

Геометрические приложения двойного интеграла

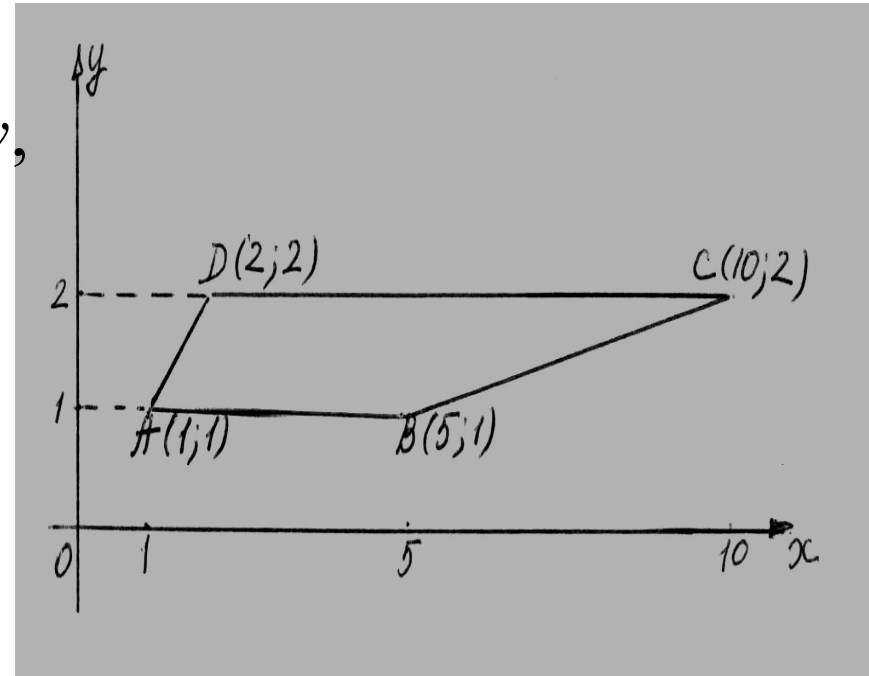
Лекция 8

Примеры

Пример 1.

Вычислить $\iint_D \sqrt{xy - y^2} dx dy,$

где D – трапеция с вершинами $A(1;1)$, $B(5;1)$, $C(10;2)$, $D(2;2)$.



Решение

$$\text{Имеем } \iint_D \sqrt{xy - y^2} dx dy = \int_1^2 dy \int_y^{5y} \sqrt{xy - y^2} dx =$$

$$\int_1^2 \frac{dy}{y} \int_y^{5y} (xy - y^2)^{\frac{1}{2}} d(xy - y^2) = \int_1^2 \frac{2(xy - y^2)^{\frac{3}{2}}}{3y} \Big|_y^{5y} dx =$$

$$\frac{2}{3} \int_1^2 \frac{(5y^2 - y^2)^{\frac{3}{2}}}{y} dy = \frac{2}{3} \int_1^2 \frac{(4y^2)^{\frac{3}{2}}}{y} dy = \frac{2}{3} \int_1^2 \frac{8y^3}{y} dy = \frac{16}{3} \int_1^2 y^2 dy =$$

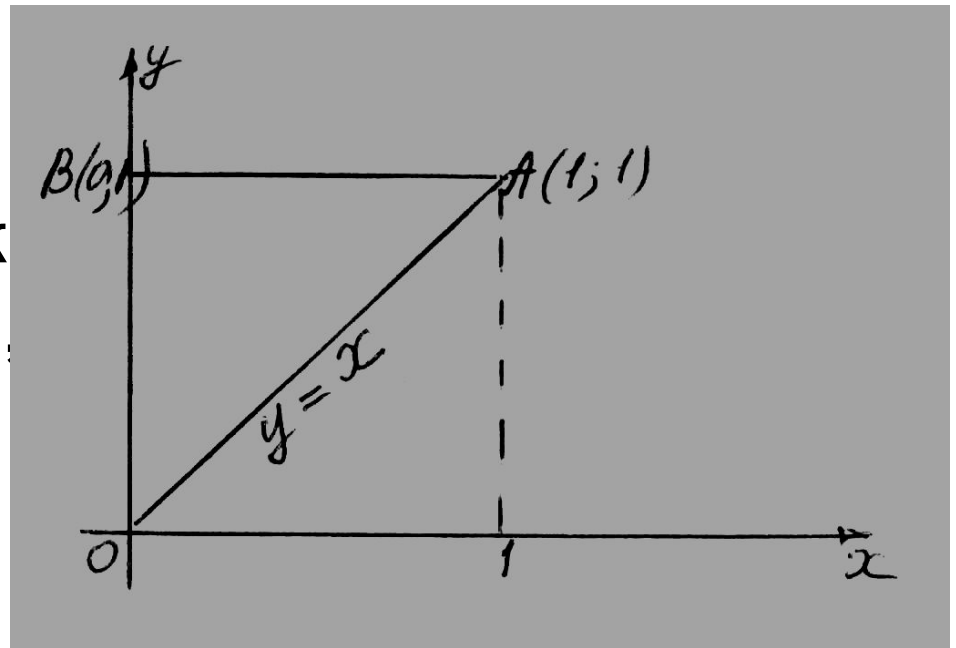
$$\frac{16}{3} \cdot \frac{y^3}{3} \Big|_1^2 = \frac{16}{9} (8 - 1) = \frac{16}{9} \cdot 7 = \frac{112}{9}.$$

Примеры

Пример 2.

Вычислить $\iint_D y dx dy$,

где D – треугольник с вершинами $O(0;0)$, $A(1;1)$ и $B(0;1)$.



Решение

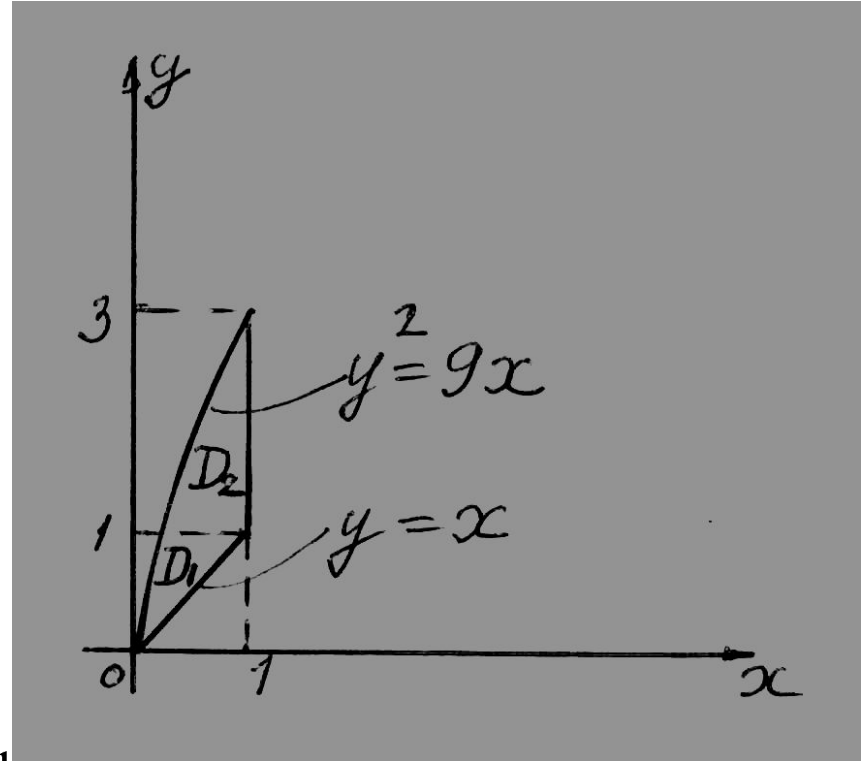
Получаем

$$\iint_D y dx dy = \int_0^1 dx \int_x^1 y dy = \int_0^1 \frac{y^2}{2} \Big|_x^1 dx = \int_0^1 \left(\frac{1}{2} - \frac{x^2}{2} \right) dx$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 (1 - x^2) dx = \frac{1}{2} \left(x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{3} \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{3}.$$

Примеры

Пример 3. Изменить порядок интегрирования в двукратном интеграле



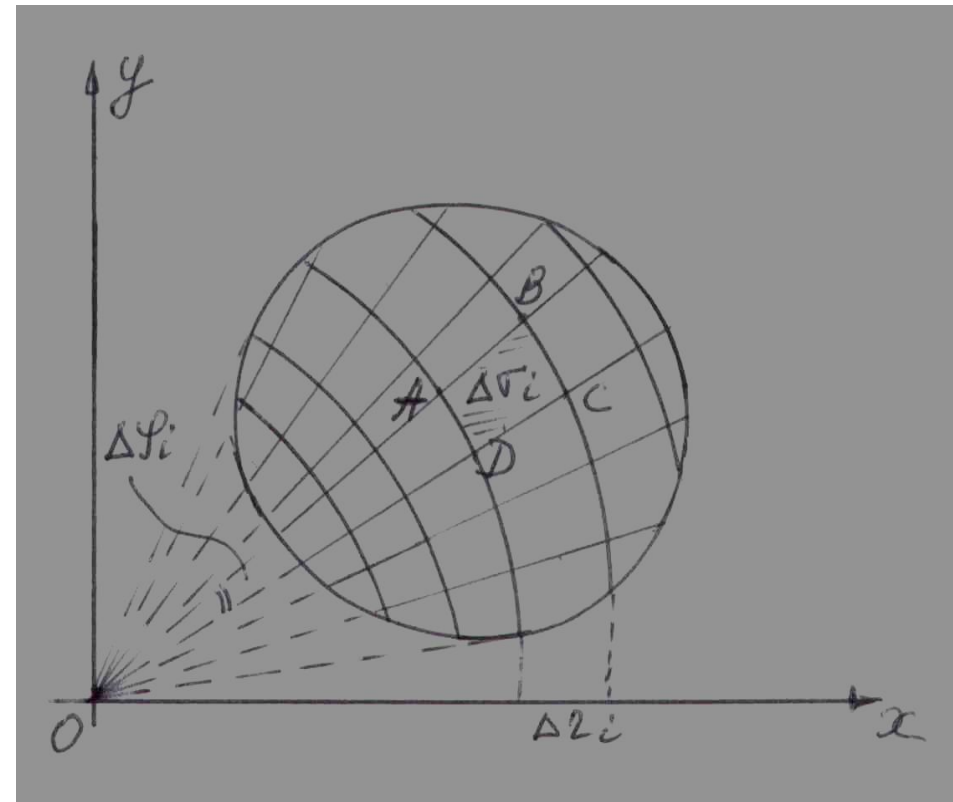
$$I = \int_0^1 dy \int_{\frac{y^2}{9}}^y f(x, y) dx + \int_1^3 dy \int_{\frac{y^2}{9}}^1 f(x, y) dx.$$

$$I = \int_0^1 dx \int_x^{\sqrt{9x}} f(x, y) dy.$$

Двойной интеграл в полярных координатах

Элемент площади в полярных координатах вычисляют так:

$$d\sigma = r d\varphi dr$$



Замена переменных

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \iint_{D'} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r d\varphi dr$$

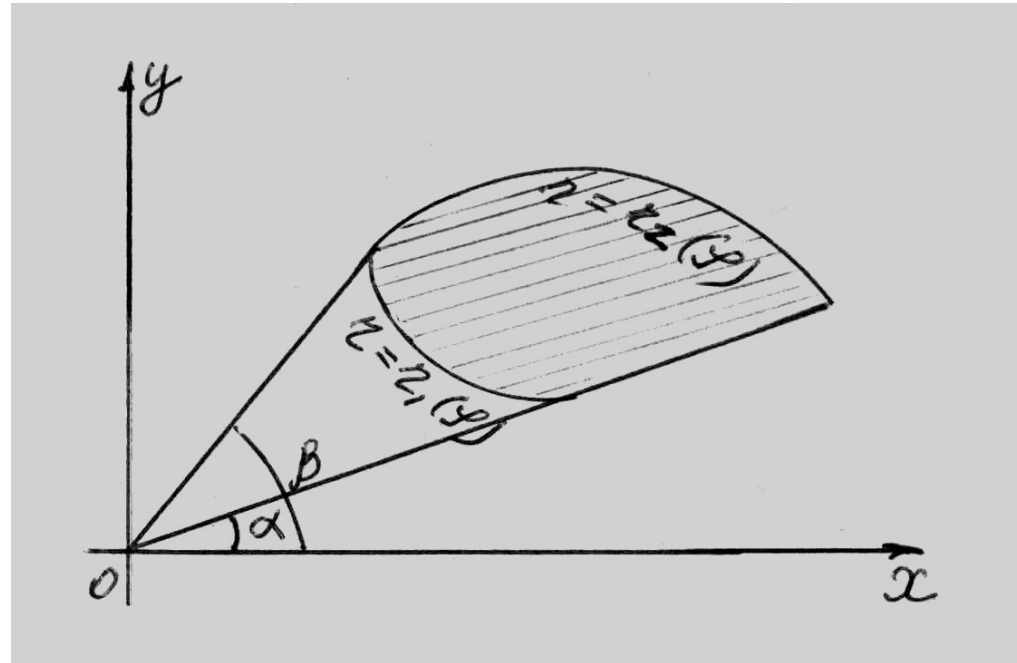
Выражение $d\sigma = r d\varphi dr$ называется двумерным элементом площади в полярных координатах.

Замена переменных

Для того чтобы в двойном интеграле перейти к полярным координатам, достаточно координаты x и y положить равными $r \cos \varphi$ и $r \sin \varphi$ соответственно, а вместо элемента площади подставить его выражение в полярных координатах.

Вычисление

В полярных координатах двойной интеграл всегда вычисляют в таком порядке:



$$\iint_D F(r; \varphi) d\varphi dr = \int_{\alpha}^{\beta} d\varphi \int_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} F(r; \varphi) dr.$$

Площадь плоской фигуры

Площадь плоской фигуры в декартовых координатах вычисляют по формуле:

$$S = \iint_D dx dy,$$

Площадь в полярных координатах

Если фигура ограничена кривыми,
заданными в полярных координатах,
или ее уравнение содержит двучлен

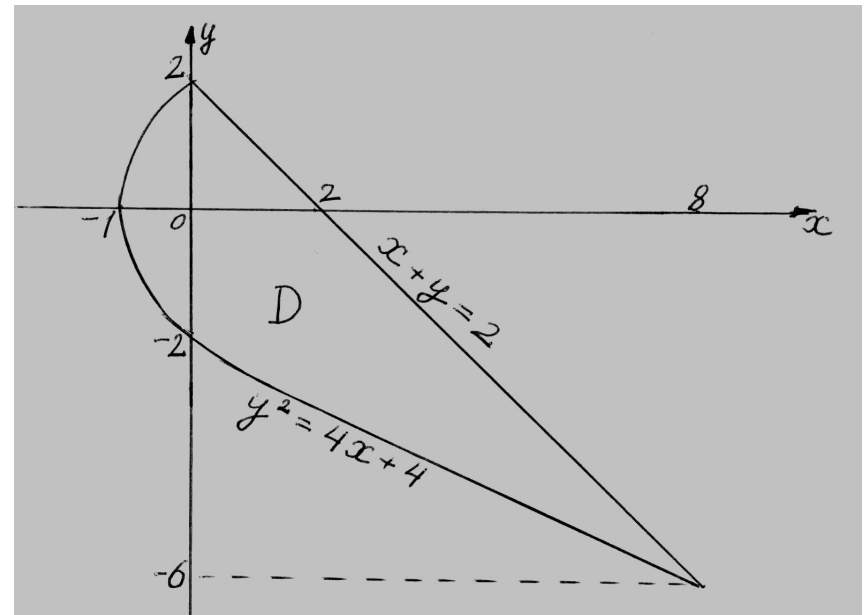
$$x^2 + y^2$$

$$S = \iint_D r d\varphi dr.$$

Вычислить площадь

Фигура ограничена кривыми $x+y=2$ и

$$y^2 = 4x + 4$$



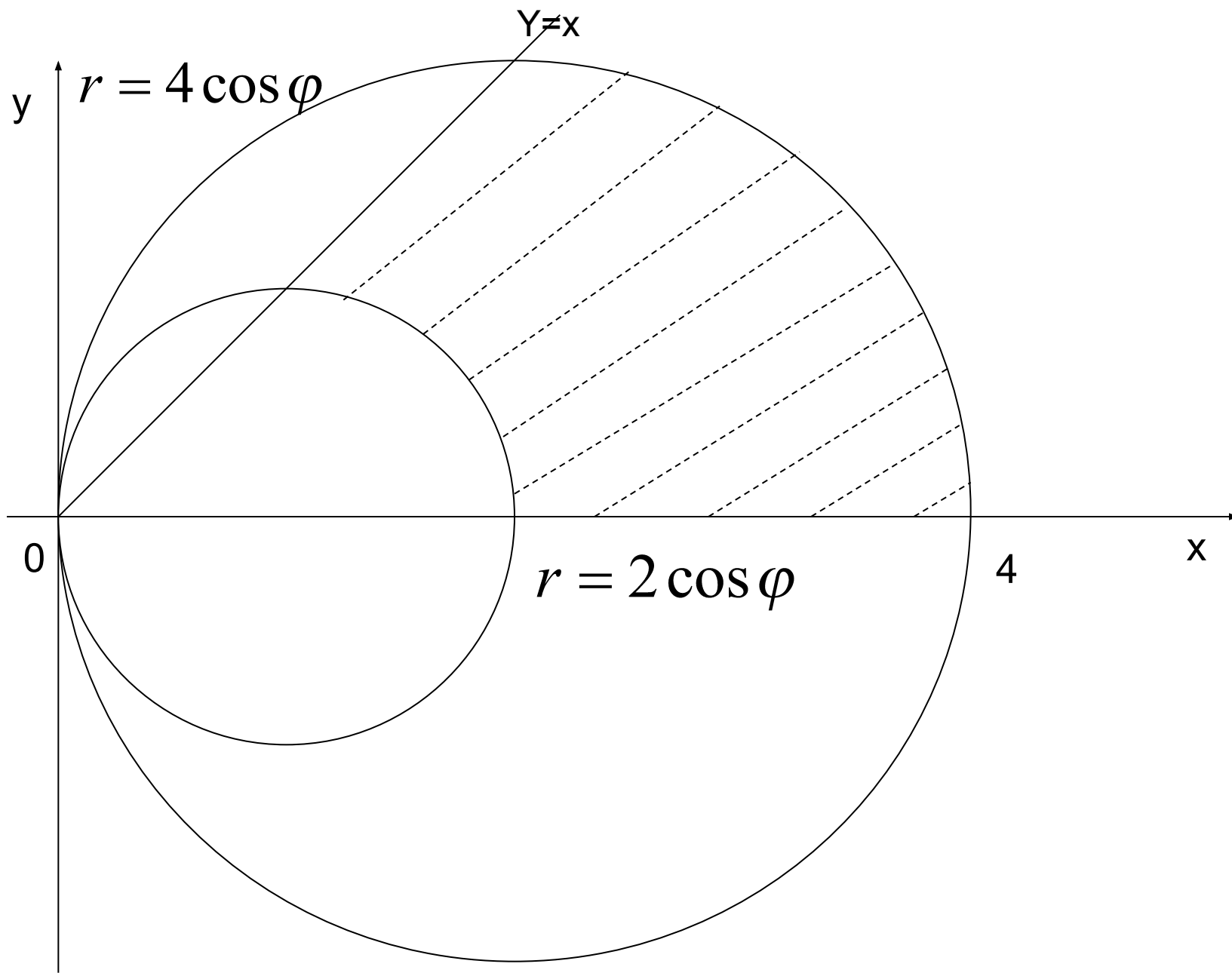
$$S = \iint_D dx dy = \int_{-6}^2 dy \int_{\frac{y^2-4}{4}}^{2-y} dx = \int_{-6}^2 x \Big|_{\frac{y^2-4}{4}}^{2-y} dy = \int_{-6}^2 \left(2 - y - \frac{y^2}{4} + 1\right) dy = 21\frac{1}{3}.$$

Вычислить площадь фигуры,
ограниченной линиями

$$x^2 + y^2 = 2x, \quad x^2 + y^2 = 4x,$$

$$y = x, \quad y = 0.$$

Перейдем к полярным координатам и
изобразим фигуру.



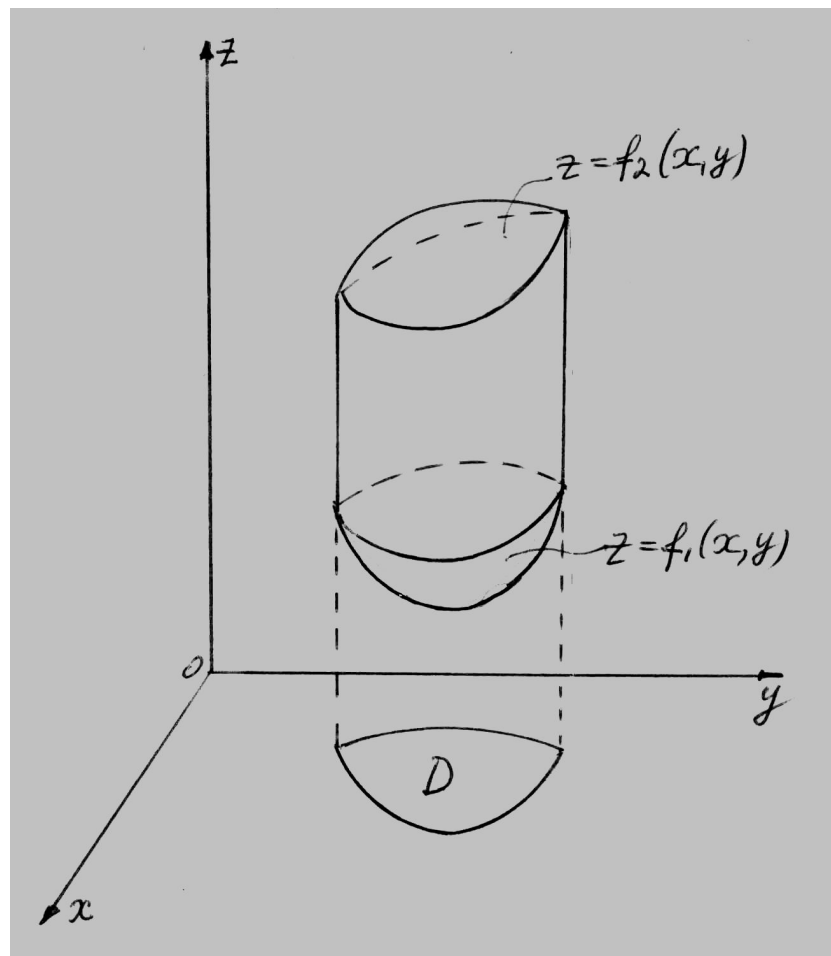
Решение

Площадь области D вычислим в полярных координатах

$$\begin{aligned} S &= \iint_D r d\phi dr = \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\phi \int_{2\cos\phi}^{4\cos\phi} r dr = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{r^2}{2} \Big|_{2\cos\phi}^{4\cos\phi} d\phi = 6 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 \phi d\phi = \\ &= 3 \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 + \cos 2\phi) d\phi = 3 \left(\phi + \frac{\sin 2\phi}{2} \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = 3 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\sin \frac{\pi}{2}}{2} \right) = \frac{3}{4} (\pi + 2). \end{aligned}$$

Вычисление объемов тел с помощью двойного интеграла

Пусть тело ограничено с боков цилиндрической поверхностью с образующими, параллельными оси Oz , а снизу и сверху соответственно поверхностями

$$z = f_1(x, y), z = f_2(x, y)$$


Формула для вычисления объема

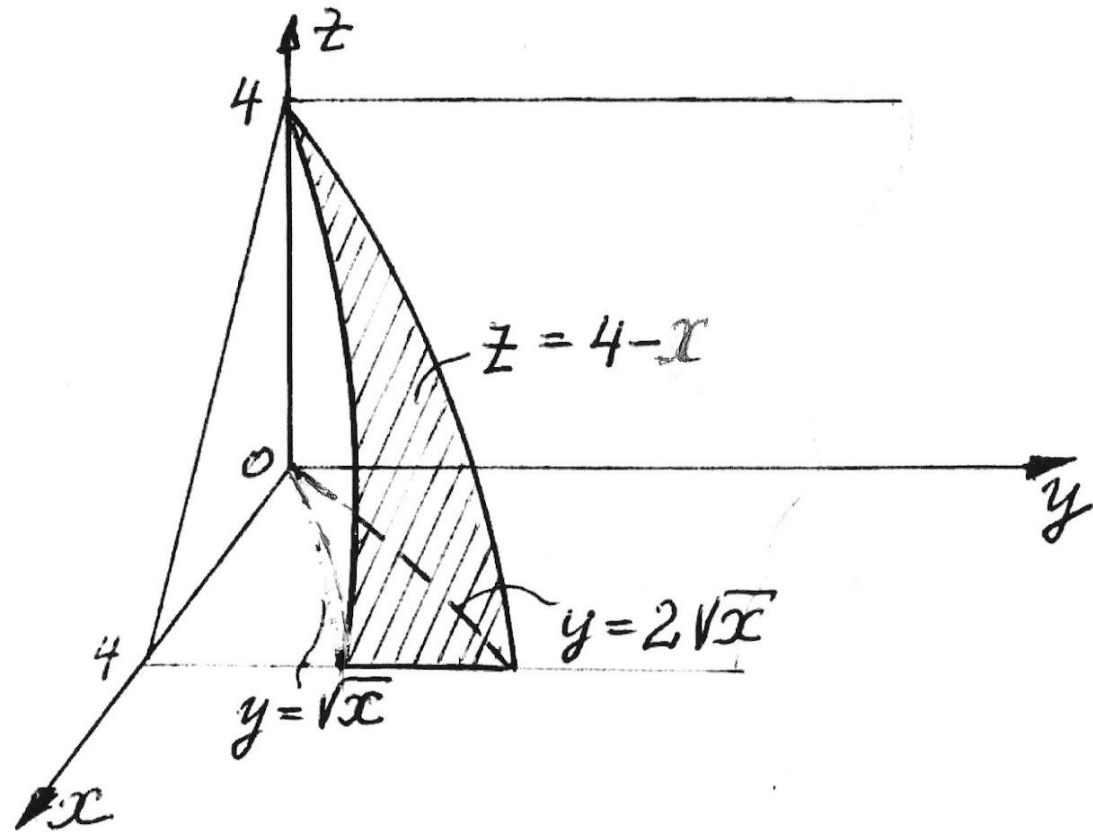
Тогда объем тела равен разности
объемов цилиндров и вычисляется
по формуле:

$$\begin{aligned} V &= \iint_D f_2(x, y) dx dy - \iint_D f_1(x, y) dx dy = \\ &= \iint_D [f_2(x, y) - f_1(x, y)] dx dy. \end{aligned}$$

Вычислить объем тела, ограниченного
поверхностями

$$x+z=4, z=0, y = \sqrt{x}, y = 2\sqrt{x}.$$

$$y = \sqrt{x}$$



Вычислить объем тела

Запишем объем в виде двойного интеграла:

$$V = \iint_D (4-x) dx dy = \int_0^4 dx \int_{\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}} (4-x) dy = \int_0^4 (4-x) dx \int_{\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}} dy =$$

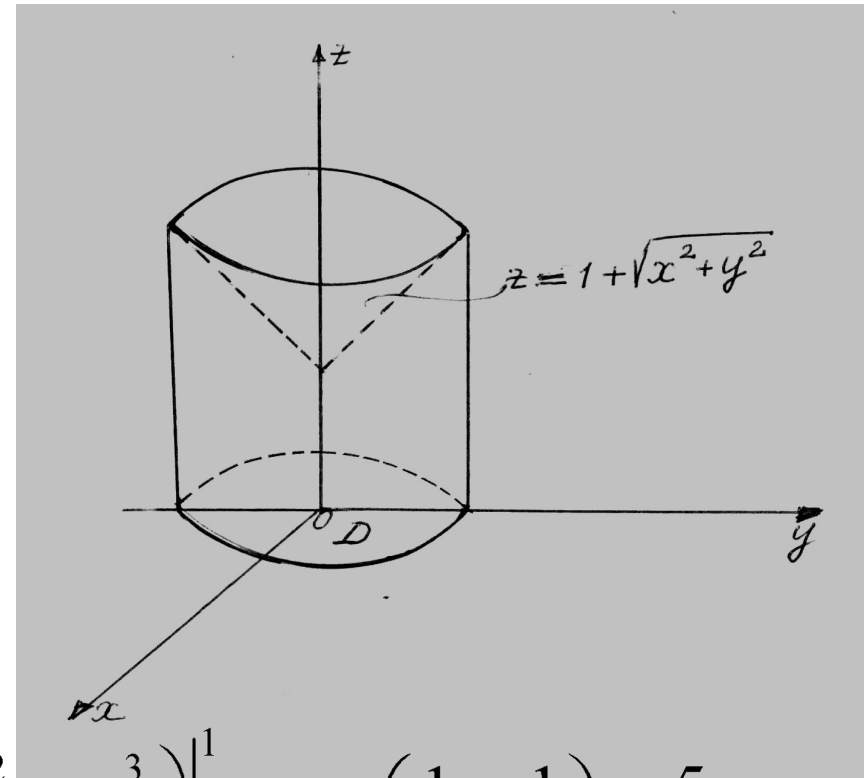
$$= \int_0^4 (4\sqrt{x} - x\sqrt{x}) dx = \left(4 \cdot \frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3} - 2 \cdot \frac{x^{\frac{5}{2}}}{5} \right) \Big|_0^4 = \frac{128}{15}.$$

Найти объем тела, ограниченного цилиндром радиуса 1, плоскостью Oxy и конусом

Запишем объем

$$V = \iint (1 + \sqrt{x^2 + y^2}) dx dy.$$

Вычислим его в полярных координатах



$$V = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 (1+r)r dr = 2\pi \cdot \left(\frac{r^2}{2} + \frac{r^3}{3} \right) \Big|_0^1 = 2\pi \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right) = \frac{5}{3}\pi.$$