

# Геометрическая прогрессия

---

**Автор:** учитель математики  
МБОУ «СОШ №1 г. Калининска»,  
Петрова С.В.

# ЦЕЛЬ УРОКА :

- Формирование понятия геометрической прогрессии, используя сопоставление и противопоставления понятию арифметической прогрессии.
- Познакомить со свойствами геометрической прогрессии и формулой  $n$ -го члена.
- Закрепить на примерах решения задач.

# Самостоятельная работа



## В заданиях 1-3 дана арифметическая прогрессия. Найдите:

1 вариант

1. тридцать второй член, если первый член 65 и разность  $-2$ .
2. сумму десяти первых членов, если  $a = 3n-1$ ,  $n$  – натуральное число.
3. сумму семи первых членов прогрессии  $8; 4; 0; \dots$
4. Продолжите числовую последовательность, записав еще 2 члена:  $1; 2; 4; \dots$

2 вариант

1. двадцать третий член, если первый член  $-9$  и разность  $4$ .
2. сумму десяти первых членов, если  $a = 4n+2$ ,  $n$  – натуральное число.
3. сумму семи первых членов прогрессии  $-5; -3; -1; \dots$
4. Продолжите числовую последовательность, записав еще 2 члена:  $-2; 6; -18; \dots$

# Ответы к самостоятельной работе:

- 1 ВАРИАНТ

1. 3
2. 155
3. -28
4. 8;16;

- 2 ВАРИАНТ

1. 79
2. 240
3. 7
4. 54;-162

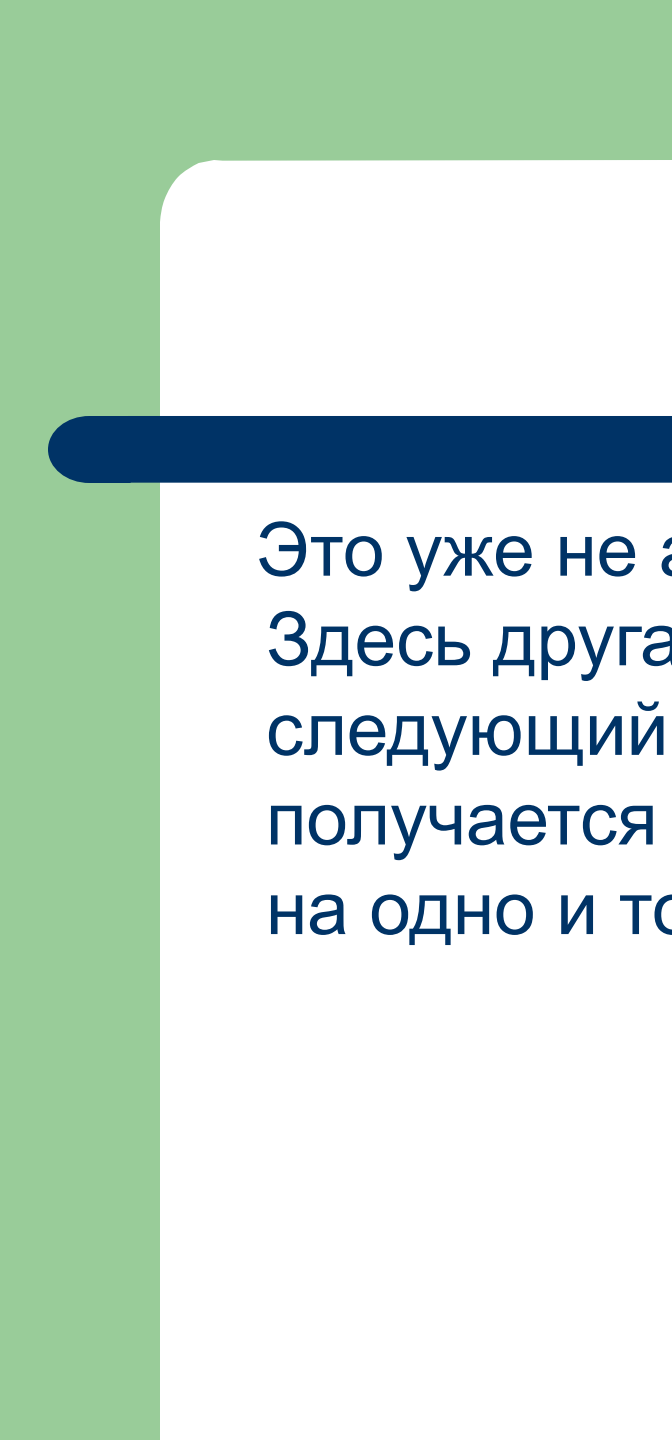
Геометрическая прогрессия играет большую и важную роль не только в школьном курсе алгебры, но и в дальнейшем обучении в высших учебных заведениях. Важность этого на первый взгляд небольшого раздела школьного курса заключается в его чрезвычайно широких областях применения, в частности он часто применяется в теории рядов, рассматриваемой на II-III курсах университета.

Известны телевизионные игры, в которых участник отвечает на предлагаемые ведущим вопросы, и за верные ответы ему по определенным правилам начисляется выигрыш. Условия игры могут быть такими: за первый правильный ответ участнику начисляется 500р., и с каждым следующим правильным ответом выигранная сумма увеличивается еще на 500р. Таким образом, выигрыш растет в арифметической прогрессии:

500; 1000; 1500; 2000; 2500; 3000; ... .

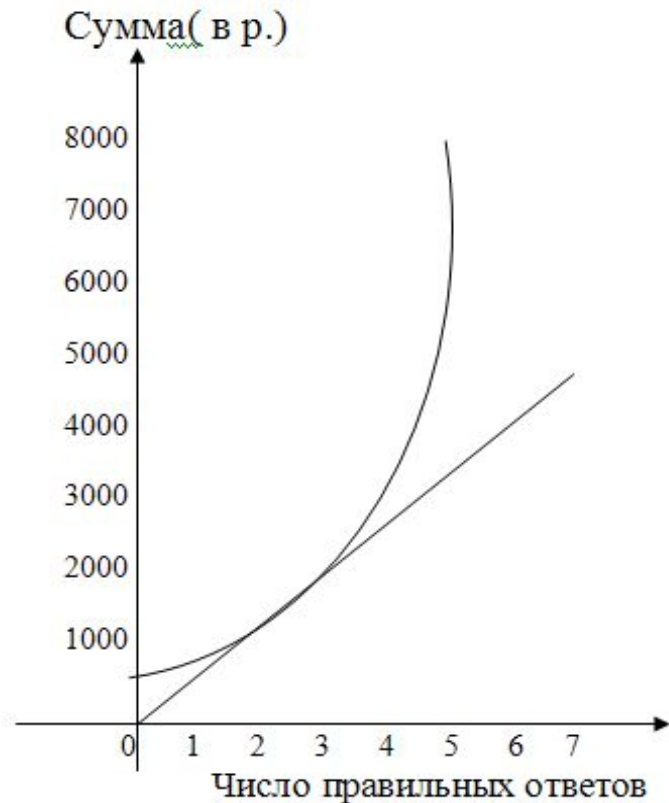
Изменим условие игры: пусть за первый правильный ответ участник по-прежнему получает 500р., но с каждым следующим правильным ответом выигранная сумма удваивается. Теперь начисляемые игроку суммы образуют такую последовательность:  
500; 1000; 2000; 4000; 8000; 16000; ... .





Это уже не арифметическая прогрессия. Здесь другая закономерность: каждый следующий член последовательности получается из предыдущего умножением на одно и то же число.

Для сравнения  
изобразим две наши  
последовательности  
на координатной  
плоскости.  
Арифметическая  
растет равномерно;  
она расположена на  
прямой. Скорость  
роста геометрической  
прогрессии все время  
увеличивается,  
соответственно она  
резко «уходит» вверх.



# Определение

Геометрической прогрессией называют последовательность отличных от нуля чисел, каждый член которой, начиная со второго, равен предыдущему члену, умноженному на одно и то же не равное нулю число.

Число на которое умножаются члены прогрессии, называют знаменателем геометрической прогрессии. Его принято обозначать буквой  $q$  (это первая буква французского слова *quotient*, которое переводится как «частное»). Используя это обозначение, можно записать правило, по которому строится геометрическая прогрессия:

$$b_{n+1} = b_n \cdot q$$

Приведем примеры геометрической прогрессий. Пусть  $b_1 = 1$  и  $q=3$ . Получаем геометрическую прогрессию:

1; 3; 9; 27; 81; 243; ... .

Каждый следующий ее член больше предыдущего, т.е. это возрастающая последовательность.

Пусть  $b_1 = 8$  и  $q = \frac{1}{2}$ . Прогрессия начинается так:

$$8; 4; 2; 1; \frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{1}{8}; \dots$$

Это убывающая прогрессия.

Пусть  $b_1 = 5$  и  $q = -2$ . В этом случае знаки у членов прогрессии чередуются, и она имеет вид:

$$5; -10; 20; -40; 80; -160; 320; \dots$$

Используя рекуррентную формулу, получим формулу общего члена геометрической прогрессии.

$$b_2 = b_1 \cdot q$$

$$b_3 = b_2 \cdot q = b_1 \cdot q \cdot q = b_1 \cdot q^2$$

$$b_4 = b_3 \cdot q = b_1 \cdot q^2 \cdot q = b_1 \cdot q^3$$

$$b_5 = b_4 \cdot q = b_1 \cdot q^3 \cdot q = b_1 \cdot q^4$$

Запишем формулу n-го члена геометрической прогрессии, первый член которой равен  $b_1$ , а знаменатель  $q$ .

$$b_n = b_1 q^{n-1}$$

Переменная  $n$  в этой формуле содержится в показателе степени, поэтому зависимость  $b_n$  от  $n$  называют экспоненциальной (от латинского слова *exponentis* – показывающий).



## Задача 1

Найдите первые 5 членов геометрической прогрессии, если первый член  $-2$ , а знаменатель  $-0.5$ .

Ответ:  $-2; 1; -0,5; 0,25; - 0,125$

# Работа с учебником

- 655(а)
- 656(устно)
- 659(а, в)

## Домашнее задание

- Придумать задачу, где используется геометрическая прогрессия.
- П.7.1, №658



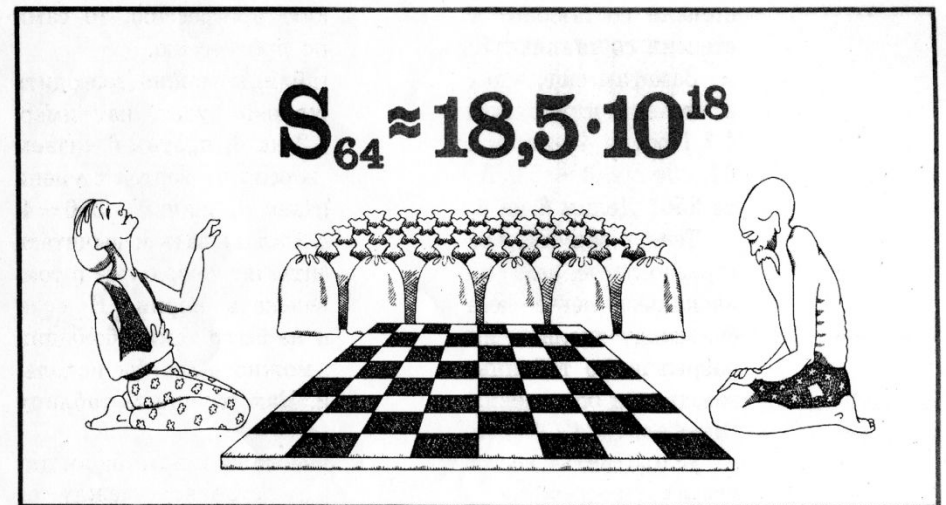
**Сумма первых  $n$  членов  
геометрической прогрессии**

С геометрической прогрессией связано немало легенд.

*Самой известной древней задачей на прогрессии считается задача об изобретении шахмат. В древней Индии ученый Сета изобрел шахматы и попросил у шаха Шерама в награду за свое изобретение столько пшеничных зерен, сколько их получится, если на первую клетку шахматной доски положить одно зерно, на вторую - в 2 раза больше, то есть 2 зерна, на третью - еще в 2 раза больше, то есть 4 зерна, и так далее до шестидесяти четвертой клетки.*

*Сначала индийский царь обрадовался, что дешево отделался, и лишь потом выяснил, что такого количества пшеницы нельзя собрать со всех полей Земли в течение десятков лет. Вот это число:*

**18 446 744 073 709 551 615.**



Общее число зерен, которое попросил изобретатель, равно сумме членов геометрической прогрессии

$$1; 2; 2^2; 2^3; \dots; 2^{62}; 2^{63}$$

Если все эти числа сложить, то получится число, которое даже трудно прочитать

18 446 744 073 709 551 651. Если бы принцу удалось засеять пшеницей площадь всей поверхности Земли, считая и моря, и океаны, и пустыни, и Арктику с Антарктикой и получить удовлетворительный урожай, то за пять лет он смог бы рассчитаться с просителем. Такое количество зерен пшеницы можно собрать лишь с площади в 2000 раз большей поверхности Земли.

18 446 744 073 709 551 615



...квинтильонов

...квадрильонов

...триллионов

...биллионов

...

*Восемнадцать квинтильонов четыреста сорок шесть квадрильонов семьсот сорок четыре триллиона семьдесят три биллиона семьсот девять миллионов пятьсот пятьдесят одна тысяча шестьсот пятнадцать.*



Выведем теперь формулу, по которой можно суммировать члены произвольной геометрической прогрессии. Пусть последовательность  $(b_n)$  — геометрическая прогрессия. Обозначим сумму первых  $n$  ее членов через  $S_n$ . Тогда

$$S_n = b_1 + b_1q + b_1q^2 + b_1q^3 + \dots + b_1q^{n-1}$$

Умножим обе части этого равенства на знаменатель прогрессии  $q$ :

$$S_nq = b_1q + b_1q^2 + b_1q^3 + \dots + b_1q^n$$

Вычти из второго равенства первое. Получим

$$S_n(q - 1) = b_1(q^n - 1)$$

Чтобы выразить из последнего равенства  
разделим обе его части на  $q-1$ . Получим  $S_n$ ,  
формулу суммы первых  $n$  членов  
геометрической прогрессии:

$$S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1}$$

1 Дано: геометрическая прогрессия

$$b_1 = \frac{1}{2}, q = 2, n = 6.$$

Найти:  $S_n$

**Самостоятельно на доске два ученика, класс решает этот номер по вариантам.**

$$1) b_1 = 5, b_2 = 10, q = 2, S_7 = ?$$

$$2) b_1 = 2, b_2 = 6, q = 3, S_7 = ?$$

## Проторговался ли купец?



Некто продавал коня и просил за него 1000 рублей. Купец сказал, что за коня запрошена слишком большая цена. "Хорошо, - ответил продавец, - если ты говоришь, что конь дорого стоит, то возьми его себе даром, а заплати только за его гвозди в подковах. А гвоздей во всякой подкове по 6 штук. И будешь ты мне за них платить таким образом: за первый гвоздь полушку, за второй гвоздь заплатишь две полушки, за третий гвоздь - четыре полушки, и так далее за все гвозди: за каждый в два раза больше, чем за предыдущий". Купец же, думая, что заплатит намного меньше, чем 1000 рублей, согласился. Проторговался ли купец, и если да, то насколько?

# Решение задачи

За 24 подковных гвоздя пришлось уплатить

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{24-3} \text{ копеек.}$$

Сумма эта равна

$$\frac{2^{21} \cdot 2 - \frac{1}{4}}{2 - 1} = 2^{22} - \frac{1}{4} = 4194303 \frac{3}{4}$$

копеек, т.е. около 42 тысяч рублей. При таких условиях не обидно дать и лошадь в придачу

- Домашнее задание п. 7.2;  
№665(1 столбик), 666

# Практическое применение прогрессии

На счет в банке, который выплачивает 20% годовых, положили 1000 р. И оставили на счете на год. По истечении года к сумме вклада добавляют 20% от 1000р. Если вкладчик не снимает в конце года со счета, то в конце следующего года 20% начисляются уже на новую, увеличенную сумму и т.д.

Подсчитайте, какая сумма будет на счету через 10 лет. (Очевидно, что вклад растет в геометрической прогрессии).

$$1000 \cdot 1,2^{10} = 6191,73 \text{ р}$$

(можно использовать калькулятор.)



# Самостоятельная работа ( тест )

Часть I ( 0,5 балла )

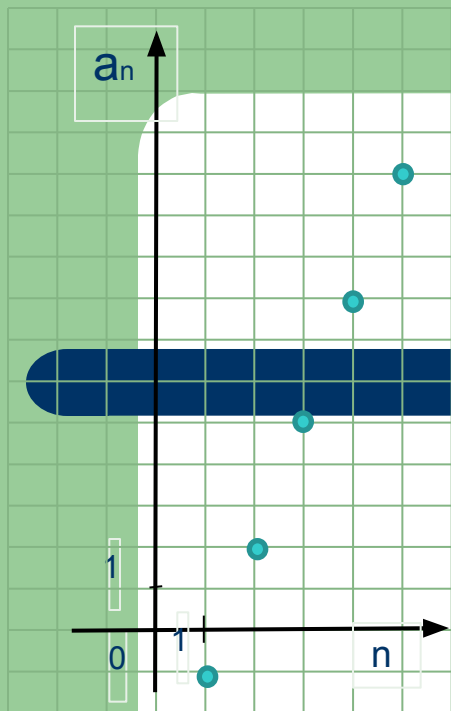


Рис. 1

1. Про арифметическую прогрессию  $(a_n)$  известно, что  $a_7 = 8$ ,  $a_8 = 12$ . найдите разность арифметической прогрессии.

- А) -4      Б) 4      В) 20      Г) 3

2. Геометрическая прогрессия задана формулой  $b_n = 3^{2n}$ .

Найдите знаменатель геометрической прогрессии.

- А) -3      Б) 18      В) 3      Г) 9

3. Члены арифметической прогрессии изображены (рис.1) точками на координатной плоскости. Какое из данных чисел является членом этой прогрессии?

- А) -7      Б) 6      В) 12      Г) 17

4. Найдите сумму семи первых членов геометрической прогрессии 4; 8; ...

- А) - 254      Б) 508      В) 608      Г) - 508

5. Последовательность  $a_n$  задана формулой  $a_n = n^2 - 2n - 1$ .

Найдите номер члена последовательности, равного 7.

А) 4

Б) - 2

В) 2

Г) - 4

### Часть II (задания на 2 балла)

6. В геометрической прогрессии  $(b_n)$   $b_1 = 8$ ,  $b_3 = 24$ . Ответ:  $b_5 = 72$   
Найдите  $b_5$ . ( для  $q > 0$  )

(задания на 3 балла)

7. Сумма второго и пятого членов арифметической прогрессии равна 11. Третий её член на 6 больше первого. Найдите второй и четвёртый члены.

Ответ:  $a_2 = 1$ ;  $a_4 = 7$ ,

### Критерии оценок:

Количество набранных баллов	оценка
1,5 - 2	«3»
2,5 - 4,5	«4»
5 - 7,5	«5»

# Самостоятельная работа.

- Вычислите:
- а)  $8+4+2+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}$ .
- б)  $\frac{1}{16}-\frac{1}{8}+\frac{1}{4}-\frac{1}{2}+1-2+4-8+16$ .