

Функцияның шегі.

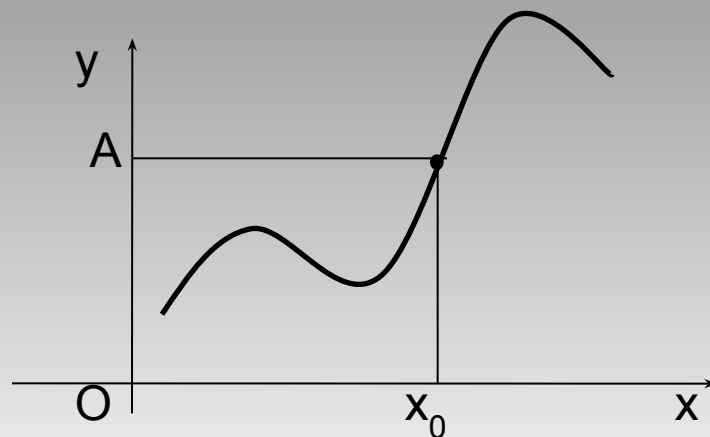
Қасиеті.

Анықтама

f функциясы x_0 нүктесінің маңайында анықталсын.

f функциясы x_0 нүктесінде шегі болады, егер x_0 нүктесіне ұмтылатын x_n ($n = 1, 2, \dots, x_n \neq x_0$) нүктелер тізбегі үшін, $f(x_n)$ функция мәндерінің тізбегі A санына ұмтылса. Яғни f функциясының $(x \rightarrow x_0)$ ұмтылғандағы x_0 нүктесіндегі шегі A -ға тең деп аталады, және былай белгіленеді

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$$



Шектің қасиеті

егер $f(x)$ және $g(x)$ функциялары шегі бар болса,

Онда
$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A, \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x) = B,$$

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = A + B$$

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x)g(x)) = AB,$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) = \frac{A}{B},$$

егер $B \neq 0$ және егер $g(x) \neq 0$

Функцияның нүктедегі шегін есептеу мысалдары

$$1 \quad \lim_{x \rightarrow 3} (x^2 - 5x + 8) = 9 - 15 + 8 = 2$$

$$2 \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 5x + 8}{x^2 - x + 4} = \frac{\lim_{x \rightarrow 3} (x^2 - 5x + 8)}{\lim_{x \rightarrow 3} (x^2 - x + 4)} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}.$$

$$3 \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 5x + 8}{x - 3} = \frac{2}{0} = \infty.$$

Анықталмаған жағдайларды ашу

Шектерді есептеу барысында келесі анықталмаған жағдайлармен кездесеміз

$$\left(\frac{0}{0}\right), \left(\frac{\infty}{\infty}\right), (\infty - \infty), (1^\infty), (0^\infty), (0^0)(\infty^0).$$

Осы жағдайларда шекті есептеу анықталмағандықты ашу деп аталады. Нәтижесінде нақты сан, ноль немесе шексіздік шығуы мүмкін

∞/∞ түріндегі анықталмағандықты ашу үшін, айнымалының жоғарғы дәрежесіне алымы мен бөлімін бөлу жеткілікті

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 3x - 5}{1 + x + 3x^2} = \frac{\infty}{\infty} = (*)$$

$$(*) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2x^2 - 3x - 5}{x^2}}{\frac{1 + x + 3x^2}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2x^2}{x^2} - \frac{3x}{x^2} - \frac{5}{x^2}}{\frac{1}{x^2} + \frac{x}{x^2} + \frac{3x^2}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 - \frac{3 \rightarrow 0}{x} - \frac{5 \rightarrow 0}{x^2}}{\frac{1 \rightarrow 0}{x^2} + \frac{1 \rightarrow 0}{x} + 3} = \frac{2}{3}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^2 - 3x - 5}{x + 1} = \frac{0}{0} = (***) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x + 1) \cdot (2x - 5)}{x + 1} = (***) = \lim_{x \rightarrow -1} (2x - 5) = (**)$$

$$= 2 \cdot (-1) - 5 = -2 - 5 = -7$$

Жалпы ереже: егер бөлшектің алымы мен бөлімінде көпмүшеліктер, және $0/0$ түріндегі анықталмаған жағдай болса, онда оны ашу үшін бөлшектің алымы мен бөлімін көбейткіштерге жіктеу керек.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^3 + 15x^2 + 9x + 1}{5x^4 + 6x^2 - 3x - 4} = \frac{\infty}{\infty} = (*)$$

$$\begin{aligned} (*) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{7x^3 + 15x^2 + 9x + 1}{x^4}}{\frac{5x^4 + 6x^2 - 3x - 4}{x^4}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{7 \rightarrow 0}{x} + \frac{15 \rightarrow 0}{x^2} + \frac{9 \rightarrow 0}{x^3} + \frac{1 \rightarrow 0}{x^4}}{5 + \frac{6 \rightarrow 0}{x^2} - \frac{3 \rightarrow 0}{x^3} - \frac{4 \rightarrow 0}{x^4}} = \\ &= \frac{0 + 0 + 0 + 0}{5 + 0 - 0 - 0} = \frac{0}{5} = 0 \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 3x - 5}{x + 1} = \frac{\infty}{\infty} = (*) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2x^2 - 3x - 5}{x^2}}{\frac{x + 1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 - \frac{3 \rightarrow 0}{x} - \frac{5 \rightarrow 0}{x^2}}{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} = \frac{2}{0} = \infty$$

Алымы мен бөлімін түйіндес өрнекке көбейту әдісі

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+6} - \sqrt{10x-21}}{5x-15} = \frac{0}{0} = (*) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(\sqrt{x+6} - \sqrt{10x-21}) \cdot (\sqrt{x+6} + \sqrt{10x-21})}{(5x-15) \cdot (\sqrt{x+6} + \sqrt{10x-21})} = (*)$$

Егер бөлшектің алымы (бөлімінде) иррационал өрнек болса, одан құтылу үшін бөлшектің алымы (бөлімін) түйіндес өрнекке көбейту керек

$$(*) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(\sqrt{x+6})^2 - (\sqrt{10x-21})^2}{(5x-15) \cdot (\sqrt{x+6} + \sqrt{10x-21})} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x+6 - (10x-21)}{(5x-15) \cdot (\sqrt{x+6} + \sqrt{10x-21})} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x+6 - 10x + 21}{(5x-15) \cdot (\sqrt{x+6} + \sqrt{10x-21})} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-9x+27}{(5x-15) \cdot (\sqrt{x+6} + \sqrt{10x-21})} = (*)$$

$$(*) = \frac{1}{6} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-9(x-3)}{5(x-3)} = \frac{1}{6} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-9}{5} = \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{-9}{5} \right) = -\frac{3}{10}$$

Тамаша шектер

Бірінші тамаша шек

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1;$$

Екінші тамаша шек

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e.$$