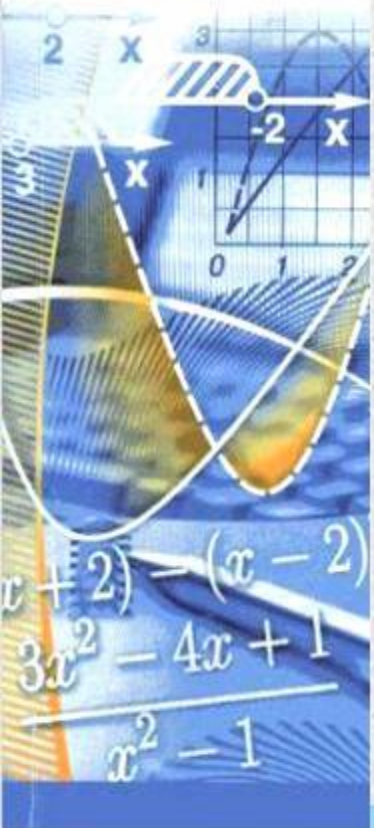




МОУ «Инсарская средняя общеобразовательная школа №1»

# Геометрические задачи типа «С4»

по материалам ЕГЭ – 2010



Чудаева Елена Владимировна, учитель математики,  
г. Инсар, Республика Мордовия



# Задачи

№1

№2

№3

№4

*Желаю успеха!*

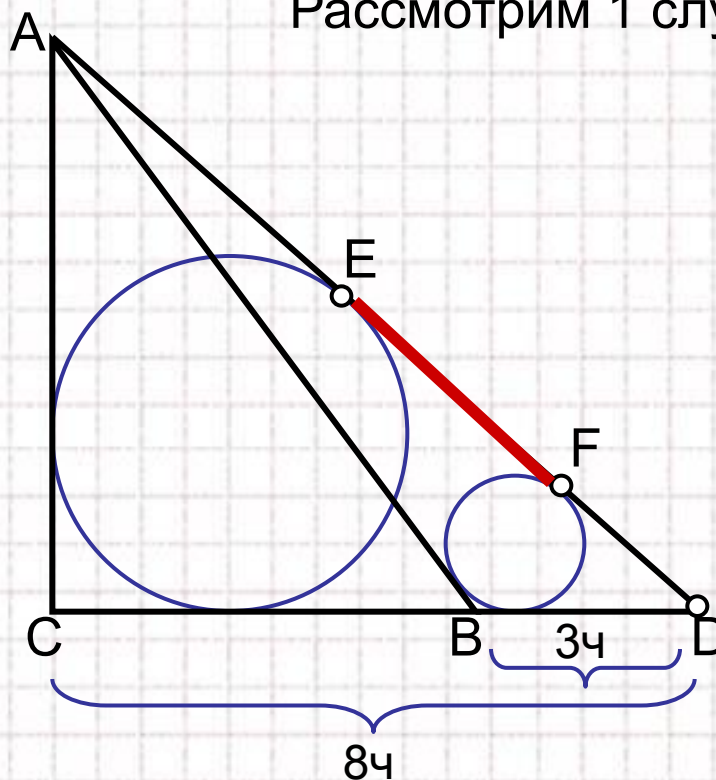
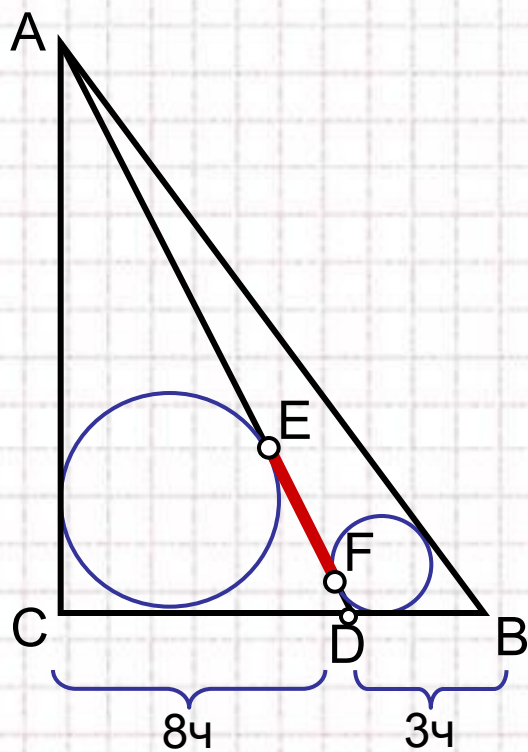
*Помните: "Дорогу осилит идущий!"*

№  
1

В треугольнике  $ABC$   $AB=15$ ,  $BC = 12$ ,  $CA = 9$ . Точка  $D$  лежит на прямой  $BC$  так, что  $BD:DC = 3:8$ . Окружности, вписанные в каждый из треугольников  $ADC$  и  $ADB$ , касаются стороны  $AD$  в точках  $E$  и  $F$ . Найдите длину отрезка  $EF$ .

**Решение.** Возможны два случая: точка  $D$  лежит на отрезке  $BC$  и точка  $D$  лежит вне отрезка  $BC$ .

Рассмотрим 1 случай.

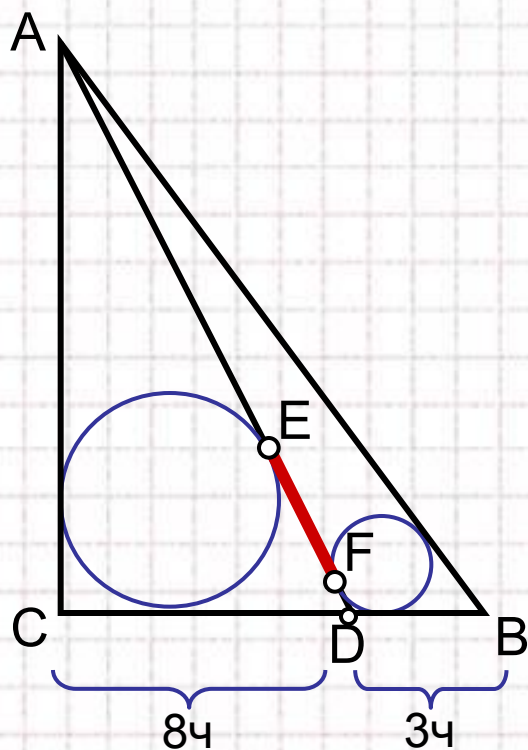


№  
1

В треугольнике  $ABC$   $AB=15$ ,  $BC = 12$ ,  $CA = 9$ . Точка  $D$  лежит на прямой  $BC$  так, что  $BD:DC = 3:8$ . Окружности, вписанные в каждый из треугольников  $ADC$  и  $ADB$ , касаются стороны  $AD$  в точках  $E$  и  $F$ . Найдите длину отрезка  $EF$ .

**Решение.** Возможны два случая: точка  $D$  лежит на отрезке  $BC$  и точка  $D$  лежит вне отрезка  $BC$ .

Рассмотрим 1 случай.



$$\text{Найдем: } BD = \frac{3}{11} \cdot BC = \frac{36}{11}, \quad DC = \frac{8}{11} \cdot BC = \frac{96}{11}.$$

$$\text{Из } \triangle ADC, \quad DE = \frac{AD + DC - AC}{2} = \frac{AD + DC - 9}{2}, \quad ?$$

$$\text{Из } \triangle ADB, \quad DF = \frac{AD + BD - AB}{2} = \frac{AD + BD - 15}{2}.$$

Значит,

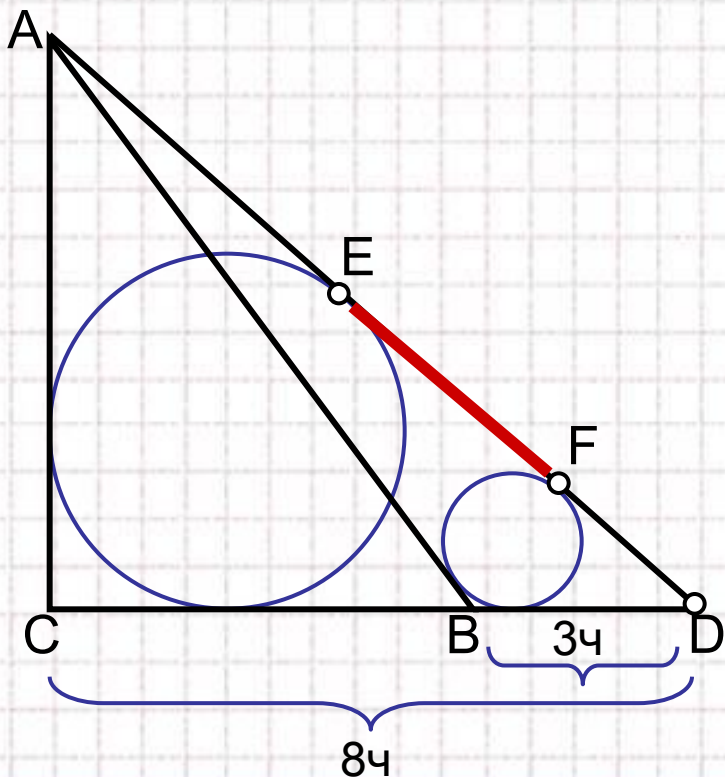
$$EF = DE - DF = \frac{6 + DC - BD}{2} = \frac{63}{11}.$$

№  
1

В треугольнике  $ABC$   $AB=15$ ,  $BC = 12$ ,  $CA = 9$ . Точка  $D$  лежит на прямой  $BC$  так, что  $BD:DC = 3:8$ . Окружности, вписанные в каждый из треугольников  $ADC$  и  $ADB$ , касаются стороны  $AD$  в точках  $E$  и  $F$ . Найдите длину отрезка  $EF$ .

**Решение.** Возможны два случая: точка  $D$  лежит на отрезке  $BC$  и точка  $D$  лежит вне отрезка  $BC$ .

Рассмотрим 2 случай.



$$BC = \frac{5}{8} \cdot DC = 12, \quad DC = \frac{96}{5},$$

$$BD = DC - BC = \frac{96}{5} - 12 = \frac{36}{5}.$$

$$\text{Из } \triangle ADC, \quad DE = \frac{AD + DC - AC}{2} = \frac{AD + DC - 9}{2},$$

$$\text{Из } \triangle ADB, \quad DF = \frac{AD + BD - AB}{2} = \frac{AD + BD - 15}{2}.$$

$$\text{Значит, } EF = DE - DF = \frac{6 + DC - BD}{2} = 9.$$

$$\text{Ответ: } 9 \text{ или } \frac{63}{11}.$$



## Вспомогательная задача.

Пусть окружность вписана в треугольник ABC. Тогда расстояние от вершины A до точки касания окружности со стороной AB равно

$$x = p - a = \frac{b + c - a}{2}.$$

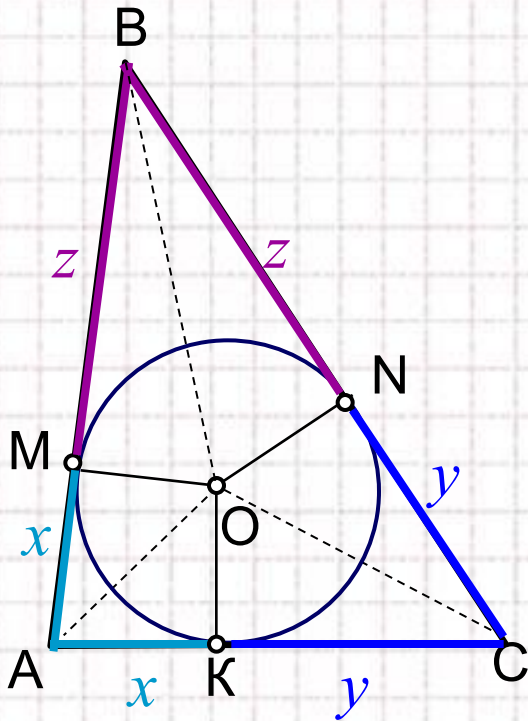
Доказательство.

Мы знаем, что центр вписанной в треугольник окружности лежит на пересечении биссектрис внутренних углов треугольника, значит  $AM = AK = x$ ,  $BM = BN = y$ ,  $CK = CN = z$ .

Тогда, периметр  $\triangle ABC$  равен:  $P = 2x + 2y + 2z$ , откуда

$$p = \frac{P}{2} = x + y + z, \quad \text{или} \quad x = p - (y + z) = p - a,$$

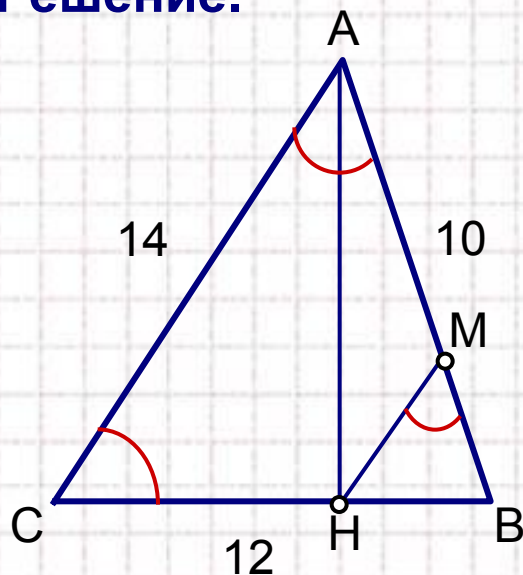
$$x = p - a = \frac{a + b + c}{2} - a = \frac{b + c - a}{2}.$$



№  
2

Точка  $H$  – основание высоты треугольника со сторонами 10, 12, 14, опущенной на сторону, равную 12. Через точку  $H$  проведена прямая, отсекающая от треугольника подобный ему треугольник и пересекающая сторону, равную 10, в точке  $M$ . Найдите  $HM$ .

**Решение.**



Пусть  $AB = 10$ ,  $BC = 12$ ,  $AC = 14$ .

$$\cos B = \frac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2 \cdot AB \cdot BC} = \frac{100 + 144 - 196}{2 \cdot 10 \cdot 12} = \frac{1}{5}.$$

$\triangle ABH$  – прямоугольный,  $BH = AB \cdot \cos B = 2$ .

По условию  $\triangle ABC \sim \triangle HBM$ , и имеют общий угол  $B$ , значит возможны два случая.

**1 случай.**  $\angle BMH = \angle BAC$ ;  $k = \frac{BH}{BC} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$ ,

значит,  $HM = \frac{1}{6} \cdot AC = \frac{1}{6} \cdot 14 = \frac{7}{3}$ .

$k = \frac{BH}{AB} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$ , значит,  $HM = \frac{1}{5} \cdot AC = \frac{1}{5} \cdot 14 = \frac{14}{5}$ .

**2 случай.**  $\angle BMH = \angle ACB$ ;

**Ответ:**  $\frac{7}{3}$  или  $\frac{14}{5}$ .



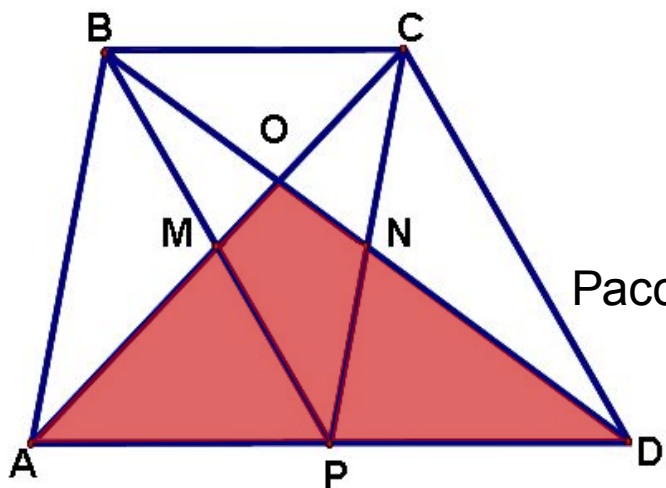
№  
3

Площадь трапеции  $ABCD$  равна 240. Диагонали пересекаются в точке  $O$ , отрезки, соединяющие середину  $P$  основания  $AD$  с вершинами  $B$  и  $C$ , пересекаются с диагоналями трапеции в точках  $M$  и  $N$ . Найдите площадь четырехугольника  $OMPN$ , если одно из оснований трапеции втрое больше другого.

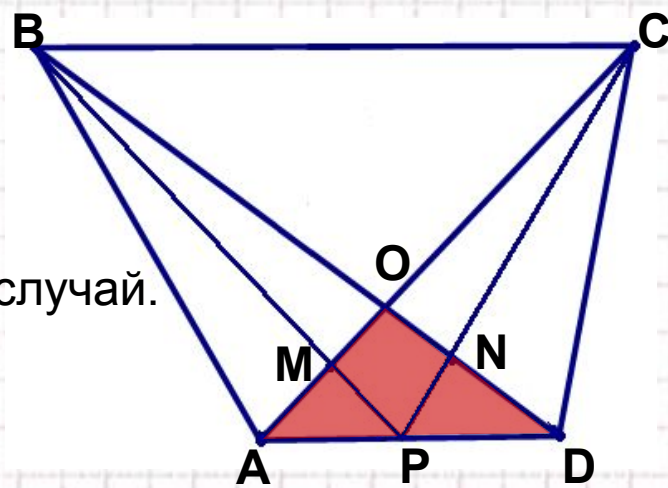
**Решение.** Возможно два вида трапеции. В обоих случаях:

$$S_{ABCD} = \frac{BC + AD}{2} \cdot h = \begin{cases} 1) \text{ нижнее основание вдвое больше верхнего, } BC = a, AD = 2a, \\ 2) \text{ верхнее основание вдвое больше нижнего, } AD = a, BC = 2a. \end{cases} \frac{ah}{2} = 240, ah = 480, ah = 120$$

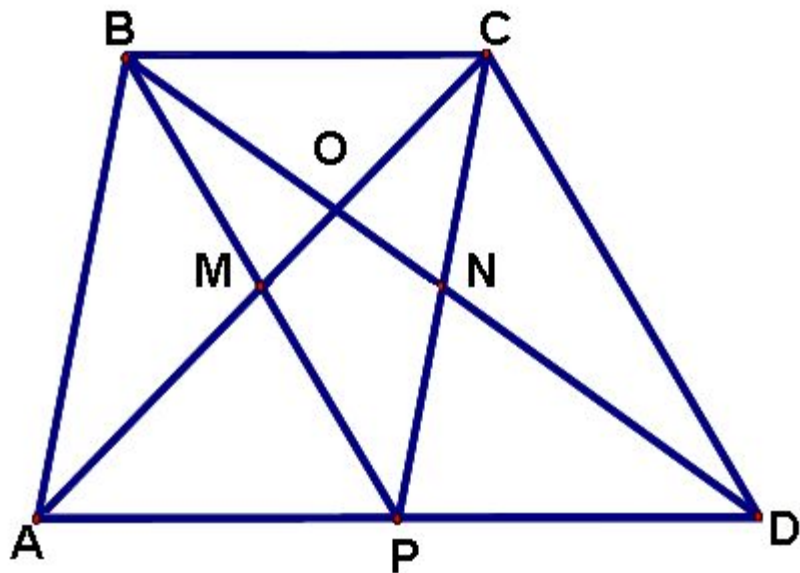
Найдем площадь  $OMPN$ :  $S_{MONP} = S_{\Delta AOD} - S_{\Delta AMP} - S_{\Delta PND}$ .



Рассмотрим первый случай.







по условию  $BC = a$ ,  $AD = 3a$ ,  $ah = 120$ .

$$S_{MONP} = S_{\Delta AOD} - S_{\Delta AMP} - S_{\Delta PND}$$

1)  $\Delta BOC \sim \Delta AOD$ , по трем углам

$$k = \frac{BC}{AD} = \frac{a}{3a} = \frac{1}{3}$$

значит высота  $\Delta AOD$  равна  $\frac{3}{4}h$ , тогда:

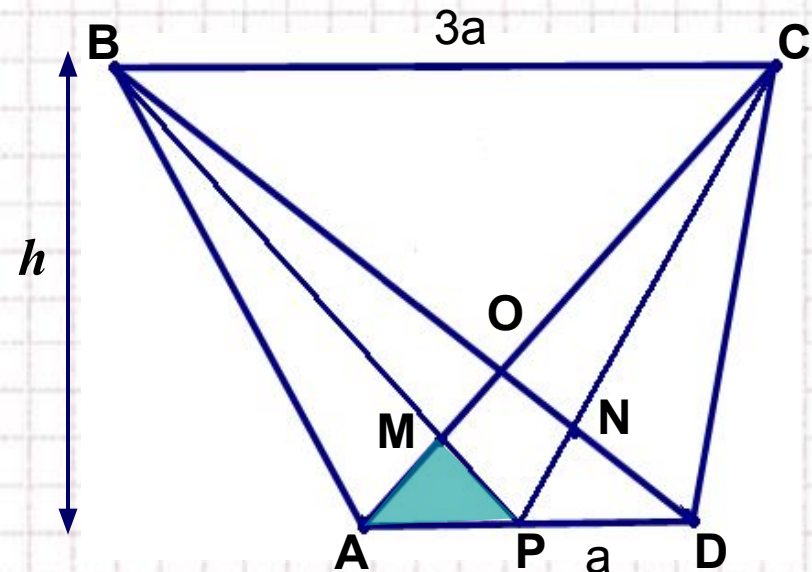
$$S_{\Delta AOD} = \frac{1}{2} \cdot AD \cdot \frac{3}{4}h = \frac{3}{8} \cdot 3ah = \frac{9}{8} \cdot 120 = 135.$$

2)  $\Delta BMC \sim \Delta AMP$ , по трем углам,  $k = \frac{BC}{AP} = \frac{a}{3a/2} = \frac{2}{3}$ .

Тогда высота треугольника AMP равна  $\frac{3}{5}$  высоты трапеции.

$$S_{\Delta AMP} = S_{\Delta PND} = \frac{1}{2} \cdot AD \cdot \frac{3}{5}h = \frac{1}{2} \cdot \frac{3a}{2} \cdot \frac{3}{5}h = \frac{9}{20} \cdot 120 = 54.$$

3) Находим искомую площадь:  $S_{MONP} = S_{\Delta AOD} - 2S_{\Delta AMP} = 135 - 2 \cdot 54 = 27$ .



По условию  $BC = 3a$ ,  $AD = a$ ,  $ah = 120$ .

$$S_{MONP} = S_{\Delta AOD} - S_{\Delta AMP} - S_{\Delta PND}$$

1)  $\Delta BOC \sim \Delta AOD$ , по трем углам

$$k = \frac{BC}{AD} = \frac{3a}{a} = 3.$$

Значит высота  $\Delta AOD$  равна  $\frac{1}{4}h$ , тогда:

$$S_{\Delta AOD} = \frac{1}{2} \cdot AD \cdot \frac{1}{4}h = \frac{1}{8} \cdot ah = \frac{1}{8} \cdot 120 = 15.$$

2)  $\Delta BMC \sim \Delta AMP$ , по трем углам,  $k = \frac{BC}{AP} = \frac{3a}{a/2} = 6.$

Тогда высота треугольника AMP равна  $1/7$  высоты трапеции.

$$S_{\Delta AMP} = S_{\Delta PND} = \frac{1}{2} \cdot AD \cdot \frac{1}{7}h = \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{1}{7}h = \frac{1}{28} \cdot 120 = \frac{30}{7}.$$

3) Находим искомую площадь:  $S_{MONP} = S_{\Delta AOD} - 2S_{\Delta AMP} = 15 - 2 \cdot \frac{30}{7} = 5.$

**Ответ: 27 или 5.**

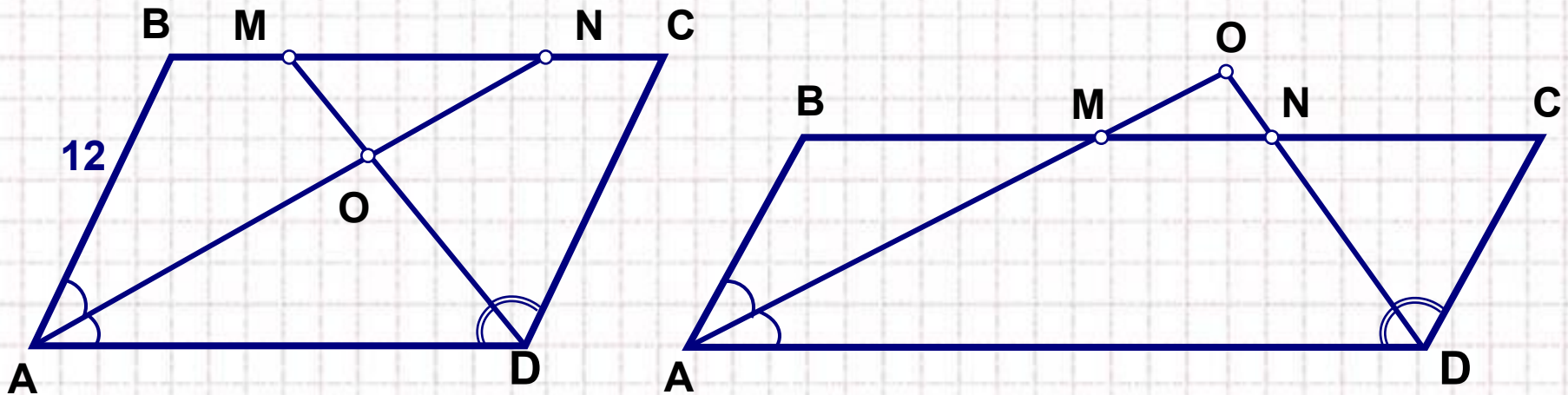


№  
4

В параллелограмме  $ABCD$   $AB=12$ , биссектрисы углов при стороне  $AD$  делят сторону  $BC$  точками  $M$  и  $N$ , так что  $BM:MN=1:7$ .  
Найдите  $BC$ .

**Решение.** Пусть  $O$  – точка пересечения биссектрис.

По условию  $\frac{BM}{MN} = \frac{1}{7} < 1$ , значит  $M$  лежит между точками  $B$  и  $N$ .



Возможны два случая.

- 1) точка  $O$  – лежит внутри параллелограмма;
- 2) точка  $O$  – лежит вне параллелограмма.

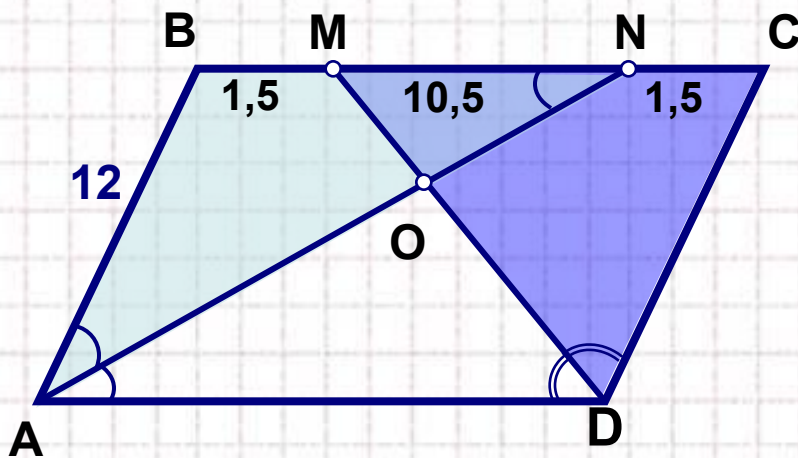
Рассмотрим первый случай.

№  
4

В параллелограмме ABCD  $AB=12$ , биссектрисы углов при стороне AD делят сторону BC точками M и N, так что  $BM:MN=1:7$ .  
Найдите BC.

**Решение.** Пусть O – точка пересечения биссектрис.

По условию  $\frac{BM}{MN} = \frac{1}{7} < 1$ , значит M лежит между точками B и N.



1)  $\triangle ABN$  – равнобедренный, т.к.  
 $\angle BNA = \angle NAD$  – накрест лежащие;  
AN – биссектриса  $\angle A$ ,  
значит  $\angle BNA = \angle BAN$  и  $AB = BN = 12$ ,  
тогда  $BM = \frac{1}{8}BN = \frac{1}{8} \cdot 12 = 1,5$ .  
Найдем  $MN = BN - BM = 12 - 1,5 = 10,5$ .

2) Аналогично,  $\triangle DMC$  – равнобедренный,  $MC = DC = 12$ .

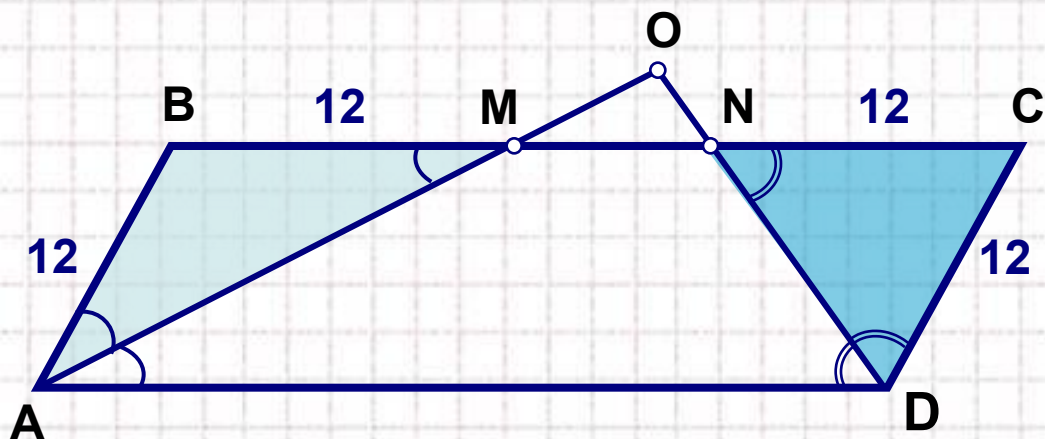
Тогда  $NC = MC - MN = 12 - 10,5 = 1,5$ .

3) ~~Важно, что  $BM + MN + NC = 12$ .~~

№  
4

В параллелограмме  $ABCD$   $AB=12$ , биссектрисы углов при стороне  $AD$  делят сторону  $BC$  точками  $M$  и  $N$ , так что  $BM:MN=1:7$ .  
Найдите  $BC$ .

**Решение.** Рассмотрим второй случай:  
точка  $O$  – лежит вне параллелограмма.



- 1)  $\triangle ABM$  – равнобедренный, т.к.  
 $\angle BMA = \angle MAD$  – накрест лежащие  
 $AM$  – биссектриса  $\angle A$ ,  
значит  $\angle BMA = \angle BAM$ .  
Тогда  $AB = BM = 12$ .

По условию  $\frac{BM}{MN} = \frac{1}{7}$ , значит  $BM = \frac{1}{8}BN, \Rightarrow BN = 8 \cdot 12 = 96$ .

2) Аналогично  $\triangle DNC$  – равнобедренный, тогда  $NC = DC = 12$ .

3) Значит,  $BC = BN + NC = 96 + 12 = 108$ .

**Ответ: 13,5 или 108.**



## Использованные ресурсы

Тексты задач взяты с сайта Александра Ларина

<http://alexlarin.narod.ru/ege.html>

Рисунок на слайде №2

<http://office.microsoft.com/ru-ru/images/results.aspx?qu=%D1%81%D0%BC%D0%B0%D0%B9%D0%BB%D1%8B>

Для создания шаблона презентации использовалась картинка

[http://www.box-m.info/uploads/posts/2009-04/1238954029\\_1.jpg](http://www.box-m.info/uploads/posts/2009-04/1238954029_1.jpg)

и шаблон с сайта <http://aida.ucoz.ru>