Функция. Основные понятия.

- Понятие функции
- Основные характеристики функции
- Основные элементарные функции
- Сложная функция
- Элементарные функции
- Алгебраические и трансцендентные функции
- Предел переменной величины

Понятие функции

При изучении различных явлений природы и решении технических задач, а, следовательно, и в математике приходится рассматривать изменение одной величины в зависимости от изменения другой.

Так, например, известно, что площадь круга выражается через радиус формулой $S = \pi r^2$.

Если радиус r принимает различные числовые значения, то площадь S также принимает различные числовые значения, т.е. изменение одной переменной влечет изменение другой.

Если каждому значению переменной x, принадлежащему некоторой области, соответствует одно определенное значение другой переменной y, то y есть ***функция*** от x.

$$y = f(x)$$

зависимая переменная или ***функция***

независимая переменная или ***аргумент***

Понятие функции

Совокупность значений *x*, для которых определяются значения *y* в силу правила *f(x)* называется ***<u>областью определения</u>*** (областью существования) функции: *D(f)*

Совокупность значений *y* называется ***<u>множеством значений</u>*** функции: *E(f)*

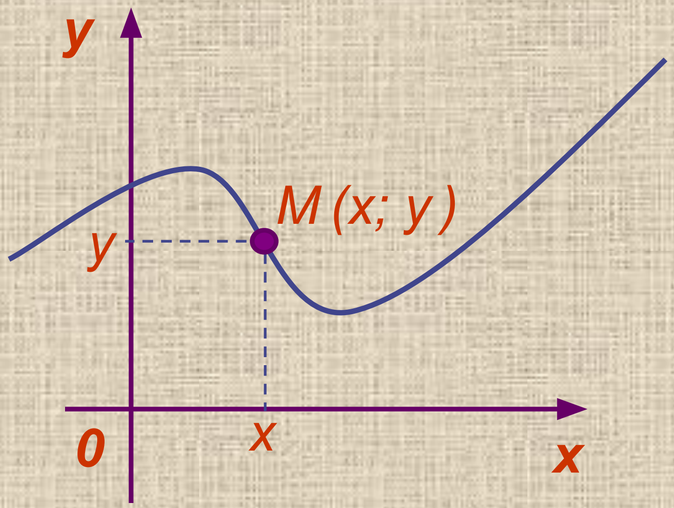
<u>Способы задания функции:</u>

1) Табличный. При этом способе выписываются в определенном порядке значения аргумента и соответствующие им значения функции.

x	x_1	x_2	...	x_n
y	y_1	y_2	...	y_n

Понятие функции

2) Графический.



Совокупность точек плоскости *XOY*, абсциссы которых являются значениями независимой переменной, а ординаты – соответствующими значениями функции, называется графиком функции
y = f(x).

3) Аналитический:

Функция *y = f(x)* задана аналитически , если *f* - обозначает действия, выполняемые над переменной, например:

$$y = x^2 + 5$$

Основные характеристики функции

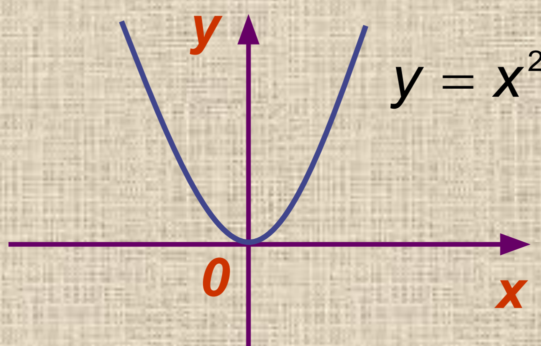
Функция ***y = f(x)*** определенная на множестве ***D***, называется ***четной***, если для любого ***x***, принадлежащего ***D*** выполняются условия: ***-x*** также принадлежит ***D*** и ***f(-x) = f(x)***.

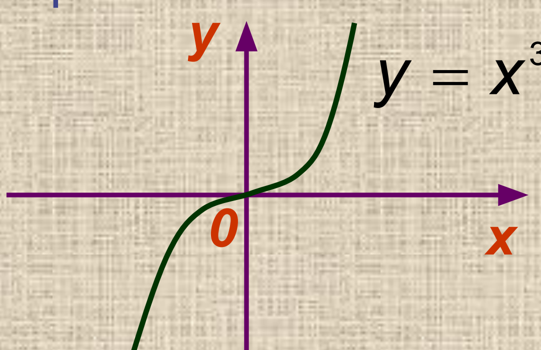
$$\boxed{\forall x}\boxed{\in D}\boxed{:}\begin{cases} -x \in D \\ f(-x) = f(x) \end{cases}$$

Функция ***y = f(x)*** определенная на множестве ***D***, называется ***нечетной***, если: $\forall x \in D: \begin{cases} -x \in D \\ f(-x) = -f(x) \end{cases}$

График четной функции симметричен относительно оси **OY**

График нечетной функции симметричен относительно точки ***O(0; 0)***





Основные характеристики функции

Пусть функция ***y = f(x)*** определена на множестве ***D*** и пусть $D_1 \subset D$ (множество ***D_1*** является подмножеством множества ***D***)

Если $\forall x_1, x_2 \in D_1;\ \boxed{x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)}$

то функция называется ***возрастающей***.

Если $\forall x_1, x_2 \in D_1;\ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

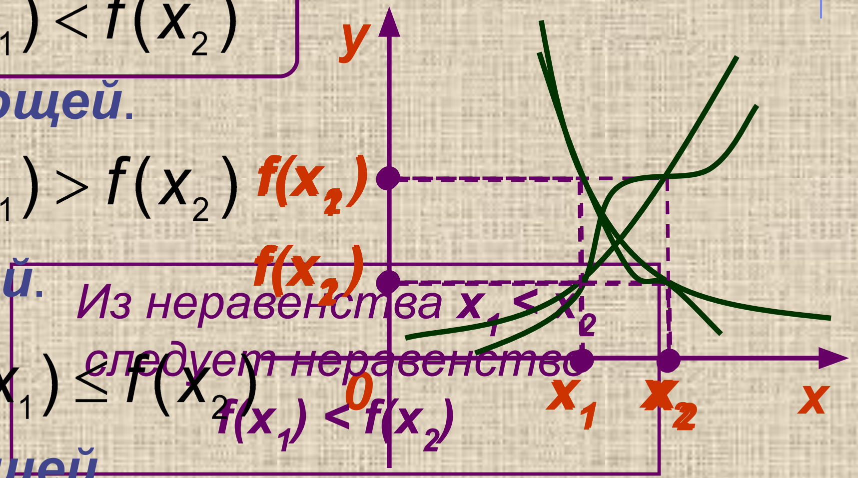
то функция называется ***убывающей***.

Если $\forall x_1, x_2 \in D_1;\ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \le f(x_2)$

то функция называется ***неубывающей***.

Если $\forall x_1, x_2 \in D_1;\ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \ge f(x_2)$

то функция называется ***невозрастающей***.



Возрастающие, убывающие, невозрастающие и неубывающие функции называются ***монотонными*** на множестве ***D_1***, интервал, на котором функция монотонна называется ***интервалом монотонности.***

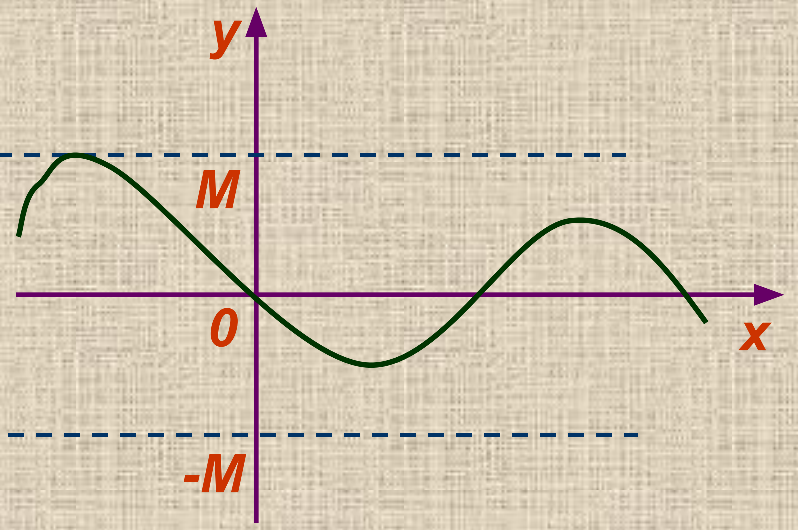
Основные характеристики функции

Функция ***y = f(x)*** определенная на множестве ***D***, называется ***ограниченной***, если

$$\boxed{\exists M} > 0 : \forall x \in D \Rightarrow |f(x)| \le M$$

Существует такое число М

График ограниченной функции лежит между прямыми:
y = - M и ***y = M.***



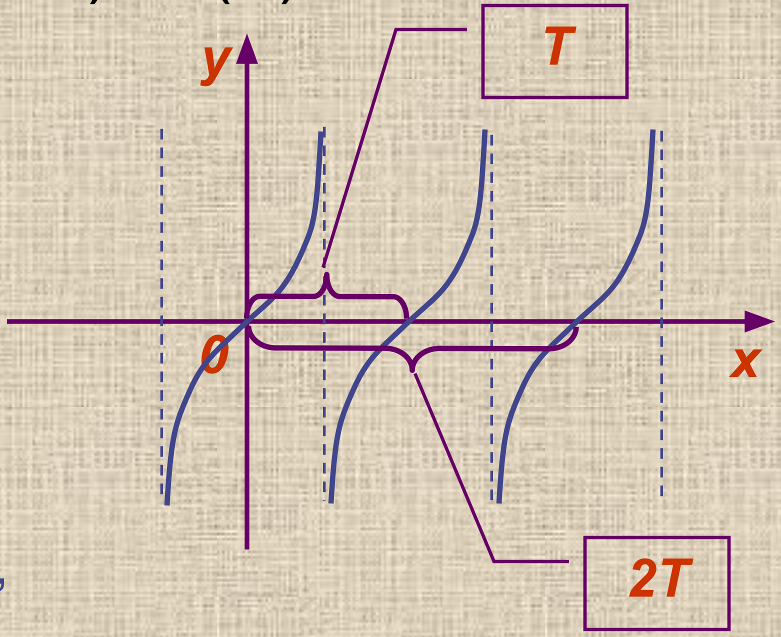
Основные характеристики функции

Функция ***y = f(x)*** определенная на множестве ***D***, называется ***периодической***, если

$$\exists T > 0 : \forall x \in D \Rightarrow \begin{cases} x + T \in D \\ f(x+T) = f(x) \end{cases}$$

Число **Т** называется ***периодом*** функции.

Если **Т** – период функции, то ее периодами будут также числа **2Т**, **3Т** и так далее.



Наименьшее положительное число **Т**, удовлетворяющее условию: ***f(x +T) = f(x),*** называется ***основным периодом***

Основные элементарные функции

1) Линейная функция: $y = kx + b$

2) Степенная функция:

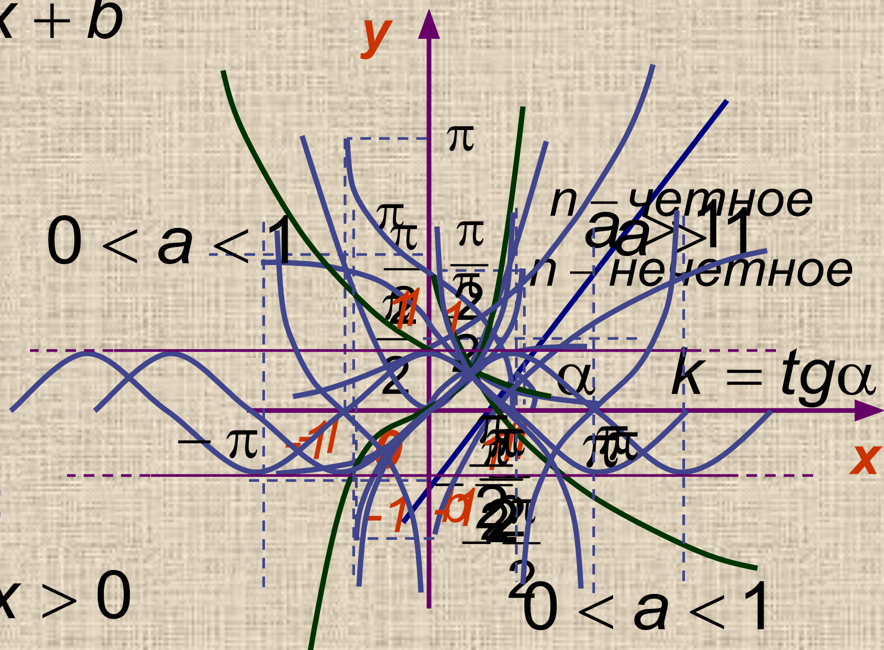
$y = x^n$

3) Показательная функция:

$y = a^x \qquad a > 0; a \neq 1$

4) Логарифмическая функция:

$y = \log_a x \qquad a > 0; a \neq 1; x > 0$



5) Тригонометрические функции: $y = \sin x \qquad y = \cos x$

$y = tg\, x \qquad y = ctg\, x$

6) Обратные тригонометрические функции:

$y = \arcsin x \quad y = \arccos x \quad y = arctg\, x \quad y = arcctg\, x$

Сложная функция

Если *y* является функцией от *u*, а *u* в свою очередь зависит от переменной *x*, то *y* также зависит от *x*.

$$y = F(\varphi(x)) \qquad u = \varphi(x)$$

Сложная функция

Пример:

$$\left.\begin{array}{l} y = \cos u \\ u = \sqrt{x} \end{array}\right\} \Rightarrow \ y = \cos\sqrt{x}$$

Областью определения функции $y = F(\varphi(x))$ является или вся область определения функции *u(x)* или та ее часть, в которой определяются значения *u*, не выходящие из области определения функции *F(u)*.

Пример: $y = \sqrt{\log_2 x}$

$$\begin{cases} x > 0 \\ \log_2 x \ge 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \ge 1 \end{cases} \Rightarrow \ x \ge 1$$

Элементарные функции

Элементарной функцией называется функция, которая может быть задана одной формулой вида $y = f(x)$, где справа стоящее выражение составлено из основных элементарных функций и постоянных при помощи конечного числа операций сложения, вычитания, умножения, деления и взятия функции от функции.

Пример:

$$y = \frac{\lg x + 4 \cdot (\cos x)^2 - 5}{10^x - x}$$

Алгебраические и трансцендентные функции

К числу ***алгебраических*** функций относятся элементарные функции следующего вида:

1) Целая рациональная функция или многочлен:

$$y = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n$$

2) Дробная рациональная функция – отношение многочленов:

$$y = \frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n}{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \ldots + b_m}$$

Коэффициенты многочлена – постоянные числа

Целое неотрицательное число – степень многочлена

3) Иррациональная функция:

Если в формуле *y = f(x)* в правой части производятся операции сложения, вычитания, умножения, деления и возведения в степень с рациональными *нецелыми* показателями, то функция *y = f(x)* называется ***иррациональной***

Пример: $y = \sqrt{x} + 5\sqrt[3]{x^4} - 2$

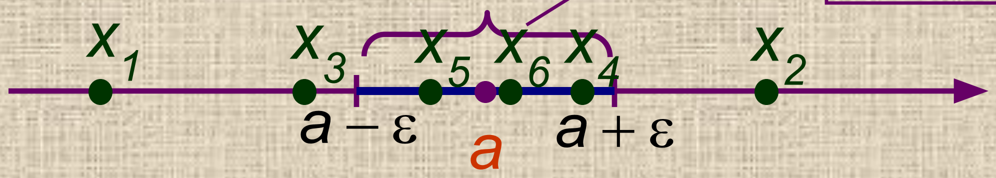
Функция, не являющейся алгебраической, называется ***трансцендентной:*** *y = cos x; y = ln x* и так далее.

Предел переменной величины

Постоянное число *a* называется ***пределом*** переменной величины *x*, если $\forall \varepsilon > 0$ можно указать такое значение переменной *x*, что все последующие значения переменной будут удовлетворять неравенству:

$$|x - a| < \varepsilon$$

ε *окрестность точки a*



$x \to a; \quad \lim x = a$

Пример: Пусть переменная величина изменяется по закону:

$x_n = 1 + \dfrac{1}{n}$ Тогда: $x_1 = 1 + \dfrac{1}{1} = 2$ $\quad x_2 = 1 + \dfrac{1}{2} = 1.5$

$x_3 = 1 + \dfrac{1}{3} \approx 1.33$ $\quad x_4 = 1 + \dfrac{1}{4} = 1.25$ $\quad x_5 = 1 + \dfrac{1}{5} = 1.2$

Предел переменной величины

Очевидно, что переменная величина имеет предел, равный единице, то есть $a = 1$.

$$|x_n - 1| = \left|1 + \frac{1}{n} - 1\right| = \left|\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n}$$

Для любого ε все последующие значения переменной, начиная с номера n, где:

$$\frac{1}{n} < \varepsilon \quad \Rightarrow n > \frac{1}{\varepsilon}$$ попадают в ε окрестность точки a.

Пусть, например $\varepsilon = 0.2 \quad n > \dfrac{1}{0.2} \Rightarrow n > 5$

Таким образом, начиная с x_6 все значения переменной величины находятся в ε окрестности точки a.