Геометрический метод решения систем уравнений

Морозова Татьяна, МДМ-110

Метод - способ достижения какой-либо цели, решения конкретной задачи; совокупность приемов или операций практического или теоретического освоения (познания) действительности.

Геометрический метод характеризуется как «метод, идущий от наглядных представлений» (А. Д. Александров), «метод геометрической наглядности» (Г. Фройденталь). ***Существенными признаками*** этого понятия являются геометрические (наглядные) представления и законы геометрии, в которых отражены свойства геометрических фигур.

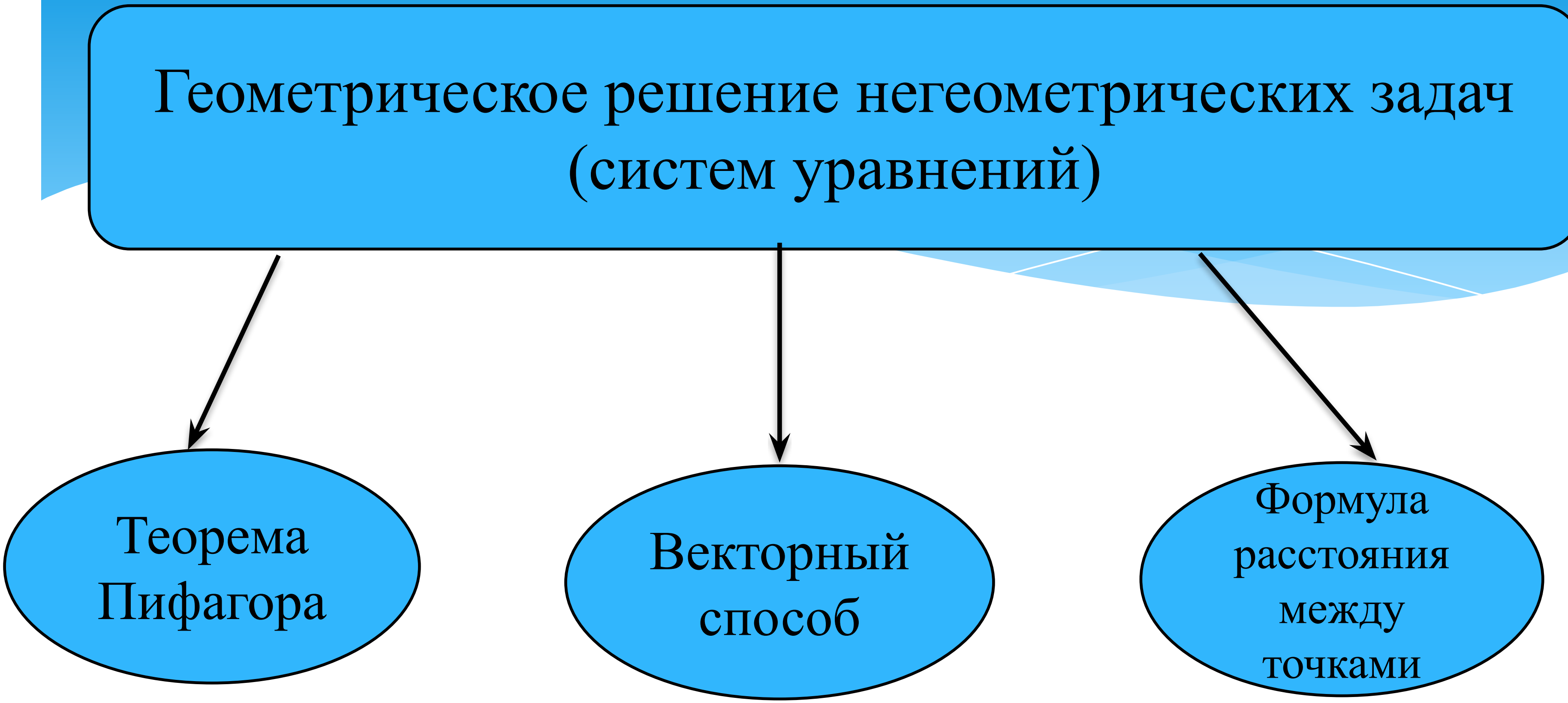
Геометрический метод будем понимать как способ познавательной деятельности, основанный на системе геометрических знаний и на геометрических (наглядных) представлениях.

Геометрические методы:

- метод длин (свойства длины отрезка);
- метод треугольников (система знаний о треугольниках);
- метод параллельных прямых (о параллельных прямых);
- метод соотношения между сторонами и углами треугольника (о соотношениях между сторонами и углами треугольника);
- метод четырехугольников (о четырехугольниках);
- метод площадей (о площади многоугольника);
- метод подобия треугольников (о подобных треугольниках);
- тригонометрический метод (о решении треугольников);
- метод окружностей (об окружности и ее элементах);
- метод геометрических преобразований (о геометрических преобразованиях на плоскости и в пространстве);
- графический метод (о геометрическом представлении элементарных функций).

Метод уравнений состоит из следующих приемов:

- прием, основанный на составлении и решении линейного уравнения («прием линейного уравнения») ;
- прием квадратного уравнения;
- прием рационального уравнения;
- прием системы двух линейных уравнений с двумя переменными и др.


Геометрическое решение негеометрических задач (систем уравнений)
Теорема Пифагора
Векторный способ
Формула расстояния между точками

Теорема Пифагора

1. Из условий $x^2 + y^2 = 9$, $y^2 + z^2 = 16$ и $y^2 = xz$ для положительных x, y, z, не вычисляя их значений, укажите значение выражения $xy + yz$.

Решение. Решить систему уравнений $\begin{cases} x^2 + y^2 = 9 \\ y^2 + z^2 = 16 \\ y^2 = xz \end{cases}$ нетрудно.

Так как $x > 0$, $y > 0$ и $z > 0$, то задачу можно интерпретировать геометрически.

По теореме, обратной теореме Пифагора, числа x, y и 3 являются длинами соответственно катетов и гипотенузы треугольника ABD (угол D прямой).

Тогда, рассмотрев второе уравнение системы, можно сделать вывод, что y, z и 4 являются соответственно длинами катетов и гипотенузы треугольника BCD с прямым углом D (рис. 1.1).

Третье уравнение системы разрешает утверждать, что число y есть среднее пропорциональное чисел x и z. Тогда по теореме, обратной теореме о пропорциональных отрезках в прямоугольном треугольнике, угол ABC прямой (рис. 1.2).

Теперь, чтобы ответить на главный вопрос задачи, рассмотрим выражение $xy + yz$.

$$xy + yz = (x + z) \cdot y =$$
$$= 2S_{\triangle ABC} = 3 \cdot 4 = 12.$$

Ответ. 12.

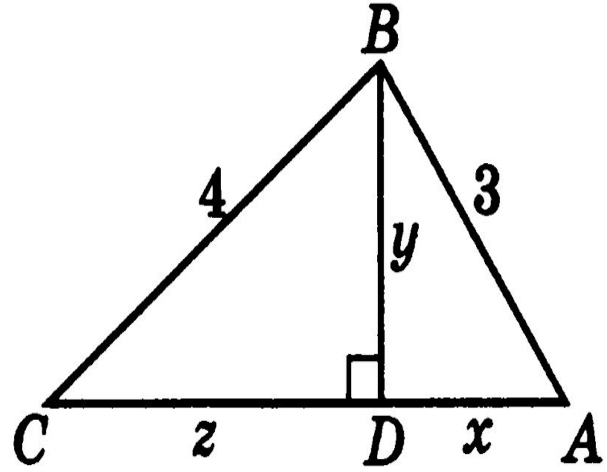


Рис. 1.1

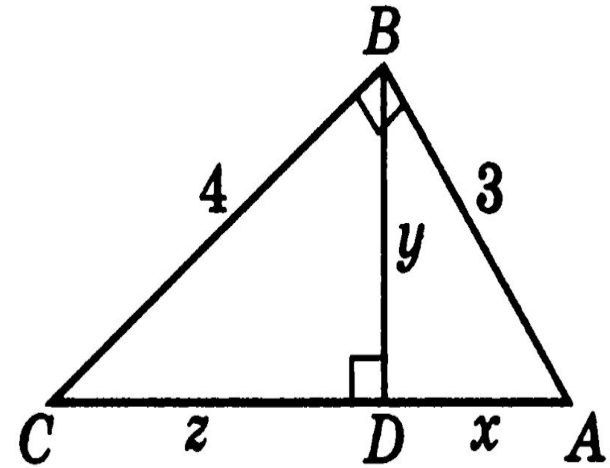


Рис. 1.2

2. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y\sqrt{x^2-y^2}=48 \\ x+y+\sqrt{x^2-y^2}=24. \end{cases}$$

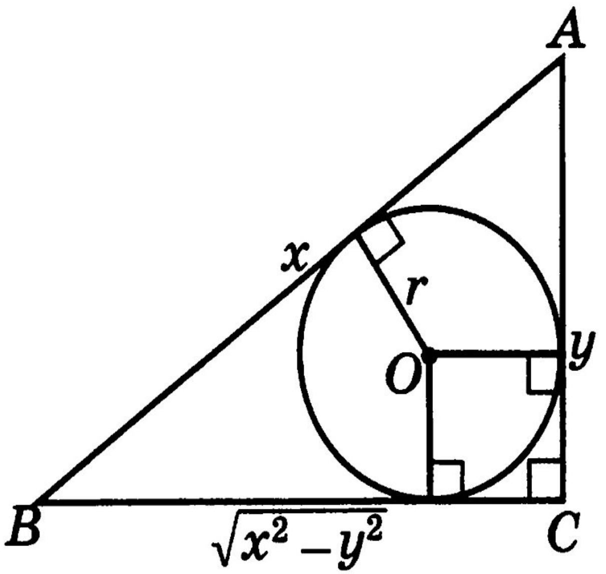


Рис. 1.8

Решение. Нетрудно убедиться, что x и y положительны.

Так как $y^2+(\sqrt{x^2-y^2})^2=x^2$, то числа y, $\sqrt{x^2-y^2}$ и x являются длинами соответственно катетов и гипотенузы треугольника ABC с прямым углом ACB (рис. 1.8).

Площадь этого треугольника 24 кв. ед., а его периметр 24 лин. ед. Тогда радиус окружности, вписанной в треугольник ABC, равен 2. Так как длина гипотенузы AB равна сумме длин катетов AC и BC без удвоенной длины радиуса вписанной в этот треугольник окружности, то $x=y+\sqrt{x^2-y^2}-4$.

Из второго уравнения системы получаем $x=10$. Значит, $y=6$ или $y=8$.

Ответ. (10; 6), (10; 8).

Векторный способ

1. Решите систему уравнений $\begin{cases} x + y + z = 3 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 3. \end{cases}$

Решение.

Первый способ. Уравнение $x + y + z = 3$ есть уравнение плоскости (рис. 1.10), пересекающей оси прямоугольной декартовой системы координат в точках A (3; 0; 0), B (0; 3; 0), C (0; 0; 3).

Уравнение $x^2 + y^2 + z^2 = 3$ есть уравнение сферы с центром в точке O (0; 0; 0) и радиусом R, равным $\sqrt{3}$.

Вычислим расстояние от точки O до плоскости ABC. Для этого рассмотрим тетраэдр $OABC$.

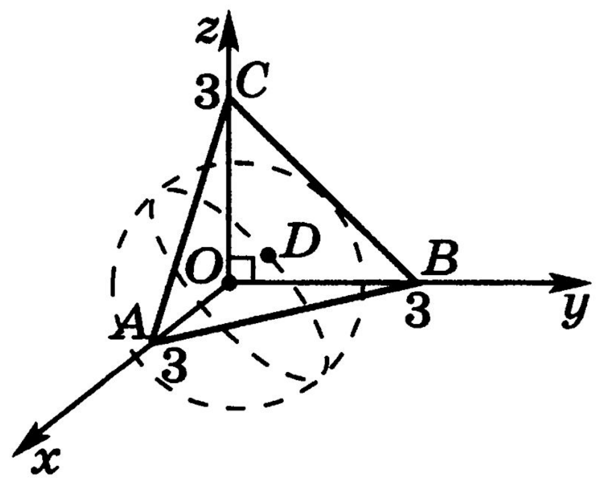


Рис. 1.10

Объем V тетраэдра равен $\frac{1}{3} S_{\triangle ABC} \cdot H$, где $H = OD$ (D — центр треугольника ABC), т. е.

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{(3\sqrt{2})^2 \sqrt{3}}{4} \cdot H = \frac{3H\sqrt{3}}{2}.$$

Объем тетраэдра может быть подсчитан иначе: $\frac{1}{3} S_{\triangle OAB} \cdot CO$, т. е. $V = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 3^2 \cdot 3 = \frac{9}{2}$. Приравняв $\frac{3H\sqrt{3}}{2}$ и $\frac{9}{2}$, получаем $H = \sqrt{3}$. Это означает, что расстояние от точки O до плоскости ABC равно радиусу сферы, т. е. плоскость касается сферы. Следовательно, точка касания является центром треугольника ABC.

Так как $D(x; y; z)$ — центр равностороннего треугольника ABC, где $A(3; 0; 0)$, $B(0; 3; 0)$, $C(0; 0; 3)$, то $x = y = z$.

Заменив y и z на x в уравнениях данной системы, получаем $x = 1$.

Второй способ. Рассмотрим $\vec{a}(x; y; z)$ и $\vec{b}(1; 1; 1)$.

$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{3}, \quad |\vec{b}| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3}.$

$\vec{a} \cdot \vec{b} = x \cdot 1 + y \cdot 1 + z \cdot 1 = 3$, $|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| = \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 3$, $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$.

Значит, $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$ и $\frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{1}$.

Ответ. (1; 1; 1).

Формула расстояния между точками

1. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 3x + 4y = 26 \\ \sqrt{x^2 + y^2 - 4x + 2y + 5} + \sqrt{x^2 + y^2 - 20x - 10y + 125} = 10. \end{cases}$$

Рассмотрим слагаемые левой части второго уравнения:

$$\sqrt{x^2 + y^2 - 4x + 2y + 5} = \sqrt{(x-2)^2 + (y+1)^2}.$$

Пусть это — расстояние между точками $M\,(x;\,y)$ и $A\,(2;\,-1)$.

$$\sqrt{x^2 + y^2 - 20x - 10y + 125} = \sqrt{(x-10)^2 + (y-5)^2}.$$

Пусть это — расстояние между точками $M\,(x;\,y)$ и $B\,(10;\,5)$.

Расстояние между точками $A\,(2;\,-1)$ и $B\,(10;\,5)$ подсчитаем: $AB = \sqrt{(10-2)^2 + (5+1)^2} = 10$.

Итак, второе уравнение системы можно интерпретировать как $AM + BM = AB$, что дает нам право утверждать: $M \in AB$, причем точка M принадлежит отрезку AB, т. е. $2 \leqslant x \leqslant 10$ и $-1 \leqslant y \leqslant 5$.

Составим уравнение прямой AB, проходящей через точки $A\,(2;\,-1)$ и $B\,(10;\,5)$: $-1 = k \cdot 2 + b$ и $5 = k \cdot 10 + b$. Отсюда $k = \frac{3}{4}$, $b = -\frac{5}{2}$, т. е. $y = \frac{3}{4}x - \frac{5}{2}$ или $3x - 4y = 10$. Теперь

$\begin{cases} 3x + 4y = 26 \\ 3x - 4y = 10. \end{cases}$ Значит, $x = 6$ и $y = 2$.

Ответ. $(6;\,2)$.

2. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x^2+y^2-14x-10y+58=0 \\ \sqrt{x^2+y^2-16x-12y+100}+\sqrt{x^2+y^2+4x-20y+104}=2\sqrt{29}. \end{cases}$$

Решение.

Первый способ. Если в задаче 1 можно было выразить, например, y через x из первого уравнения и затем, подставив во второе уравнение это выражение, решить второе уравнение как иррациональное, то в данном случае такой прием трудоемок.

Геометрическая интерпретация второго уравнения (см. задачу 1) приведет нас к решению системы

$$\begin{cases} x^2+y^2-14x-10y+58=0 \\ y=-\dfrac{2}{5}x+\dfrac{46}{5} \end{cases}$$

Второй способ. Этот способ включает в себя ту часть первого способа, в которой иррациональное уравнение заменяется на линейное.

Первое уравнение $x^2+y^2-14x-10y+58=0$ преобразуем в уравнение $(x-7)^2+(y-5)^2=16$.

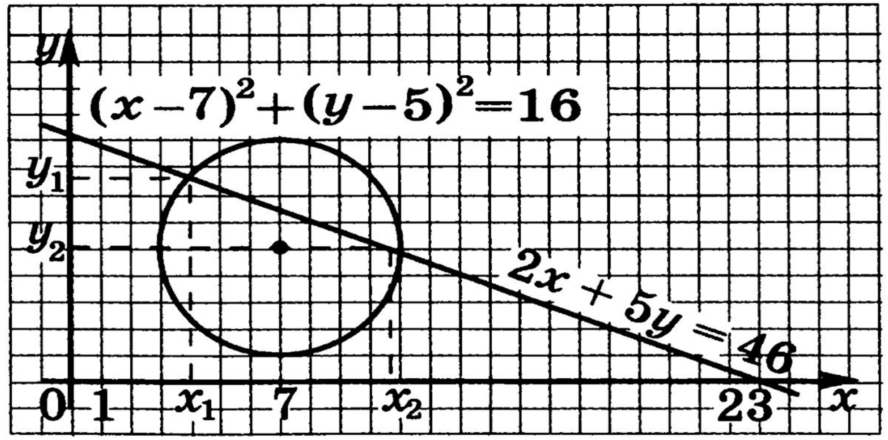


Рис. 1.11

Получилась система $\begin{cases}(x-7)^2+(y-5)^2=16\\ 2x+5y=46.\end{cases}$

Первое уравнение — это уравнение окружности с центром в точке (7; 5) и радиусом 4. Второе уравнение — это уравнение прямой, проходящей через точки (23; 0) и $\left(0;\ \frac{46}{5}\right)$. **Взаимное расположение этих линий представлено на рисунке 1.11.**

Так как получились две точки пересечения, то исходная система имеет два решения: $(x_1;\ y_1)$ **и** $(x_2;\ y_2)$. **Следует, однако, заметить, что при таком способе решения числа** x_1 **и** y_1, x_2 **и** y_2 **мы находим «на глаз», т. е. приближенно. Поэтому их необходимо проверить по условию.**

Ответ. $(x_1;\ y_1)$, $(x_2;\ y_2)$.

Спасибо за внимание