Геометрическая прогрессия

Автор: учитель математики
МБОУ «СОШ №1 г. Калининска»,
Петрова С.В.

ЦЕЛЬ УРОКА :

- Формирование понятия геометрической прогрессии, используя сопоставление и противопоставления понятию арифметической прогрессии.
- Познакомить со свойствами геометрической прогрессии и формулой n-го члена.
- Закрепить на примерах решения задач.

Самостоятельная работа

В заданиях 1-3 дана арифметическая прогрессия. Найдите:

1 вариант

1. тридцать второй член, если первый член 65 и разность -2.
2. сумму десяти первых членов, если a = 3n-1, n – натуральное число.
3. сумму семи первых членов прогрессии 8;4;0;…
4. Продолжите числовую последовательность, записав еще 2 члена: 1;2;4;…

2 вариант

1. двадцать третий член, если первый член -9 и разность 4.
2. сумму десяти первых членов, если a = 4n+2, n – натуральное число.
3. сумму семи первых членов прогрессии -5;-3;-1;…
4. Продолжите числовую последовательность, записав еще 2 члена: -2;6;-18;…

Ответы к самостоятельной работе:

- 1 ВАРИАНТ

1. 3
2. 155
3. -28
4. 8;16;

- 2 ВАРИАНТ

1. 79
2. 240
3. 7
4. 54;-162

Геометрическая прогрессия играет большую и важную роль не только в школьном курсе алгебры, но и в дальнейшем обучении в высших учебных заведениях. Важность этого на первый взгляд небольшого раздела школьного курса заключается в его чрезвычайно широких областях применения, в частности он часто применяется в теории рядов, рассматриваемой на II-III курсах университета.

Известны телевизионные игры, в которых участник отвечает на предлагаемые ведущим вопросы, и за верные ответы ему по определенным правилам начисляется выигрыш. Условия игры могут быть такими: за первый правильный ответ участнику начисляется 500р., и с каждым следующим правильным ответом выигранная сумма увеличивается еще на 500р. Таким образом, выигрыш растет в арифметической прогрессии:

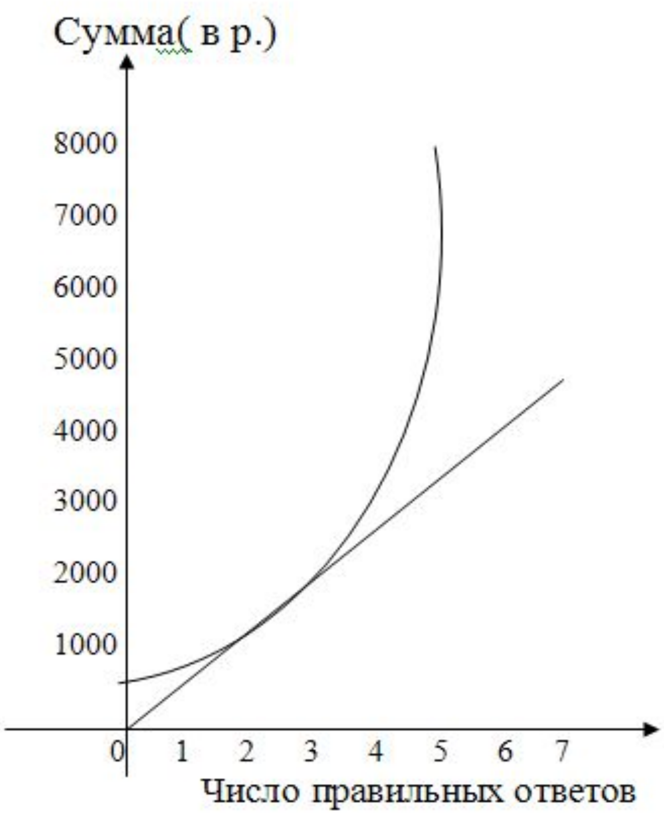
500; 1000; 1500; 2000; 2500; 3000; … .

Изменим условие игры: пусть за первый правильный ответ участник по-прежнему получает 500р., но с каждым следующим правильным ответом выигранная сумма удваивается. Теперь начисляемые игроку суммы образуют такую последовательность:

500; 1000; 2000; 4000; 8000; 16000; … .

Это уже не арифметическая прогрессия. Здесь другая закономерность: каждый следующий член последовательности получается из предыдущего умножением на одно и тоже число.

Для сравнения изобразим две наши последовательности на координатной плоскости. Арифметическая растет равномерно; она расположена на прямой. Скорость роста геометрической прогрессии все время увеличивается, соответственно она резко «уходит» вверх.



Определение

Геометрической прогрессией называют последовательность отличных от нуля чисел, каждый член которой, начиная со второго, равен предыдущему члену, умноженному на одно и то же не равное нулю число.

Число на которое умножаются члены прогрессии, называют знаменателем геометрической прогрессии. Его принято обозначать буквой q (это первая буква французского слова quotient, которое переводится как «частное»). Используя это обозначение, можно записать правило, по которому строится геометрическая прогрессия:

$$b_{n+1} = b_n \cdot q$$

Приведем примеры геометрической прогрессий. Пусть $b_1 = 1$ и q=3. Получаем геометрическую прогрессию:

1; 3; 9; 27; 81; 243; … .

Каждый следующий ее член больше предыдущего, т.е. это возрастающая последовательность.

Пусть $b_1 = 8$ и q= $\frac{1}{2}$. Прогрессия начинается так:

$$8;4;2;1;\frac{1}{2};\frac{1}{4};\frac{1}{8};\ldots$$

Это убывающая прогрессия.

Пусть $b_1 = 5$ и q= -2. В этом случае знаки у членов прогрессии чередуются, и она имеет вид:

5; -10; 20; -40; 80; -160; 320; … .

Используя рекуррентную формулу, получим формулу общего члена геометрической прогрессии.

$$b_2 = b_1 \bullet q$$

$$b_3 = b_2 \bullet q = b_1 \bullet q \bullet q = b_1 \bullet q^2$$

$$b_4 = b_3 \bullet q = b_1 \bullet q^2 \bullet q = b_1 \bullet q^3$$

$$b_5 = b_4 \bullet q = b_1 \bullet q^3 \bullet q = b_1 \bullet q^4$$

Запишем формулу n-го члена геометрической прогрессии, первый член которой равен b_1 , а знаменатель q.

$$b_n = b_1 q^{n-1}$$

Переменная n в этой формуле содержится в показателе степени, поэтому зависимость b_n от n называют экспоненциальной (от латинского слова exponentis – показывающий).

Задача 1

Найдите первые 5 членов геометрической прогрессии , если первый член -2, а знаменатель -0.5.

Ответ: -2; 1; -0,5; 0,25; - 0,125

Работа с учебником

- 655(а)
- 656(устно)
- 659(а, в)

Домашнее задание

- Придумать задачу, где используется геометрическая прогрессия.
- П.7.1, №658

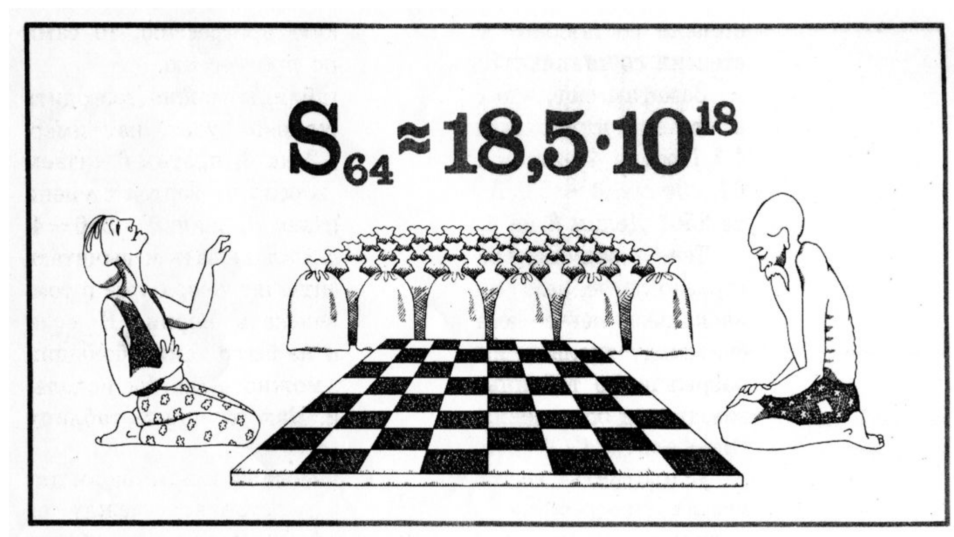
Сумма первых n членов геометрической прогрессии

С геометрической прогрессией связано немало легенд.

Самой известной древней задачей на прогрессии считается <u>задача об изобретении шахмат</u>. В древней Индии ученый Сета изобрел шахматы и попросил у шаха Шерама в награду за свое изобретение столько пшеничных зерен, сколько их получится, если на первую клетку шахматной доски положить одно зерно, на вторую - в 2 раза больше, то есть 2 зерна, на третью - еще в 2 раза больше, то есть 4 зерна, и так далее до шестьдесят четвертой клетки.

Сначала индийский царь обрадовался, что дешево отделался, и лишь потом выяснил, что такого количества пшеницы нельзя собрать со всех полей Земли в течение десятков лет. Вот это число:

18 446 744 073 709 551 615.



Общее число зерен, которое попросил изобретатель, равно сумме членов геометрической прогрессии

$$1;2;2^2;2^3;\ldots;2^{62};2^{63}$$

Если все эти числа сложить, то получится число, которое даже трудно прочитать

18 446 744 073 709 551 651. Если бы принцу удалось засеять пшеницей площадь всей поверхности Земли, считая и моря , и океаны, и пустыни, и Арктику с Антарктикой и получить удовлетворительный урожай, то за пять лет он смог бы рассчитаться с просителем. Такое количество зерен пшеницы можно собрать лишь с площади в 2000 раз большей поверхности Земли.

18 446 744 073 709 551 615

...квинтильонов

...квадрильонов

...триллионов

...биллионов

...

Восемнадцать квинтильонов четыреста сорок шесть квадрильонов семьсот сорок четыре триллиона семьдесят три биллиона семьсот девять миллионов пятьсот пятьдесят одна тысяча шестьсот пятнадцать.

Выведем теперь формулу, по которой можно суммировать члены произвольной геометрической прогрессии. Пусть последовательность (b_n) – геометрическая прогрессия. Обозначим сумму первых n ее членов через S_n. Тогда

$$S_n = b_1 + b_1 q + b_1 q^2 + b_1 q^3 + \ldots + b_1 q^{n-1}$$

Умножим обе части этого равенства на знаменатель прогрессии q:

$$S_n q = b_1 q + b_1 q^2 + b_1 q^3 + \ldots + b_1 q^n$$

Вычти из второго равенства первое. Получим

$$S_n (q-1) = b_1 (q^n - 1)$$

Чтобы выразить из последнего равенства разделим обе его части на q-1. Получим S_n, формулу суммы первых n членов геометрической прогрессии:

$$S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1}$$

1Дано: геометрическая прогрессия

$$b_1 = \frac{1}{2}, q = 2, n = 6.$$

Найти: S_n

Самостоятельно на доске два ученика, класс решает этот номер по вариантам.

$$1)\, b_1 = 5, b_2 = 10, q = 2, S_7 = ?$$

$$2)\, b_1 = 2, b_2 = 6, q = 3, S_7 = ?$$

Проторговался ли купец?

Некто продавал коня и просил за него 1000 рублей. Купец сказал, что за коня запрошена слишком большая цена. "Хорошо, - ответил продавец, - если ты говоришь, что конь дорого стоит, то возьми его себе даром, а заплати только за его гвозди в подковах. А гвоздей во всякой подкове по 6 штук. И будешь ты мне за них платить таким образом: за первый гвоздь полушку, за второй гвоздь заплатишь две полушки, за третий гвоздь - четыре полушки, и так далее за все гвозди: за каждый в два раза больше,чем за предыдущий". Купец же, думая, что заплатит намного меньше, чем 1000 рублей, согласился. Проторговался ли купец, и если да, то насколько?

Решение задачи

За 24 подковных гвоздя пришлось уплатить

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{24-3}$$ копеек.

Сумма эта равна

$$\frac{2^{21} \cdot 2 - \frac{1}{4}}{2-1} = 2^{22} - \frac{1}{4} = 4194303\ \frac{3}{4}$$

копеек, т.е. около 42 тысяч рублей. При таких условиях не обидно дать и лошадь в придачу

- Домашнее задание п. 7.2; №665(1столбик), 666

Практическое применение прогрессии

На счет в банке, который выплачивает 20% годовых, положили 1000 р. И оставили на счете на год. По истечении года к сумме вклада добавляют 20% от 1000р. Если вкладчик не снимает в конце года со счета, то в конце следующего года 20% начисляются уже на новую, увеличенную сумму и т.д.

Подсчитайте, какая сумма будет на счету через 10лет. (Очевидно, что вклад растет в геометрической прогрессии).

$$1000 \cdot 1{,}2^{10} = 6191{,}73\,p$$

(можно использовать калькулятор.)

Самостоятельная работа (тест)

Часть I (0,5 балла)

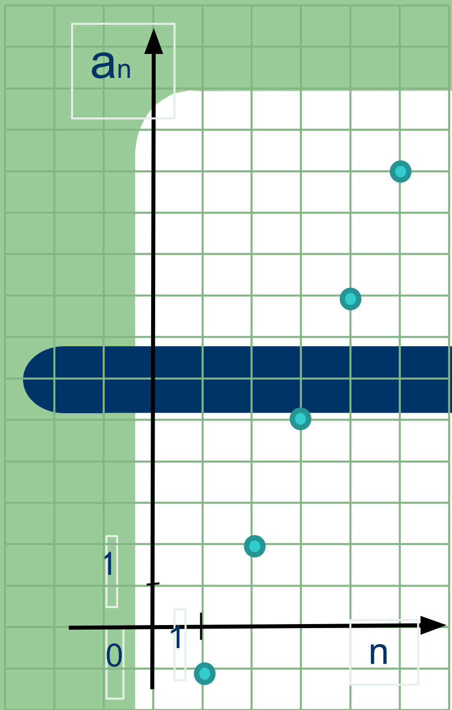


Рис. 1

1. **Про арифметическую прогрессию (a_n) известно, что $a_7 = 8$, $a_8 = 12$. найдите разность арифметической прогрессии.**

А) -4 Б) 4 В) 20 Г) 3

2. **Геометрическая прогрессия задана формулой** $b_n = 3^{2n}$.
Найдите знаменатель геометрической прогрессии.

А) -3 Б) 18 В) 3 Г) 9

3. **Члены арифметической прогрессии изображены (рис.1) точками на координатной плоскости. Какое из данных чисел является членом этой прогрессии?**

А) -7 Б) 6 В) 12 Г) 17

4. **Найдите сумму семи первых членов геометрической прогрессии 4; 8; …**

А) - 254 Б) 508 В) 608 Г) - 508

5. Последовательность a_n задана формулой $a_n = n^2 - 2n - 1.$

Найдите номер члена последовательности, равного 7.

А) 4 **Б) - 2** **В) 2** **Г) - 4**

Часть II (задания на 2 балла)

6. **В геометрической прогрессии (b_n) $b_1 = 8$, $b_3 = 24$. Найдите b_5. (для q > 0)** Ответ: $b_5 = 72$

(задания на 3 балла)

7. **Сумма второго и пятого членов арифметической прогрессии равна 11. Третий её член на 6 больше первого. Найдите второй и четвёртый члены.** **Ответ:** $a_2 = 1$; $a_4 = 7$,

Критерии оценок:

Количество набранных баллов	оценка
1,5 - 2	«3»
2,5 – 4,5	«4»
5 – 7,5	«5»

Самостоятельная работа.

- Вычислите:
- а)8+4+2+1+1/2+1/4+1/8+1/16.
  б)1/16-1/8+1/4-1/2+1-2+4-8+16.   .