$$

(или:

бóльшее значение функции соответствует
мéньшему значению аргумента)

δ -окрестность точки

δ -окрестностью точки x_0 называют некоторый отрезок $[x_0 - \delta; x_0 + \delta]$, где δ – малое положительное число.



Точки экстремума

Точка x_0 называется *точкой минимума* функции $f(x)$, если для любого x из δ -окрестности точки x_0 справедливо:

$$f(x) \geq f(x_0);$$

Точки экстремума

Точка x_0 называется *точкой максимума* функции $f(x)$, если для любого x из δ -окрестности точки x_0 справедливо:

$$f(x) < f(x_0).$$

Экстремумы функции

Значение функции $f(x)$ в точке минимума, называется **МИНИМУМОМ** функции;

Значение функции $f(x)$ в точке максимума, называется **МАКСИМУМОМ** функции.

Наибольшее значение функции на данном отрезке

Значение функции $f(x_0)$ в точке $x_0 \in [a; b]$ называется *наибольшим*

значением функции $f(x)$ на отрезке $[a; b]$, если для любого $x \in [a; b]$ справедливо:

$$f(x) < f(x_0);$$

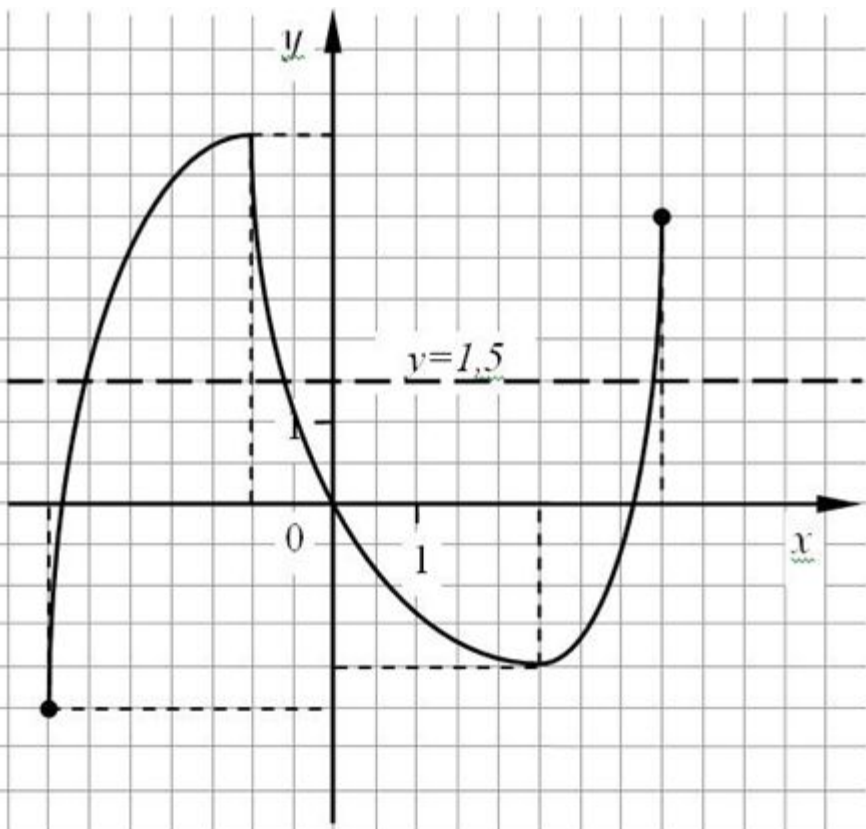
Наименьшее значение функции на данном отрезке

Значение функции $f(x_0)$ в точке $x_0 \in [a; b]$ называется *наименьшим*

значением функции $f(x)$ на отрезке $[a; b]$, если для любого $x \in [a; b]$ справедливо:

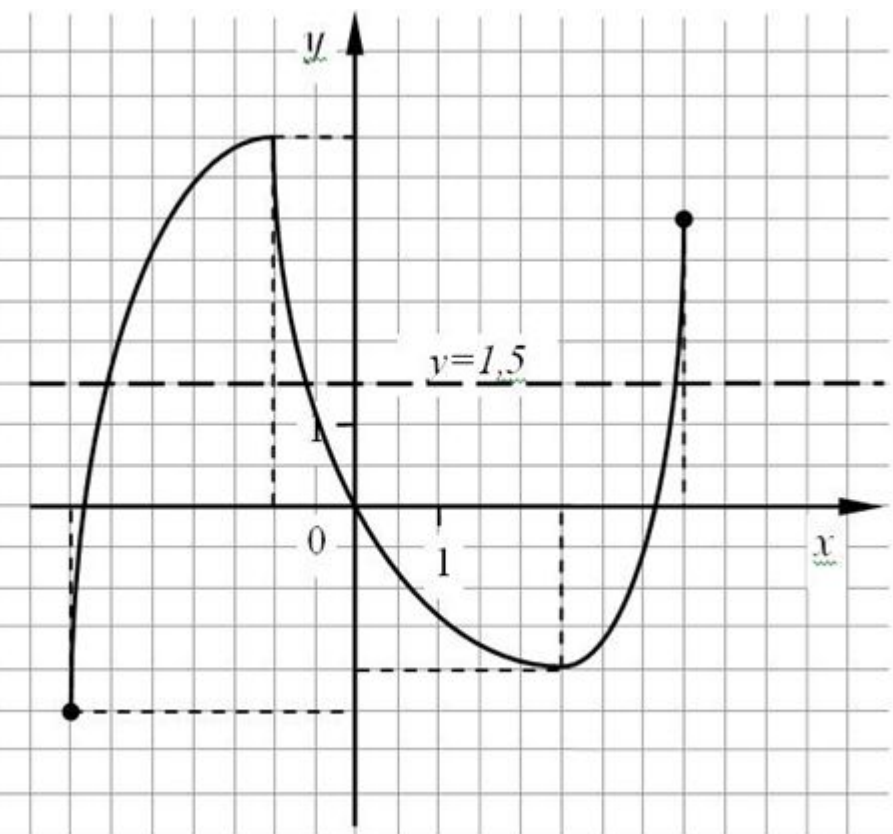
$$f(x) \geq f(x_0).$$

Для функции, заданной графиком, укажите:



- а) область определения функции;
- б) область значений функции;
- в) наибольшее и наименьшее значения функции;
- г) точки экстремума и значения функции в них;
- д) промежутки монотонности функции;
- е) нули функции;
- ж) при каких значениях переменной справедливо: $f(x) > 1,5$?

Для функции, заданной графиком, укажите:



а) $D(f) = [-3, 5; 4]$;

б) $E(f) = [-2, 5; 4, 5]$;

в) $y_{\text{наим}} = -2, 5$;

$y_{\text{наибол}} = 4, 5$;

г) $x_{\text{min}} = 2, 5$;

$x_{\text{max}} = -1$;

$y_{\text{min}} = -2$;

$y_{\text{max}} = 4, 5$;

д) $f(x) \uparrow$ при $x \in (-3, 5; 1) \cup$

$(2, 5; 4]$;

е) $f(x) = 0$ при

$x_1 = -3, 3$;

$x_2 = 0$;

$x_3 = 3, 7$;

ж) $f(x) > 1, 5$ при

$x \in (-3; -0, 6) \cup$

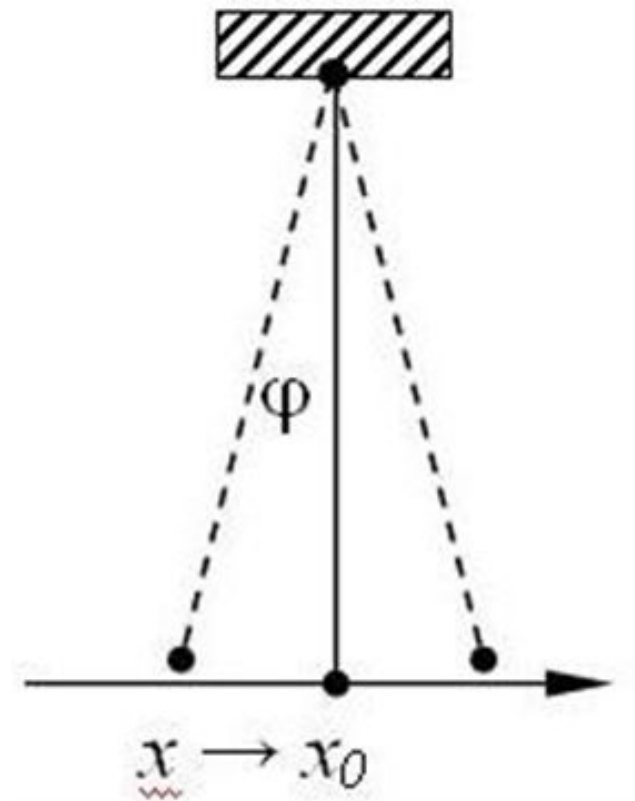
$(3, 9; 4]$.



Пределы, их свойства

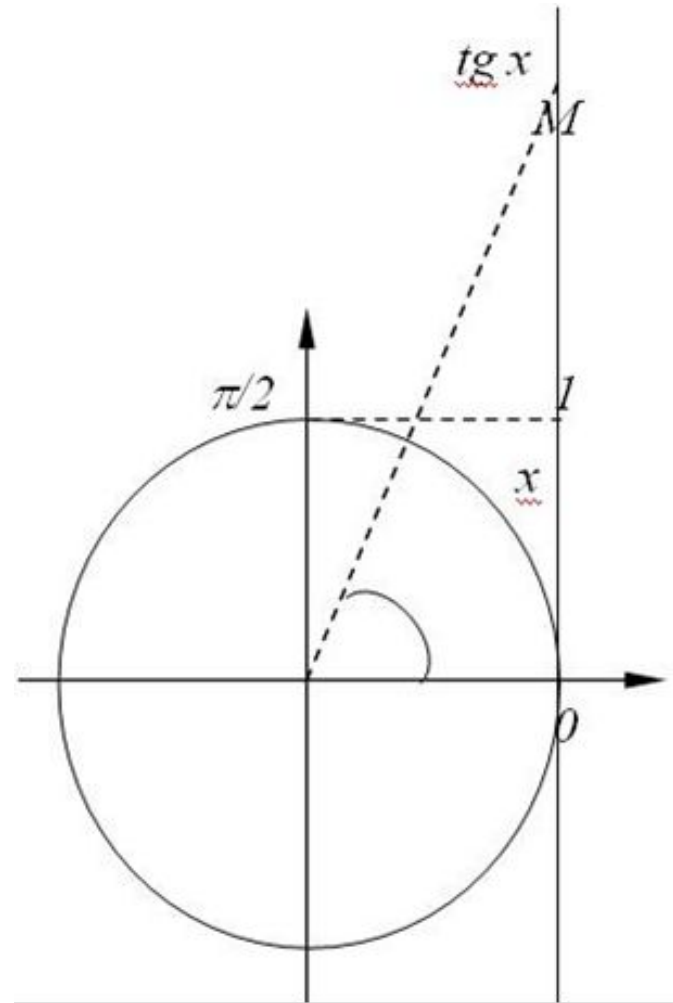
Бесконечно малая функция (БМФ)

- Функцию $y = \alpha(x)$ называют бесконечно малой при $x \rightarrow x_0$, если для любого сколь угодно малого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для всех x из δ -окрестности точки x_0 справедливо: $|\alpha(x)| < \varepsilon$.



Бесконечно большая функция (ББФ)

- Функцию $y = \Phi(x)$ называют *бесконечно большой* при $x \rightarrow x_0$, если для любого сколь угодно большого $M > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для всех x из δ -окрестности точки x_0 справедливо: $|\Phi(x)| > M$.



Предел функции в точке

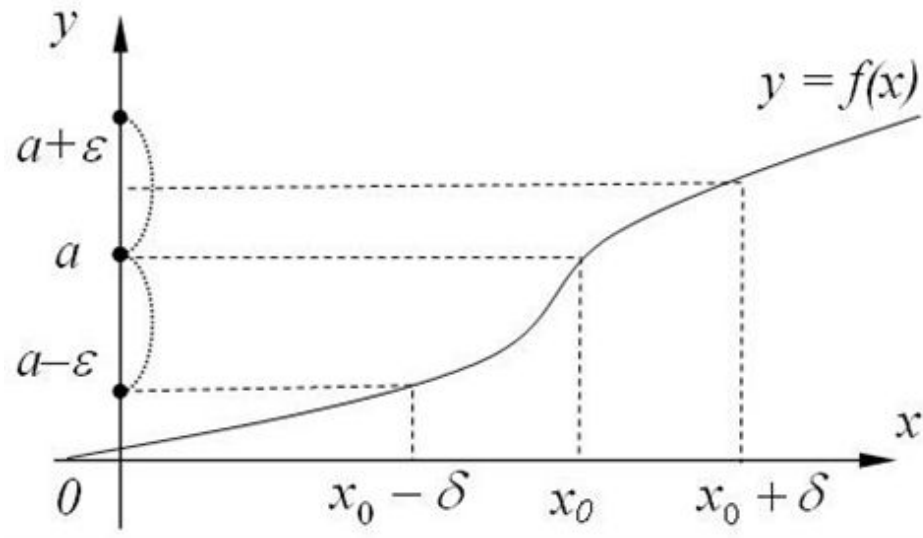
Число a называют пределом функции $f(x)$ при $x \rightarrow x_0$, если для любого сколь угодно малого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для


всех x из δ -окрестности точки x_0 справедливо:

$$|f(x) - a| < \varepsilon;$$

пишут:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$$





Свойства предела функции в точке

(основные теоремы
о пределах)

Теорема 1

Если функция $f(x)$ **имеет предел**
при $x \rightarrow x_0$, то **только один**.

Теорема 2

Предел постоянной величины равен самой этой величине:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} C = C$$

Теорема 3

Предел суммы двух функций равен сумме их пределов:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$$

Теорема 4

Предел произведения двух функций равен произведению их пределов:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$$

Теорема 5

Предел отношения двух функций равен отношению их пределов, если предел делителя отличен от нуля:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)}, \quad \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \neq 0.$$

Теорема 6

Предел бесконечно малой функции равен 0:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = 0$$

Теорема 7

Предел бесконечно большой функции
равен ∞

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \Phi(x) = \infty$$

Теорема 8

Предел отношения постоянной величины к бесконечно малой функции есть бесконечно большая величина:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{C}{\alpha(x)} = \frac{C}{0} = \infty$$

Теорема 9

Предел отношения постоянной величины к бесконечно большой функции есть бесконечно малая величина:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{C}{\Phi(x)} = \frac{C}{\infty} = 0$$

Следствие 1

Если функция $f(x)$ имеет предел при $x \rightarrow x_0$, то предел этой функции в степени n равен n -ой степени предела данной функции:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x))^n = \left(\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \right)^n$$

Следствие 2


Предел произведения постоянной величины на функцию равен произведению этой величины на предел функции:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (C \cdot f(x)) = C \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$$

Следствие 3

Если функции $f(x)$ и $g(x)$ имеют пределы при $x \rightarrow x_0$, то

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x))^{g(x)} = \left(\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \right)^{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)}$$



Замечательные пределы

Первый замечательный

предел

Предел отношения синуса бесконечно малой дуги к самой дуге, выраженной в радианах, равен единице, т.е.:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Второй замечательный предел

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{1/x} = e.$$

или

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^t = e.$$

$$e \approx 2,7182818284\dots$$



Итоги

- свойства пределов;
- замечательные пределы;
- методы вычисления пределов.