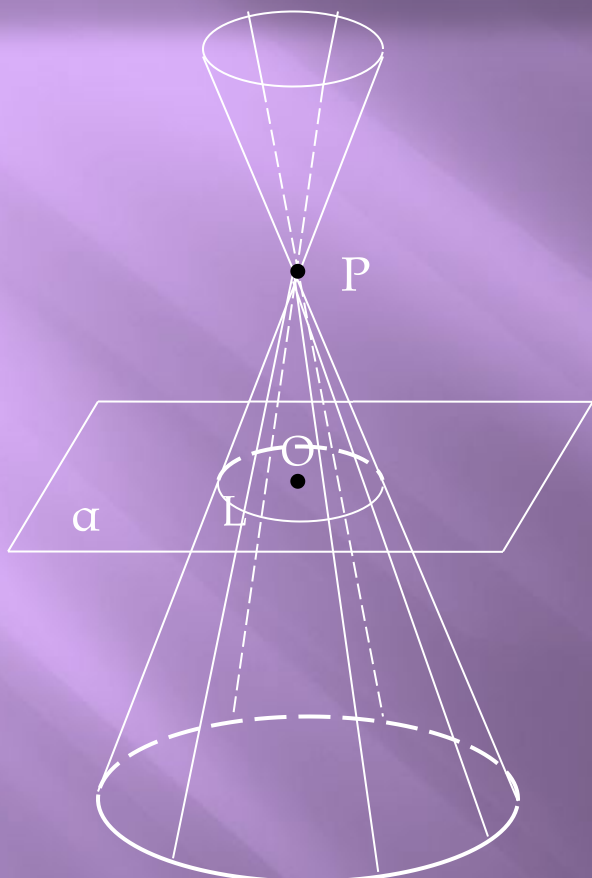
КОНУС

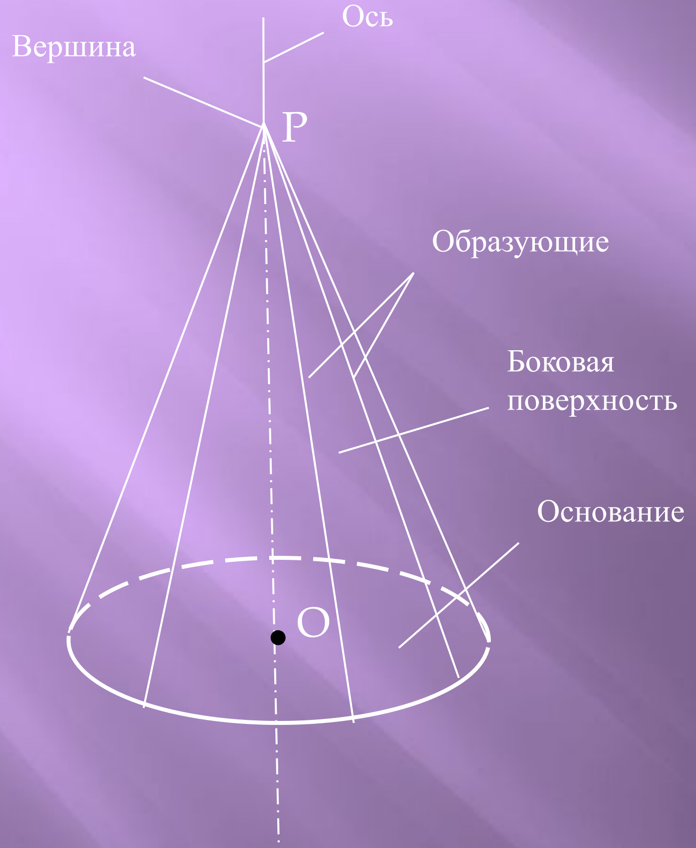
Понятие конуса. Площадь поверхности конуса. Усеченный конус.

Понятие конуса



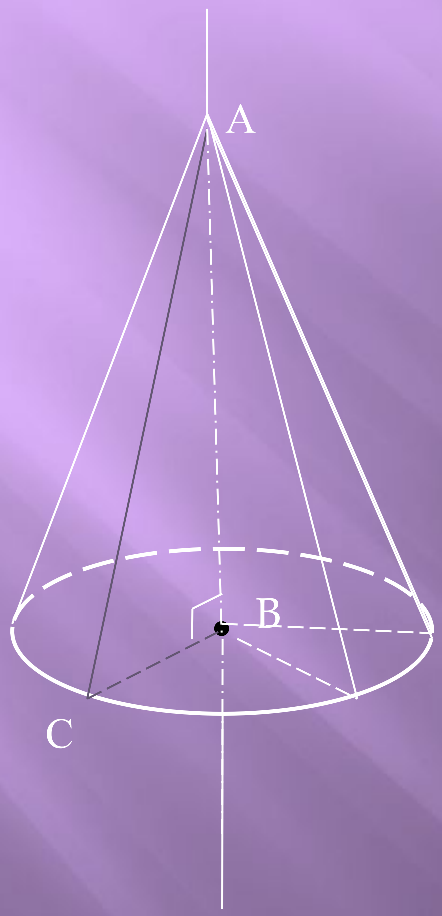
Рассмотрим окружность *L* с центром в точке *O* и прямую *OP*, перпендикулярную к плоскости *a* этой окружности. Через точку *P* и каждую точку окружности проведем прямую. Поверхность, образованная этими прямыми, называется конической поверхностью, а сами прямые – образующими конической поверхности. Точка *P* называется вершиной, а прямая *OP* – осью конической поверхности.

Понятие конуса



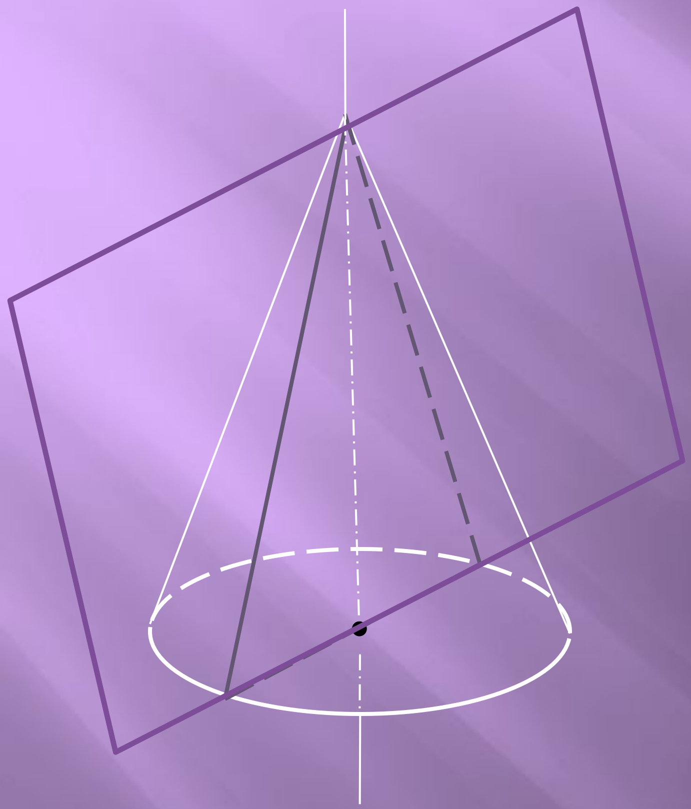
Тело, ограниченное конической поверхностью и кругом с границей *L*, называется **конусом**. Круг называется **основанием конуса,** вершина конической поверхности – **вершиной конуса,** отрезки образующих, заключенные между вершиной и основанием, – **образующими конуса,** а образованная ими часть конической поверхности – **боковой поверхностью конуса.** Ось конической поверхности называется **осью конуса,** а ее отрезок, заключенный между вершиной и основанием, – **высотой конуса.** Отметим, что все образующие конуса равны друг другу (объясните почему).

Конус – фигура вращения



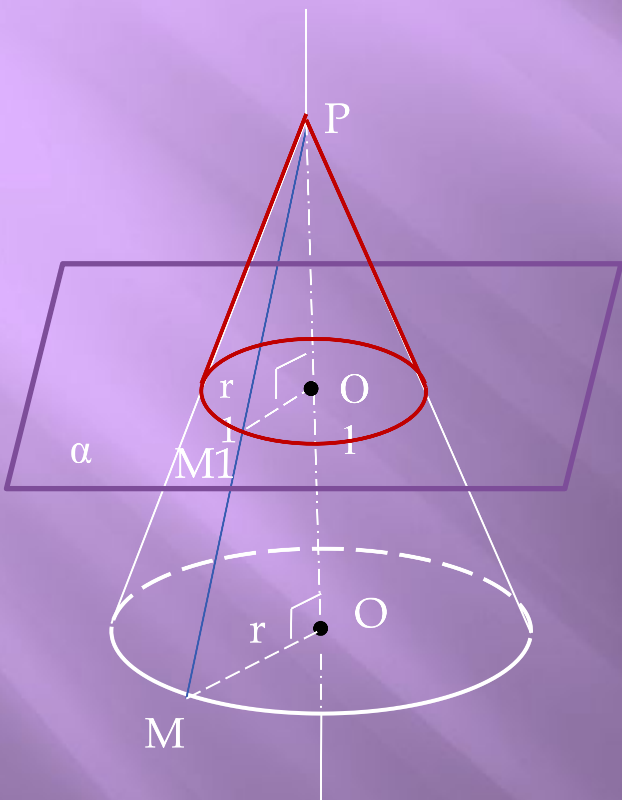
Конус может быть получен вращением прямоугольного треугольника вокруг одного из его катетов. На рисунке изображен конус, полученный вращением прямоугольного треугольника *ABC* вокруг катета *AB*. При этом боковая поверхность конуса образуется вращением гипотенузы *AC*, а основание – вращением катета *BC*.

Осевое сечение



Рассмотрим сечение конуса различными плоскостями. Если секущая плоскость проходит через ось конуса, то сечение представляет собой равнобедренный треугольник, основание которого – диаметр основания конуса, а боковые стороны – образующие конуса. Это сечение называется

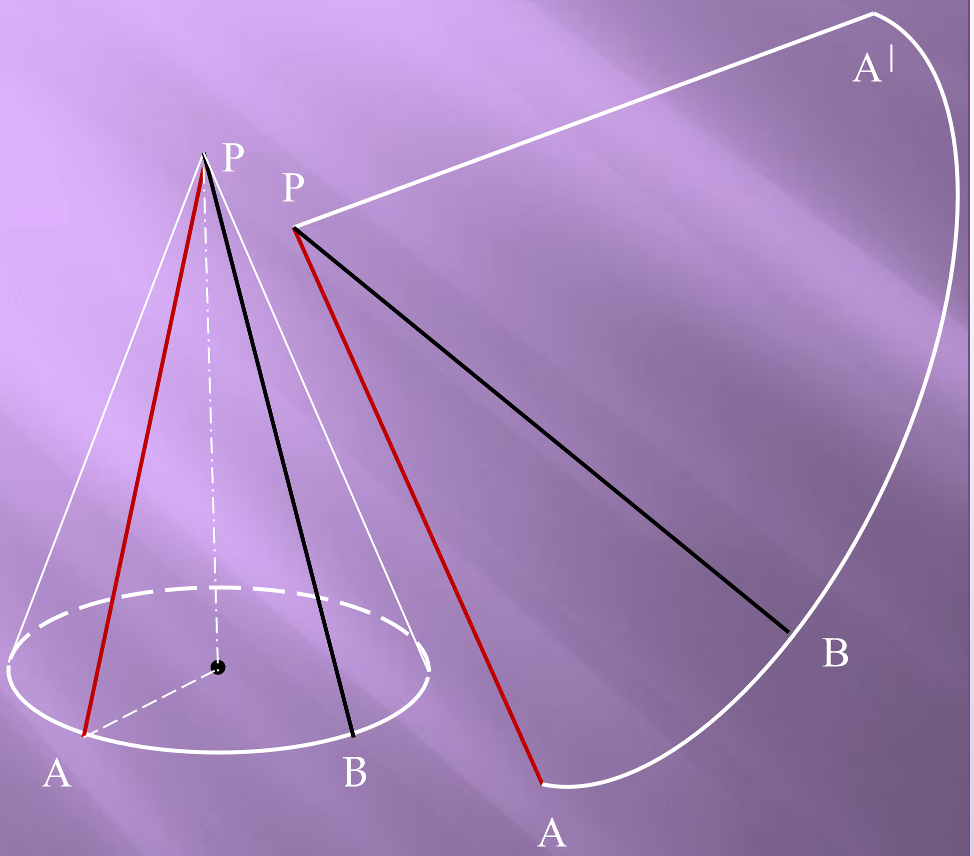
Осевое сечение



Если секущая плоскость перпендикулярна к оси *OP* конуса, то сечение конуса представляет собой круг с центром *O* и расположенным на оси, конуса. Радиус r_1 этого круга равен $(OP/PO_1)*r$, где r

- радиус основания конуса, что легко усмотреть из подобия прямоугольных треугольников *POM* и

Площадь поверхности конуса



Боковую поверхность конуса, как и боковую поверхность цилиндра, можно развернуть на плоскость, разрезав ее по одной из образующих. Разверткой боковой поверхности конуса является круговой сектор, радиус которого равен образующей конуса, а длина дуги сектора равна длине окружности основания конуса

Площадь поверхности конуса

За площадь боковой поверхности конуса принимается площадь ее развертки. Выразим площадь $S_{бок}$ боковой поверхности конуса через его образующую *l* и радиус основания *r*. Площадь кругового сектора — развертки боковой поверхности конуса равна

$$\frac{\pi l^2 a}{360}$$

Где *a* – градусная мера дуги ABA^I, поэтому

Площадь поверхности конуса

$$S_{бок} = \frac{\pi l^2 a}{360} \qquad (1)$$

Площадь поверхности конуса

Выразим *a* через *l* и *r*. Так как длина дуги *ABA*' равна $2\pi r$ (длине окружности основания конуса), то $2\pi r = (\pi l/180)* a$, откуда

$$\alpha = \frac{360\, r}{l}$$

Площадь поверхности конуса

Подставив это выражение в формулу (1), получим

$$S_{бок} = \pi r l \qquad (2)$$

Площадь поверхности конуса

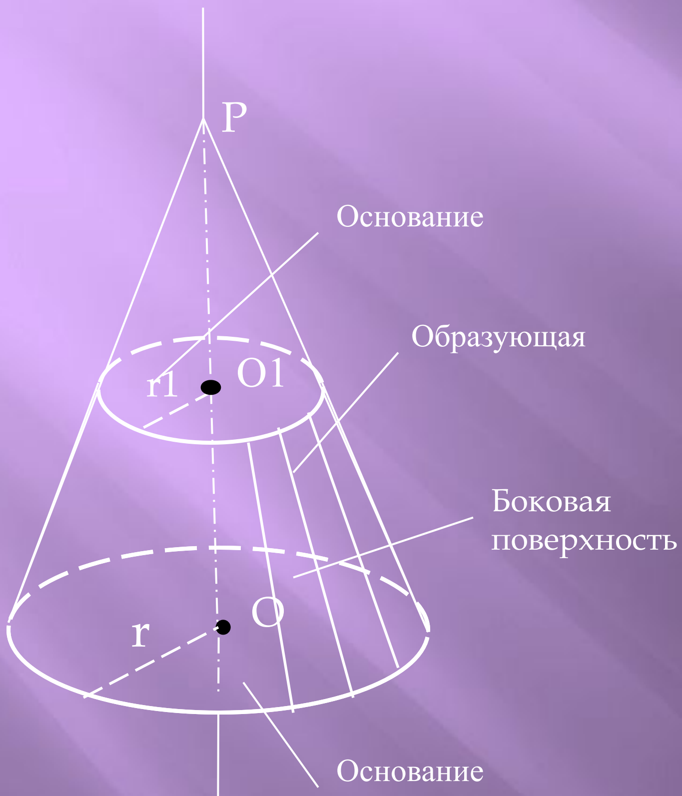
Таким образом, площадь боковой поверхности конуса равна произведению половины длины окружности основания на образующую.

Площадью полной поверхности конуса называется сумма площадей боковой поверхности и основания. Для вычисления площади $S_{кон}$ полной поверхности конуса получается формула

Площадь поверхности конуса

$$S_{бок} = \pi r(l + r)$$

Усеченный конус

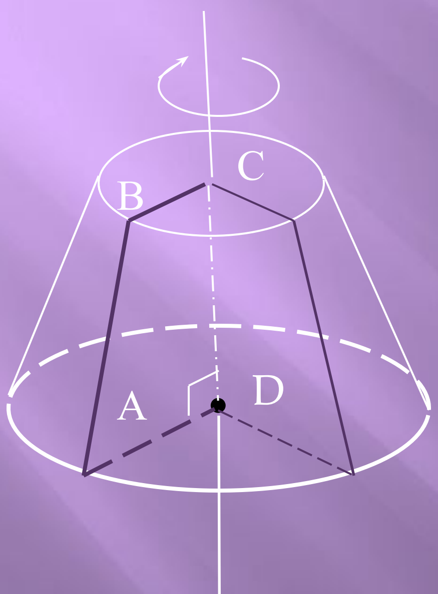


Возьмем произвольный конус и проведем секущую плоскость, перпендикулярную к его оси. Эта плоскость пересекается с конусом по кругу и разбивает конус на две части. Одна из частей представляет собой конус, а другая называется **усеченным конусом.** Основание исходного конуса и круг, полученный в сечении этого конуса плоскостью, называются **основаниями** усеченного конуса, а отрезок, соединяющий их центры,— **высотой** усеченного конуса.

Усеченный конус

Часть конической поверхности, ограничивающая усеченный конус, называется его **боковой поверхностью,** а отрезки образующих конической поверхности, заключенные между основаниями, называются **образующими** усеченного конуса. Все образующие усеченного конуса равны друг другу.

Усеченный конус



Усеченный конус может быть получен вращением прямоугольной трапеции вокруг ее боковой стороны, перпендикулярной к основаниям. На рисунке изображен усеченный конус, полученный вращением прямоугольной трапеции $ABCD$ вокруг стороны CD, перпендикулярной к основаниям AD и BC. При этом боковая поверхность образуется вращением боковой стороны AB, а основания усеченного конуса — вращением оснований CB и DA трапеции.

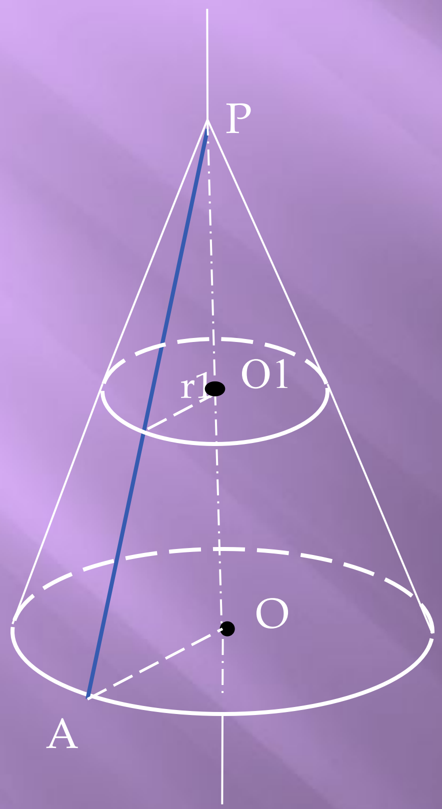
Усеченный конус

Докажем, что **площадь боковой поверхности усеченного конуса равна произведению полусуммы длин окружностей оснований на образующую, т. е.**

$$S_{бок} = \pi (r + r_1) l$$

Где r и r_1 – радиусы оснований, l – образующая усеченного конуса.

Усеченный конус



- Пусть P – вершина конуса, из которого получен усеченный конус, AA_1 – одна из образующих усеченного конуса, $r > r_1$ точки O и O_1 – центры оснований. Используя формулу (2), получаем

$$S_{бок} = \pi r * PA - \pi r_1 * PA = \pi r(PA_1 + AA_1) - \pi r_1 * PA_1$$

Отсюда, учитывая, что $AA_1 = l$, находим

$$S_{бок} = \pi r l + \pi (r - r_1)\, PA_1 \qquad (3)$$

Выразим PA_1 через l, r и r_1. Прямоугольные треугольники PO_1A_1 и POA подобны, так как имеют общий острый угол P, поэтому

$$\frac{PA_1}{PA} = \frac{r_1}{r}$$

или

$$\frac{PA_1}{PA_1 + l} = \frac{r_1}{r}$$

Отсюда получаем

$$PA_1 = \frac{l\, r_1}{r - r_1}$$

Подставив это выражение в формулу (3), приходим к формуле

$$S_{бок} = \pi(r+r_1)l$$