


$$y = \cos x$$

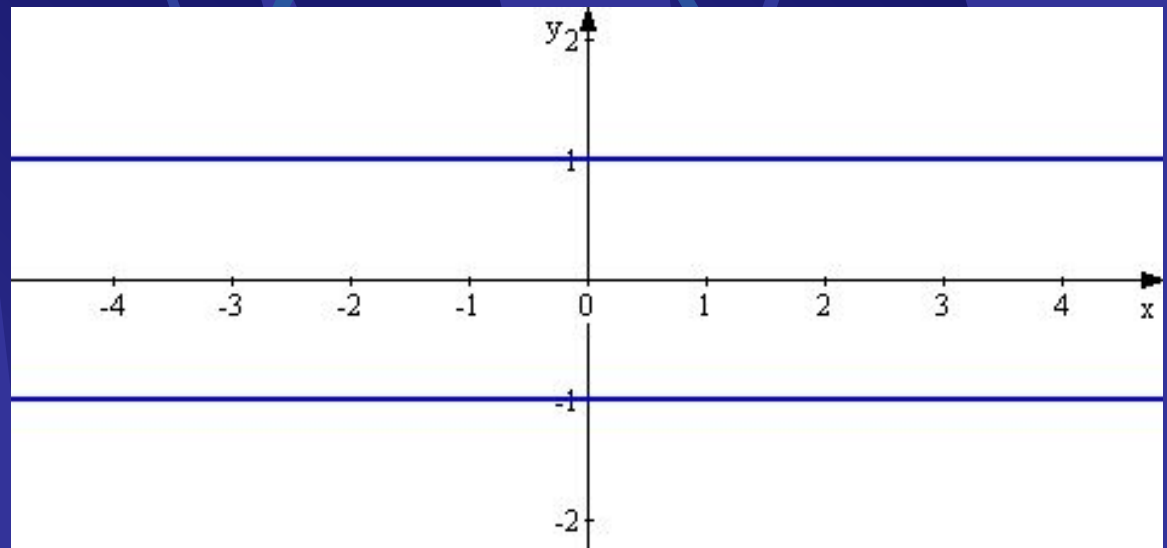
Ее свойства и  
график

# Сегодня мы рассмотрим

- Построение графика функции  $y = \cos x$ ;
- Свойства функции  $y = \cos x$ ;
- Изменение графика функции  $y = \cos x$  в зависимости от изменения функции и аргумента;
- Изменение свойств функции  $y = \cos x$  в зависимости от изменения функции и аргумента;
- Примеры построения графиков функций путем анализа изменения их свойств.

# Построение графика

- Функция  $y = \cos x$  определена на всей числовой прямой и множеством ее значений является отрезок  $[-1; 1]$ . Следовательно, график этой функции расположен в полосе между прямыми  $y = -1$  и  $y = 1$ .



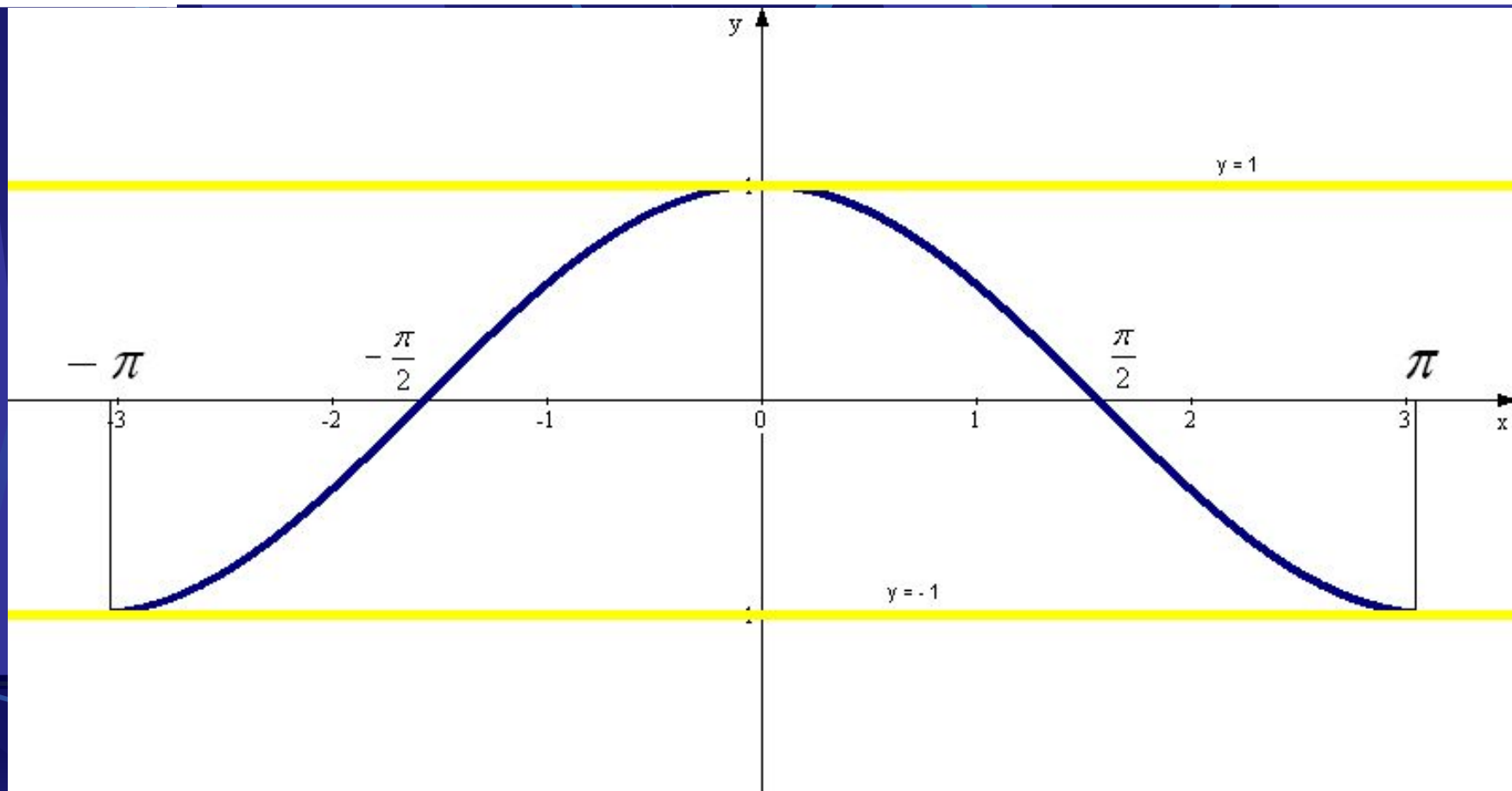
Наумова Ирина  
Михайловна

# Как использовать периодичность и четность при построении

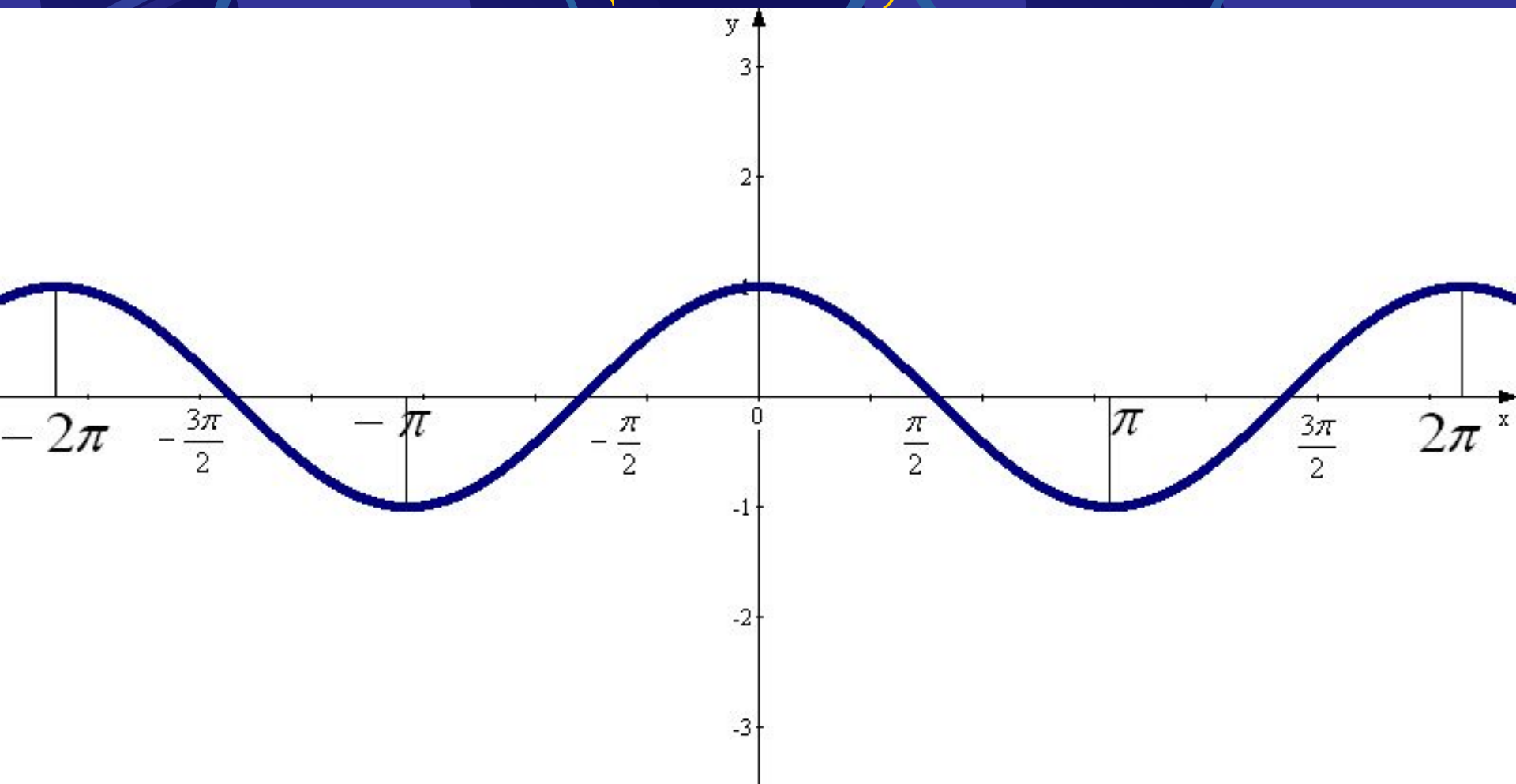
- Так как функция **периодическая** с периодом  $2\pi$ , то достаточно построить ее график на каком –нибудь промежутке длиной  $2\pi$ , например на отрезке  $-\pi \leq x \leq \pi$ ; тогда на промежутках, получаемых сдвигами выбранного отрезка на  $2\pi n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ , график будет таким – же.
- Функция  $y = \cos x$  является **четной**. Поэтому ее график симметричен относительно оси  $OY$ . Для построения графика на отрезке  $-\pi \leq x \leq \pi$  достаточно построить его для  $0 \leq x \leq \pi$ , а затем симметрично отразить относительно оси  $OY$ .

Найдем несколько точек для построения графика на отрезке  $[0; \pi]$  и отразим, полученную часть графика симметрично относительно оси  $OY$ .

$x$	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	$2\pi/3$	$3\pi/4$	$5\pi/6$	$\pi$
$y = \cos x$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0	$-1/2$	$-\sqrt{2}/2$	$-\sqrt{3}/2$	-1



Распространим полученный график на всей числовой прямой с помощью сдвигов на  $2\pi$ ,  $4\pi$  и т.д. вправо, на  $-2\pi$ ,  $-4\pi$  и т.д. влево, т.е. вообще на  $2\pi n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ .



**Итак, график функции  $y = \cos x$  построен геометрически на всей числовой прямой, начиная с построения его части на отрезке  $[0; \pi]$ . Поэтому свойства функции  $y = \cos x$  можно получить, опираясь на свойства этой функции на отрезке  $[0; \pi]$ . Например, функция  $y = \cos x$  возрастает на отрезке  $[-\pi; 0]$ , так как она убывает на отрезке  $[0; \pi]$  и является четной.**

*Перечислим основные свойства функции  $y = \cos x$ .*

# Для этого нужно вспомнить

- Как найти область определения и множество значений тригонометрических функций;
- Какие функции называются периодическими и как найти период функции;
- Какие функции называются четными (нечетными);
- Когда функция возрастает (убывает);
- Как найти нули функции;
- Как определить на каких промежутках функция принимает положительные (отрицательные) значения;
- Как определить когда функция принимает наибольшее (наименьшее) значения.





# Область определения

- Каждому действительному числу  $x$  соответствует единственная точка единичной окружности, получаемая поворотом точки  $(1; 0)$  на угол  $x$  радиан. Для этого угла определены  $\sin x$  и  $\cos x$ . Тем самым каждому действительному числу  $x$  поставлены в соответствие числа  $\sin x$  и  $\cos x$ , т.е. на множестве  $\mathbb{R}$  всех действительных чисел определены функции  $y = \sin x$  и  $y = \cos x$ .
- Таким образом, областью определения функций  $y = \sin x$  и  $y = \cos x$  является множество  $\mathbb{R}$  всех действительных чисел.

# Множество значений

- Чтобы найти множество значений функции  $y = \cos x$ , нужно выяснить, какие значения может принимать  $y$  при различных значениях  $x$ , т.е. установить, для каких значений  $y$  есть такие значения  $x$ , при которых  $\cos x = y$ . Известно, что уравнение  $\cos x = a$  имеет корни, если  $|a| \leq 1$ , и не имеет корней, если  $|a| > 1$ .
- Следовательно множеством значений функции  $y = \cos x$  является отрезок  $-1 \leq y \leq 1$ .

# Периодичность

- Функция  $y = f(x)$  называется периодической, если существует такое число  $T \neq 0$ , что для любого  $x$  из ее области определения выполняется равенство  $f(x - T) = f(x) = f(x + T)$ . Число  $T$  называется периодом функции.
- Известно, что для любого значения  $x$  верны равенства  $\sin(x + 2\pi) = \sin x$ ,  $\cos(x + 2\pi) = \cos x$ . Из этих равенств следует, что значения синуса и косинуса периодически повторяются при изменении аргумента на  $2\pi$ . Такие функции называются периодическими с периодом  $2\pi$ .

# Четность, нечетность

- Функция  $y = f(x)$  называется четной, если для каждого значения  $x$  из ее области определения выполняется равенство  $f(-x) = f(x)$ , график симметричен относительно оси ординат.
- Функция  $y = f(x)$  называется нечетной, если для каждого значения  $x$  из ее области определения выполняется равенство  $f(-x) = -f(x)$ , график симметричен относительно начала координат.

# Возрастание, убывание

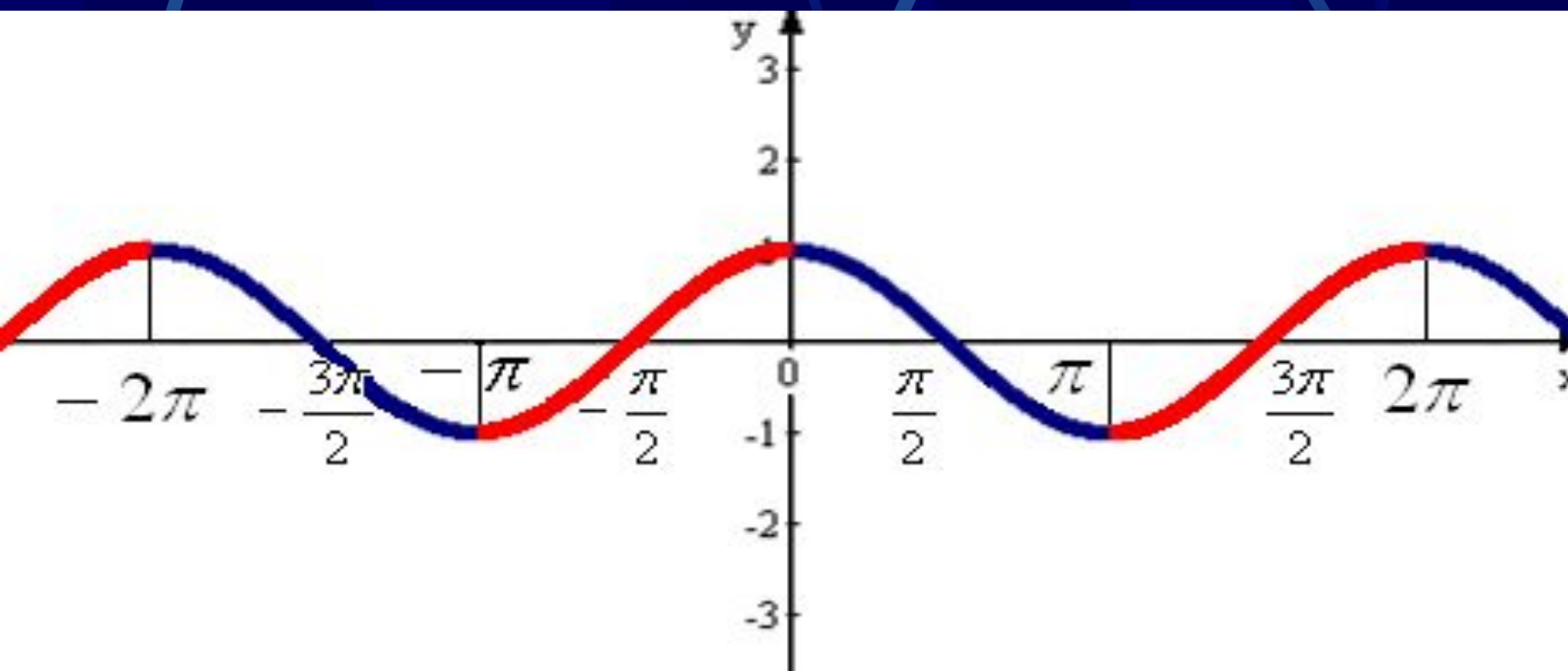
- Функция  $y = f(x)$  называется возрастающей, если наибольшему (наименьшему) значению функции соответствует наибольшее (наименьшее) значение аргумента. Т.е. если  $y_1 > y_2$  ( $y_1 < y_2$ ), то  $x_1 > x_2$  ( $x_1 < x_2$ ).
- Функция  $y = f(x)$  называется убывающей, если наибольшему (наименьшему) значению функции соответствует наименьшее (наибольшее) значение аргумента. Т.е. если  $y_1 > y_2$  ( $y_1 < y_2$ ), то  $x_1 < x_2$  ( $x_1 > x_2$ ).

# Нули функции, положительные и отрицательные значения, наименьшее и наибольшее значения.

- Для того чтобы определить когда функция  $y = \cos x$  принимает значения, равные:
  - нулю;
  - положительные;
  - отрицательные;
  - наименьшее;
  - наибольшее,
- необходимо решить:
  - уравнение  $\cos x = 0$ ;
  - неравенство  $\cos x > 0$ ;
  - неравенство  $\cos x < 0$ ;
  - уравнение  $\cos x = -1$ ;
  - уравнение  $\cos x = 1$ ;

# Свойства функции $y = \cos x$

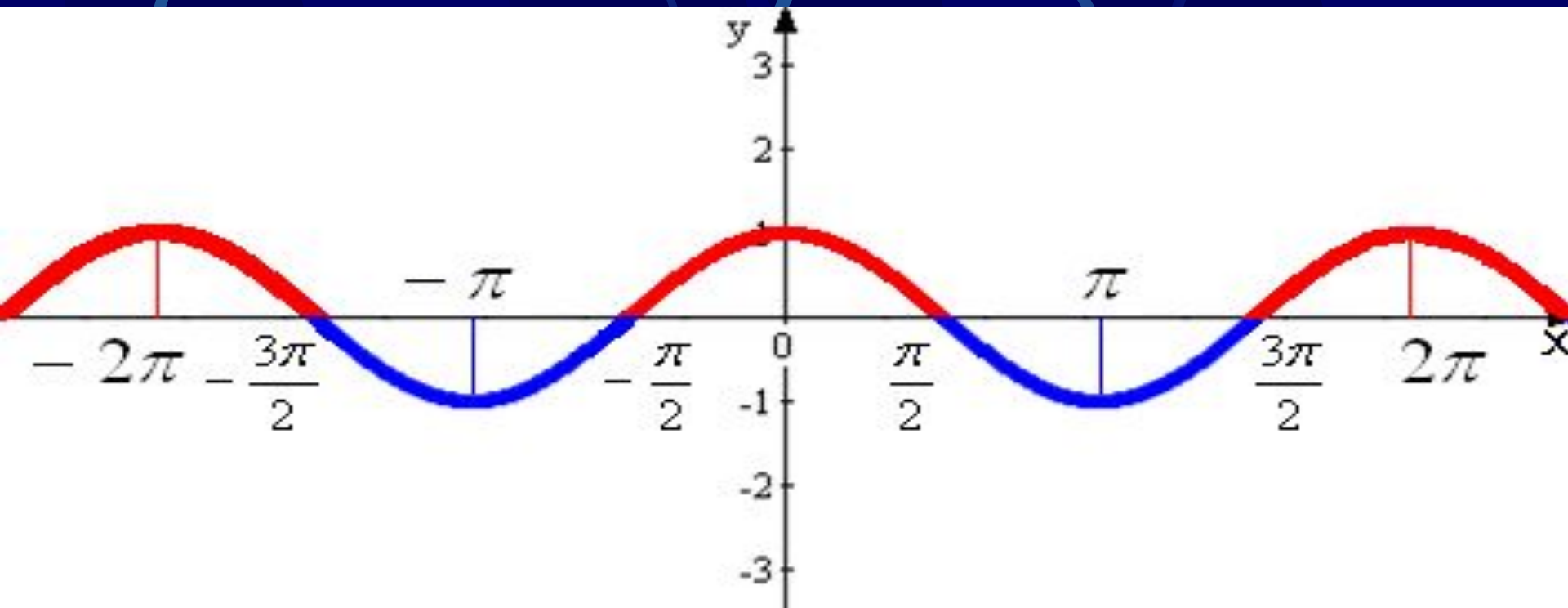
- Область определения:  $D(f): x \in R$ ;
- Множество значений:  $y \in [-1; 1]$ ;
- Периодичность:  $T = 2\pi$ ;
- Четность: четная, т.к.  $\cos(-x) = \cos x$ ,  
график симметричен относительно оси ординат;
- Функция возрастает при:  $\pi + 2\pi n \leq x \leq 2\pi(n+1)$ ,  $n \in Z$ ;
- Функция убывает при:  $\pi n \leq x \leq \pi + 2\pi n$ ,  $n \in Z$ .



# Свойства функции $y = \cos x$

(продолжение)

- Функция принимает значения:
  - Равные нулю при  $x = \pi/2 + \pi n, n \in \mathbb{Z}$ ;
  - Положительные при  $-\pi/2 + 2\pi n < x < \pi/2 + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$ ;
  - Отрицательные при  $\pi/2 + 2\pi n < x < 3\pi/2 + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$ ;
  - Наибольшее, равное 1, при  $x = 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$ ;
  - Наименьшее, равное -1, при  $x = \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$ .





# Преобразование графика функции $y = \cos x$

- Изменение функции

- $y = \cos x + A$
- $y = k \cdot \cos x$
- $y = -\cos x$
- $y = |\cos x|$

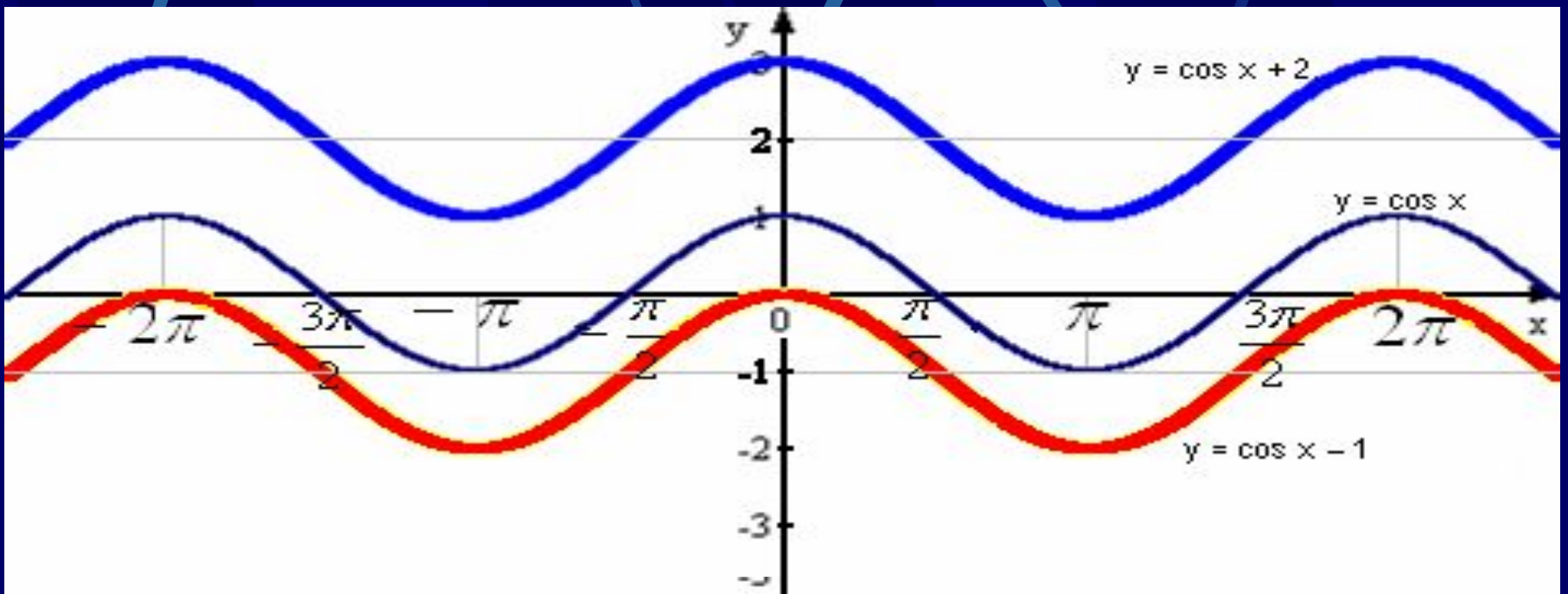


- Изменение аргумента

- $y = \cos(x - a)$
- $y = \cos(k \cdot x)$
- $y = \cos(-x)$
- $y = \cos|x|$

$$y = \cos x + A$$

- Параллельный перенос графика функции  $y = \cos x$  вдоль оси ординат на  $A$  единиц вверх, если  $A > 0$  и на  $|A|$  единиц вниз, если  $A < 0$ .
- Например:  $y = \cos x + 2$ ;  $y = \cos x - 1$ .

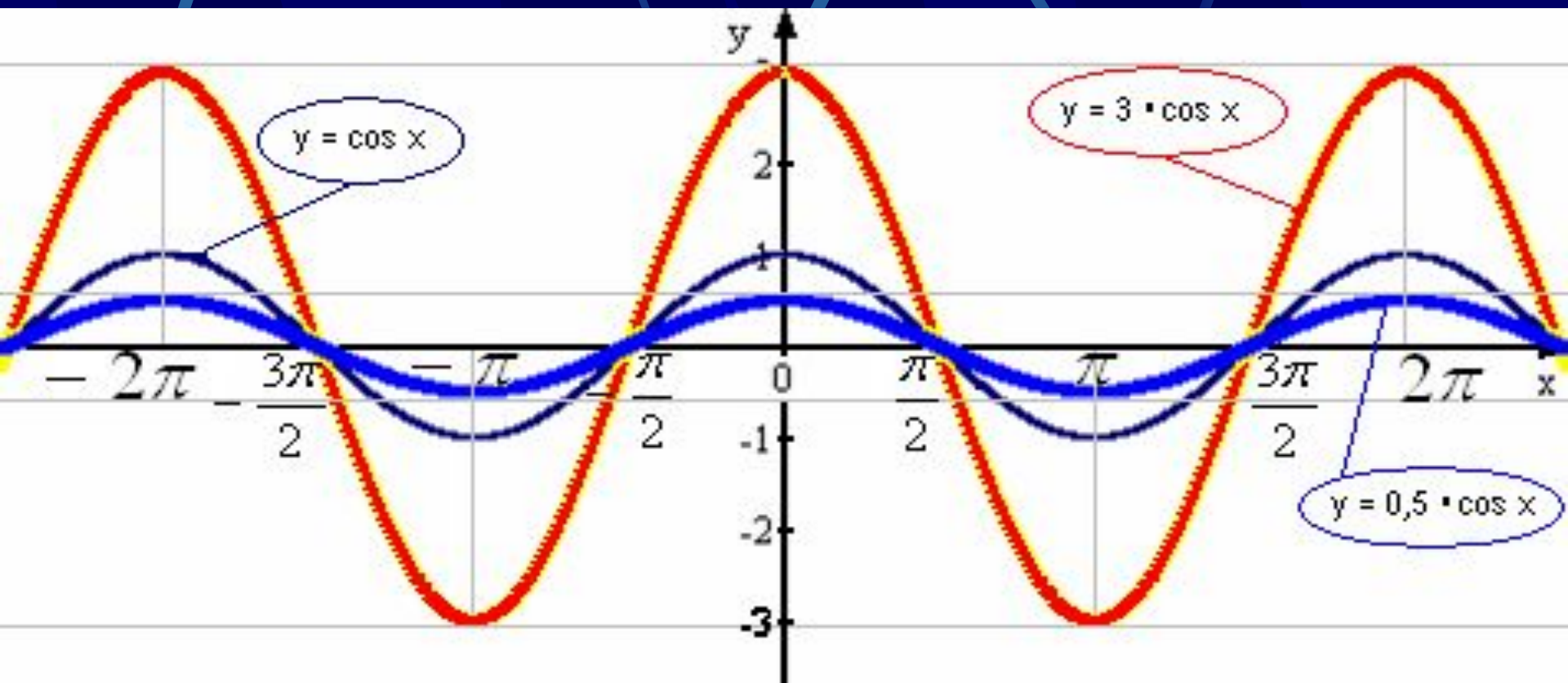


# $y = \cos x + A$ (свойства)

- Изменяются множество значений функции; наибольшее (наименьшее) значения; нули функции; промежутки положительных (отрицательных) значений.
- Например:  $y = \cos x + 2$ .
  - E (f):  $\cos x + 2 = a \Rightarrow \cos x = a - 2$ , т.к.  $-1 \leq y \leq 1$ , то  $-1 \leq a - 2 \leq 1 \Rightarrow 1 \leq a \leq 3$ , т.е.  $y \in [1; 3]$ .
  - Нули функции:  $\cos x + 2 = 0 \Rightarrow \cos x = -2$  данное уравнение не имеет корней т.к.  $|-2| > 1 \Rightarrow$  график данной функции не пересекает ось абсцисс.
  - f(x) > 0: при любом значении x.
  - f(x) < 0: нет.
  - y (наиб) = 3, при:  $x = 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$  (т.к.  $\cos x + 2 = 3 \Rightarrow \cos x = 1 \Rightarrow x = 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$ ).
  - y (наим) = 1, при:  $x = \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$  (т.к.  $\cos x + 2 = 1 \Rightarrow \cos x = -1 \Rightarrow x = \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$ ).

# $y = k \cdot \cos x$

- Растяжение графика функции  $y = \cos x$  вдоль оси ординат относительно оси абсцисс в  $k$  раз, если  $k > 0$  и сжатие в  $1/k$  раз, если  $0 < k < 1$ .
- Например:  $y = 3 \cdot \cos x$ ;  $y = 0,5 \cdot \cos x$ .

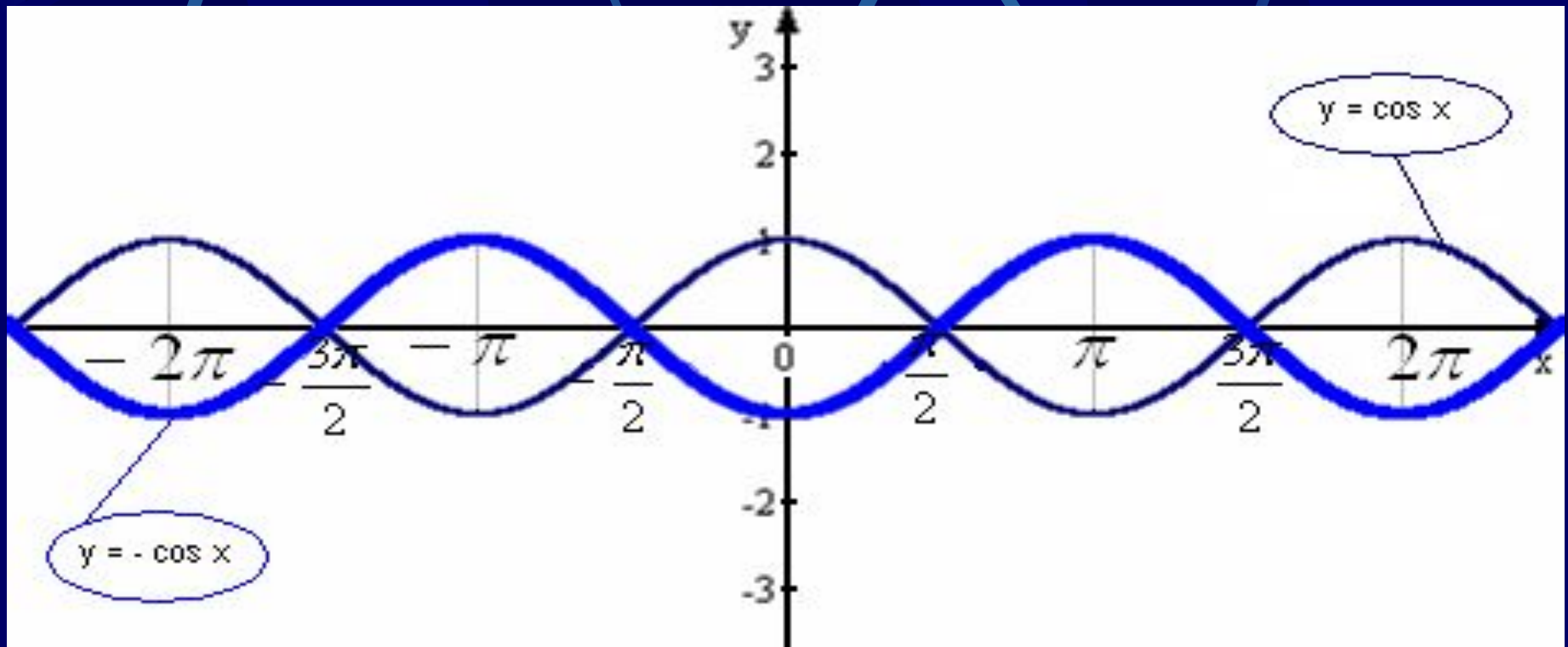


# $y = k \cdot \cos x$ (свойства)

- Изменяется множество значений функции; наибольшее (наименьшее) значения.
- Например:  $y = 3 \cdot \cos x$ 
  - $E(f)$ :  $3 \cdot \cos x = a \Rightarrow \cos x = a/3$ , т.к.  $-1 \leq y \leq 1$ , то  $-1 \leq a/3 \leq 1 \Rightarrow -3 \leq a \leq 3$ , т.е.  $y \in [-3; 3]$ .
  - Функция принимает наибольшее значение, равное 3, при:  $x = 2\pi n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$  (т.к.  $3 \cos x = 3 \Rightarrow \cos x = 1 \Rightarrow x = 2\pi n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ ).
  - Функция принимает наименьшее значение, равное -3, при:  $x = \pi + 2\pi n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$  (т.к.  $3 \cos x = -3 \Rightarrow \cos x = -1 \Rightarrow x = \pi + 2\pi n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ ).

$$y = -\cos x$$

- Симметричное отражение графика функции  $y = \cos x$  относительно оси абсцисс.



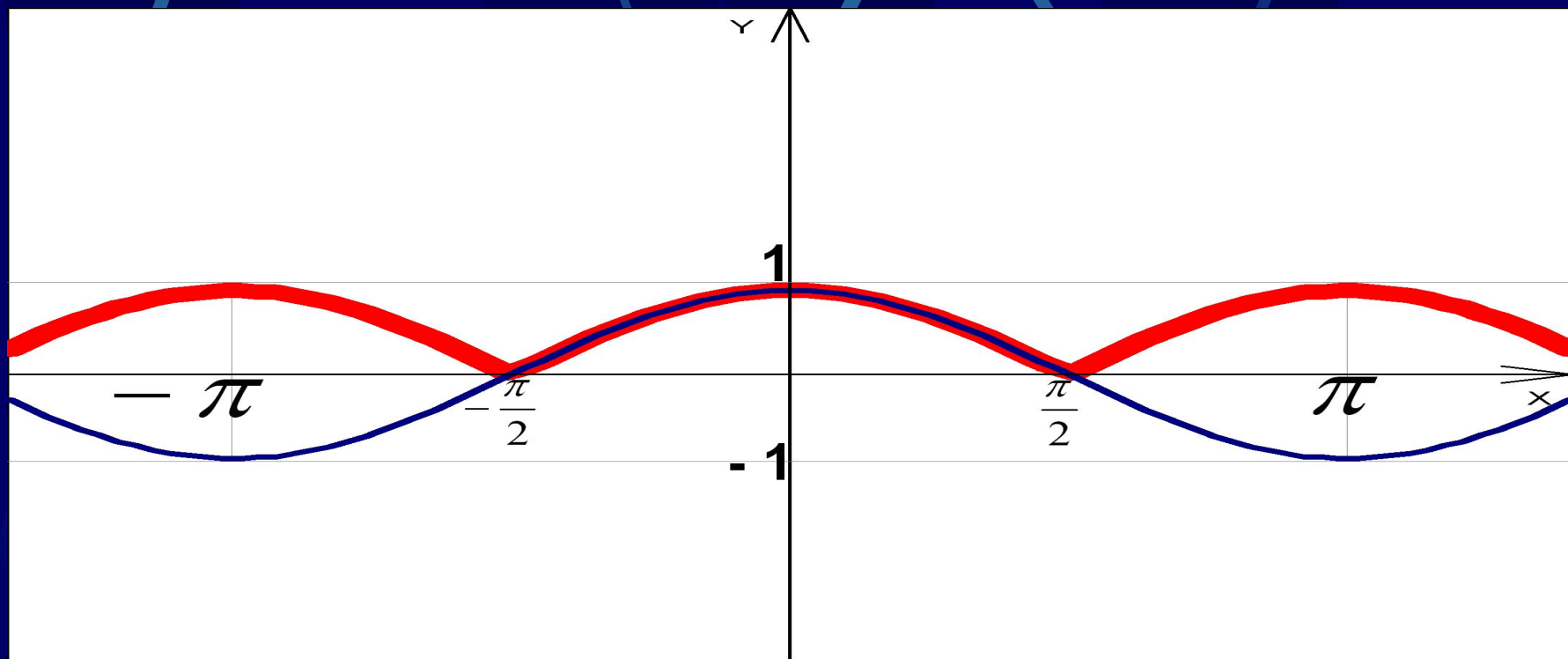
Наумова Ирина  
Михайловна

# $y = -\cos x$ (свойства)

- Изменяются промежутки возрастания (убывания); промежутки положительных (отрицательных) значений.
  - Функция возрастает на отрезке  $[0; \pi]$  и на отрезках, получаемых сдвигами этого отрезка на  $2\pi n$ ,  $n = \pm 1, \pm 2, \pm 3 \dots$
  - Функция убывает на отрезке  $[\pi; 2\pi]$  и на отрезках, получаемых сдвигами этого отрезка на  $2\pi n$ ,  $n = \pm 1, \pm 2, \pm 3 \dots$
  - Функция принимает положительные значения на интервале  $(\pi/2; 3\pi/2)$  и на интервалах, получаемых сдвигами этого интервала на  $2\pi n$ ,  $n = \pm 1, \pm 2 \dots$
  - Функция принимает отрицательные значения на интервале  $(-\pi/2; \pi/2)$  и на интервалах, получаемых сдвигами этого интервала на  $2\pi n$ ,  $n = \pm 1, \pm 2 \dots$

$$y = |\cos x|$$

- Часть графика, расположенная ниже оси абсцисс симметрично отражается относительно этой оси, остальная его часть остается без изменения.



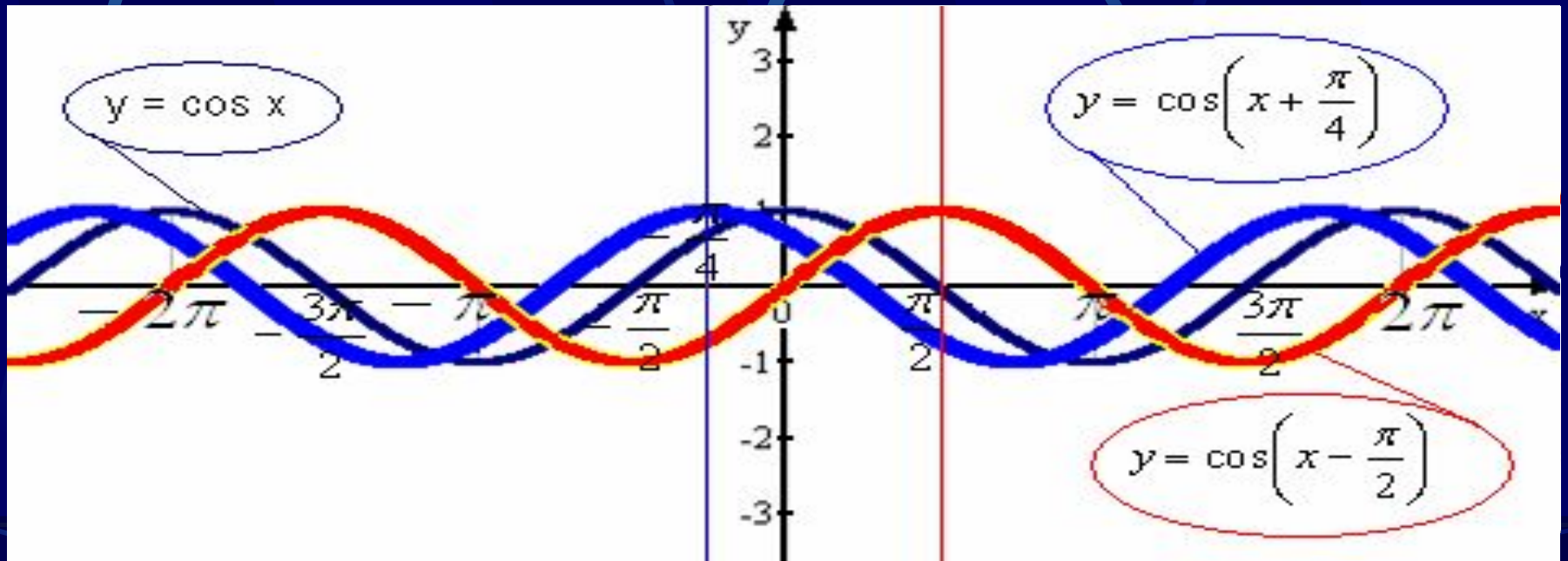


# $y = |\cos x|$ (свойства)

- Изменяются: множество значений функции; период; промежутки возрастания (убывания); наибольшее (наименьшее) значение.
  - $E(f)$ :  $y \in [0; 1]$
  - Периодичность:  $T = \pi$
  - Функция возрастает на промежутке  $(\pi/2; \pi) +$  сдвиги на  $\pi n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$
  - Функция убывает на промежутке  $(0; \pi/2) +$  сдвиги на  $\pi n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$
  - $f(x) > 0$ : при любом значении  $x$
  - $f(x) < 0$ : нет
  - $y$  (наиб) = 1, при  $x = 2\pi n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$
  - $y$  (наим) = 0, при  $x = \pi/2 + \pi n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$

# $y = \cos(x - a)$

- Параллельный перенос графика функции  $y = \cos x$  вдоль оси абсцисс на  $a$  единиц вправо, если  $a > 0$ , на  $|a|$  единиц влево, если  $a < 0$ .
- Например:  $y = \cos(x - \pi/2)$ ;  $y = \cos(x + \pi/4)$ .

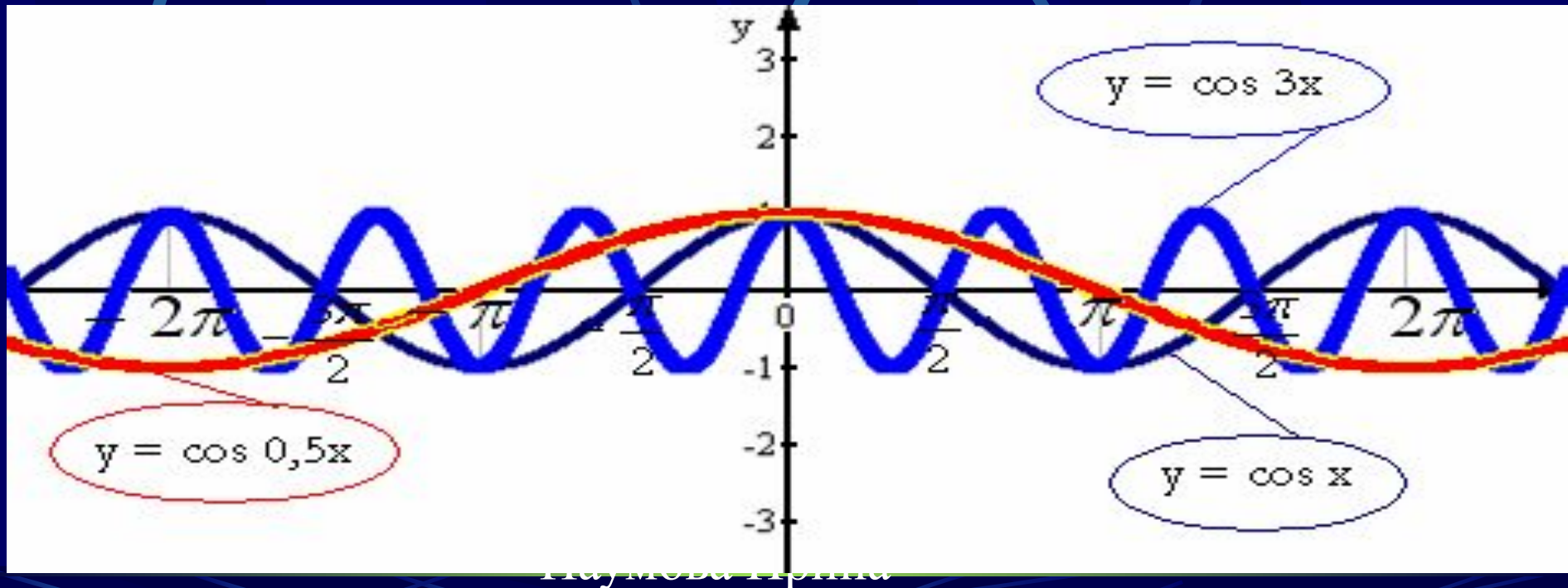


# $y = \cos(x - a)$ (свойства)

- Изменяются: четность; промежутки возрастания (убывания); нули функции; промежутки положительных (отрицательных) значений.
- Например:  $y = \cos(x + \pi/4)$ 
  - Четность:  $f(x) \neq f(-x) \neq -f(x)$ , т.к.  $\cos(-(x + \pi/4)) = \cos(-x - \pi/4)$
  - Функция возрастает на  $[3\pi/4; 11\pi/4]$  + сдвиги на  $2\pi n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$
  - Функция убывает на  $[-\pi/4; 3\pi/4]$  + сдвиги на  $2\pi n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$
  - $f(x) = 0$  при  $x = \pi/4 + \pi n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$
  - $f(x) > 0$  при  $x \in (-3\pi/4; \pi/4)$  + сдвиги на  $2\pi n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$
  - $f(x) < 0$  при  $x \in (\pi/4; 5\pi/4)$  + сдвиги на  $2\pi n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$

# $y = \cos(k \cdot x)$

- Сжатие графика функции  $y = \cos x$  вдоль оси абсцисс относительно оси ординат в  $k$  раз, если  $k > 1$ , и растяжение в  $1/k$  раз, если  $0 < k < 1$ .
- Например:  $y = \cos 3x$ ;  $y = \cos 0,5x$ .

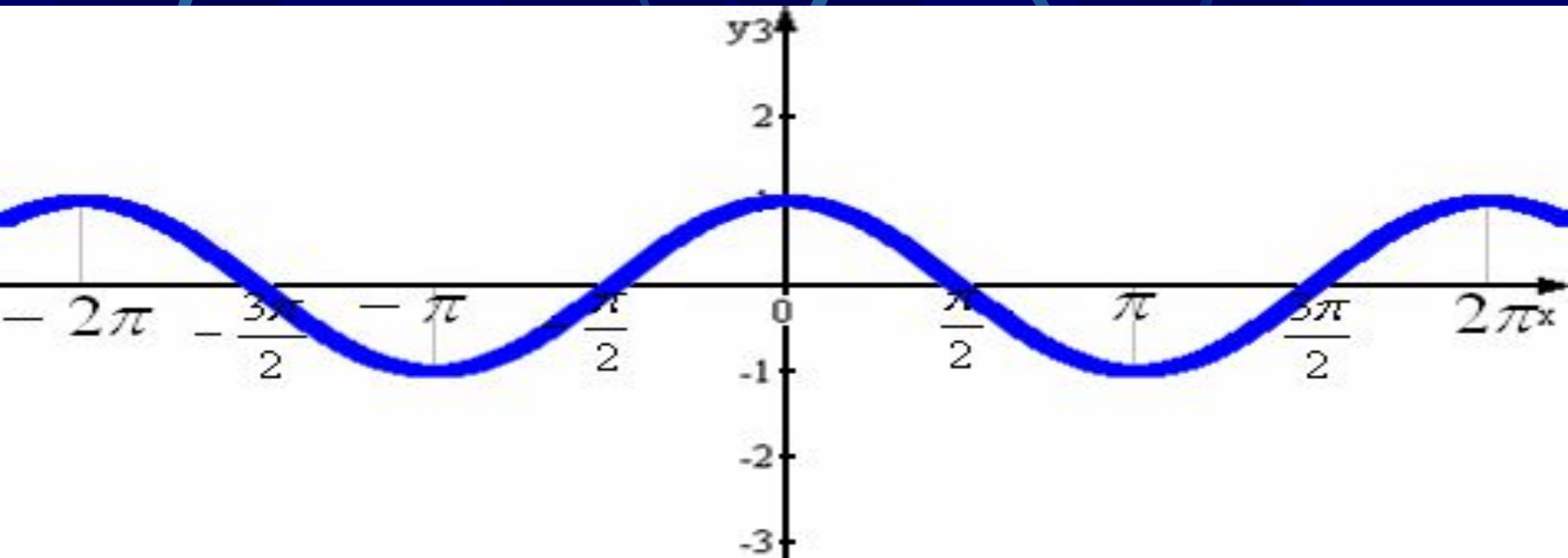


# $y = \cos(k \cdot x)$ (свойства)

- Изменяются: период; промежутки возрастания (убывания); нули функции; промежутки положительных (отрицательных) значений.
- Например:  $y = \cos 3x$ 
  - Период:  $T = 2\pi/3$ , (т.к. наименьший положительный период функции  $y = \cos x$  равен  $2\pi$ , то  $3T = 2\pi \Rightarrow T = 2\pi/3$ ).
  - Функция возрастает на  $[\pi/3; 2\pi/3]$  + сдвиги на  $2\pi n/3$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ .
  - Функция убывает на  $[0; \pi/3]$  + сдвиги на  $2\pi n/3$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ .
  - $f(x) = 0$  при  $x = \pi/6 + \pi n/3$ .
  - $f(x) > 0$  при  $x \in (-\pi/6; \pi/6)$  + сдвиги на  $2\pi n/3$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ .
  - $f(x) < 0$  при  $x \in (\pi/6; \pi/2)$  + сдвиги на  $2\pi n/3$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ .

$$y = \cos(-x)$$

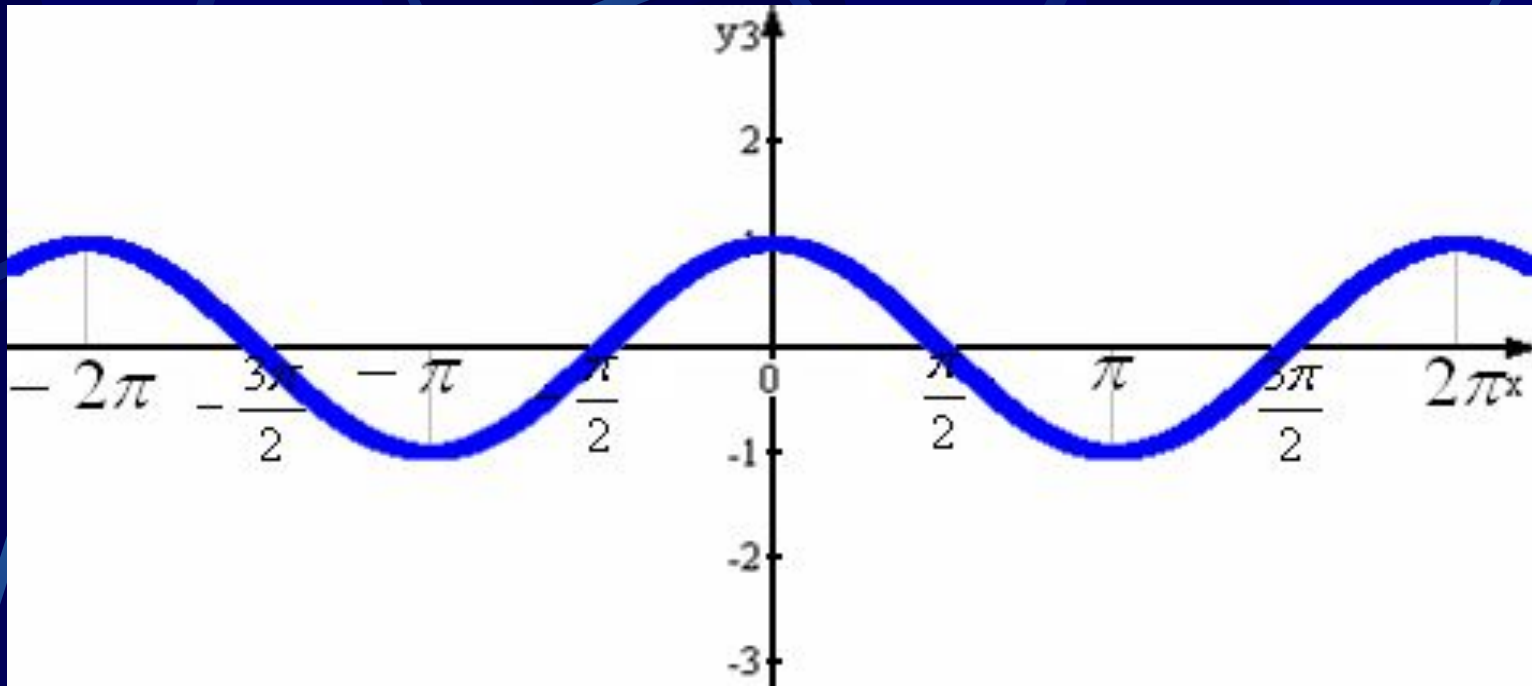
- Симметричное отражение относительно оси абсцисс.



# $y = \cos(-x)$ (свойства)

- В данном случае свойства функции не меняются, так как функция  $y = \cos x$  – четная и  $\cos(-x) = \cos(x) \Rightarrow$  все свойства функции  $y = \cos x$  справедливы и для функции  $y = \cos(-x)$

$$y = \cos |x|$$



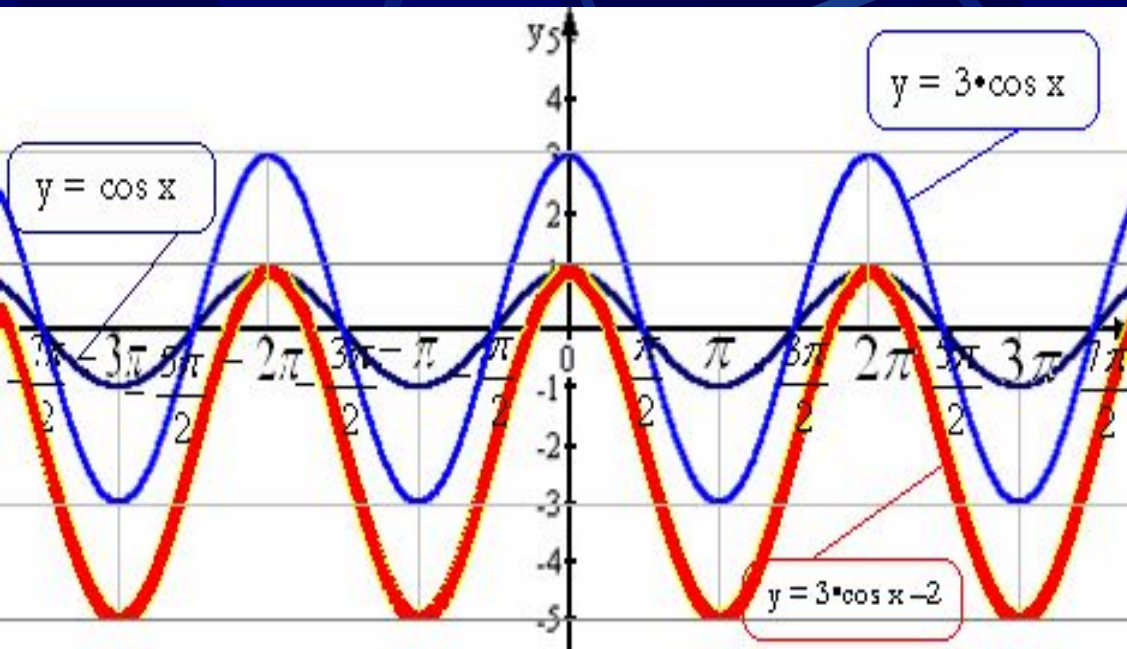
- Часть графика, расположенная в области  $x \geq 0$ , остается без изменения, а его часть для области  $x \leq 0$  заменяется симметричным отображением относительно оси ординат части графика для  $x \geq 0$ .



# $y = \cos |x|$ (свойства)

- В данном случае свойства функции не меняются, так как функция  $y = \cos x$  – четная и  $\cos |x| = \cos (-x) = \cos (x) \Rightarrow$  все свойства функции  $y = \cos x$  справедливы и для функции  $y = \cos |x|$

$$y = 3 \cdot \cos x - 2$$



- Построить график функции  $y = \cos x$ ;
- Построить график функции  $y = 3 \cdot \cos x$  (растяжение графика функции  $y = \cos x$  вдоль оси  $OY$  в 3 раза);

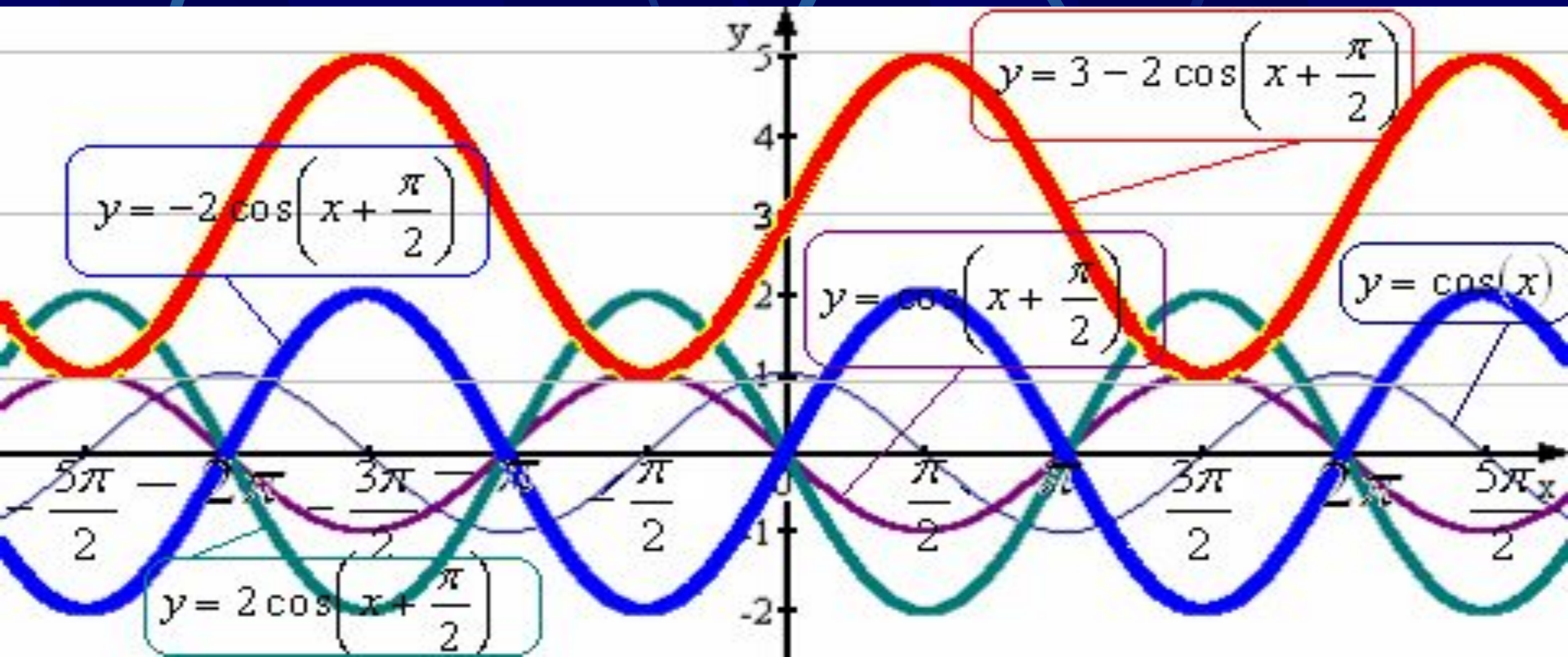
- Построить график функции  $y = 3 \cdot \cos x - 2$  (параллельный перенос графика  $y = 3 \cdot \cos x$  вдоль оси  $OY$  на 2 единицы вниз).

# Свойства функции $y = 3 \cdot \cos x - 2$

- Область определения:  $D(f): x \in R$ ;
- Множество значений:  $y \in [-5; 1]$ , т.к.  $-1 \leq \cos x \leq 1 \Rightarrow -3 \leq 3 \cos x \leq 3 \Rightarrow -5 \leq 3 \cos x - 2 \leq 1$ ;
- Периодичность:  $T = 2\pi$ ;
- Четность: четная, т.к.  $3 \cos(-x) - 2 = 3 \cos x - 2 \Rightarrow$  график функции симметричен относительно оси  $OY$ ;
- Возрастает: на отрезке  $[\pi; 2\pi]$  и на отрезках, получаемых сдвигами этого отрезка на  $2\pi n$ ,  $n = \pm 1, \pm 2; \pm 3 \dots$ ;
- Убывает: на отрезке  $[0; \pi]$  и на отрезках, получаемых сдвигами этого отрезка на  $2\pi n$ ,  $n = \pm 1, \pm 2, \pm 3 \dots$

# $y = 3 - 2 \cdot \cos(x + \pi/2)$

- Построим график функции  $y = \cos x$ ;
- Построим график функции  $y = \cos(x + \pi/2)$  (параллельный перенос графика функции  $y = \cos x$  вдоль оси абсцисс на  $\pi/2$  единиц влево);
- Построим график функции  $y = 2\cos(x + \pi/2)$  (растяжение графика функции  $y = \cos(x + \pi/2)$  вдоль оси  $OY$  в 2 раза);
- Построим график функции  $y = -2\cos(x + \pi/2)$  (симметричное отражение графика функции  $y = 2\cos(x + \pi/2)$  относительно оси  $OX$ );
- Построим график функции  $y = 3 - 2\cos(x + \pi/2)$  (параллельный перенос графика функции  $y = -2\cos(x + \pi/2)$  вдоль оси  $OY$  на 3 единицы вверх).



# Свойства функции $y = 3 - 2 \cdot \cos(x + \pi/2)$

- Область определения:  $D(f): x \in R$ ;
- Множество значений:  $y \in [1; 5]$ , т.к.  $-1 \leq \cos(x + \pi/2) \leq 1 \Rightarrow -2 \leq 2\cos(x + \pi/2) \leq 2 \Rightarrow 1 \leq 3 - 2\cos(x + \pi/2) \leq 5$ ;
- Периодичность:  $T = 2\pi$ ;
- Четность: ни четная, ни нечетная, т.к.  $y(-x) \neq y(x) \neq -y(x)$  (график не симметричен ни оси ОУ, ни началу координат)
- Возрастает: на  $[3\pi/2; 5\pi/2]$  и на отрезках, получаемых сдвигами этого отрезка на  $2\pi n$ ,  $n = \pm 1, \pm 2, \pm 3 \dots$
- Убывает: на  $[\pi/2; 3\pi/2]$  и на отрезках, получаемых сдвигами этого отрезка на  $2\pi n$ ,  $n = \pm 1, \pm 2, \pm 3 \dots$
- Функция принимает значения равные:
  - нулю: нет (уравнение  $3 - 2\cos(x + \pi/2) = 0$  не имеет корней т.к.  $|-3/2| > 1$ );
  - положительные: при любом  $x$ ;
  - наибольшее, равное 5: при  $x = \pi/2 + 2\pi n$ ,  $n \in Z$ .
  - наименьшее, равное 1: при  $x = -\pi/2 + 2\pi n$ ,  $n \in Z$ .