

Геометрический метод решения систем уравнений

Метод - способ достижения какой-либо цели, решения конкретной задачи; совокупность приемов или операций практического или теоретического освоения (познания) действительности.

Геометрический метод характеризуется как «метод, идущий от наглядных представлений» (А. Д. Александров), «метод геометрической наглядности» (Г. Фройденталь).

Существенными признаками этого понятия являются геометрические (наглядные) представления и законы геометрии, в которых отражены свойства геометрических фигур.

Геометрический метод будем понимать как способ познавательной деятельности, основанный на системе геометрических знаний и на геометрических (наглядных) представлениях.

Геометрические методы:

- метод длин (свойства длины отрезка);
- метод треугольников (система знаний о треугольниках);
- метод параллельных прямых (о параллельных прямых);
- метод соотношения между сторонами и углами треугольника (о соотношениях между сторонами и углами треугольника);
- метод четырехугольников (о четырехугольниках);
- метод площадей (о площади многоугольника);
- метод подобия треугольников (о подобных треугольниках);
- тригонометрический метод (о решении треугольников);
- метод окружностей (об окружности и ее элементах);
- метод геометрических преобразований (о геометрических преобразованиях на плоскости и в пространстве);
- графический метод (о геометрическом представлении элементарных функций).

Метод уравнений состоит из следующих приемов:

- ✓ прием, основанный на составлении и решении линейного уравнения («прием линейного уравнения»);
- ✓ прием квадратного уравнения;
- ✓ прием рационального уравнения;
- ✓ прием системы двух линейных уравнений с двумя переменными и др.

Геометрическое решение негеометрических задач (систем уравнений)

Теорема
Пифагора

Векторный
способ

Формула
расстояния
между
точками

Теорема Пифагора

1. Из условий $x^2 + y^2 = 9$, $y^2 + z^2 = 16$ и $y^2 = xz$ для положительных x , y , z , не вычисляя их значений, укажите значение выражения $xu + uz$.

Решение. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 9 \\ y^2 + z^2 = 16 \\ y^2 = xz \end{cases}$$

нетрудно.

Так как $x > 0$, $y > 0$ и $z > 0$, то задачу можно интерпретировать геометрически.

По теореме, обратной теореме Пифагора, числа x , y и z являются длинами соответственно катетов и гипотенузы треугольника ABD (угол D прямой).

Тогда, рассмотрев второе уравнение системы, можно сделать вывод, что y , z и 4 являются соответственно

длинами катетов и гипотенузы треугольника $BСD$ с прямым углом D (рис. 1.1).

Третье уравнение системы разрешает утверждать, что число y есть среднее пропорциональное чисел x и z . Тогда по теореме, обратной теореме о пропорциональных отрезках в прямоугольном треугольнике, угол ABC прямой (рис. 1.2).

Теперь, чтобы ответить на главный вопрос задачи, рассмотрим выражение $xy + yz$.

$$\begin{aligned} xy + yz &= (x + z) \cdot y = \\ &= 2S_{\triangle ABC} = 3 \cdot 4 = 12. \end{aligned}$$

Ответ. 12.

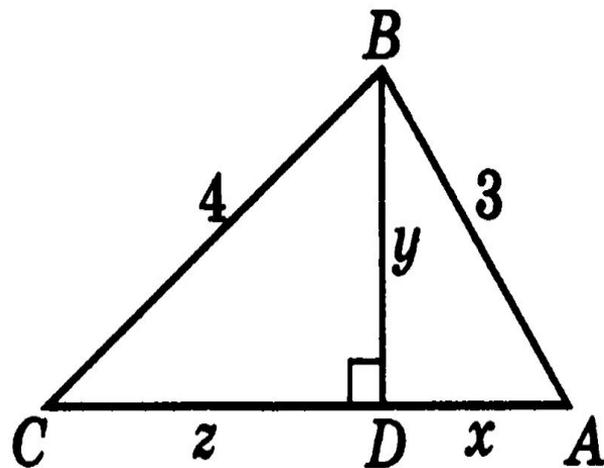


Рис. 1.1

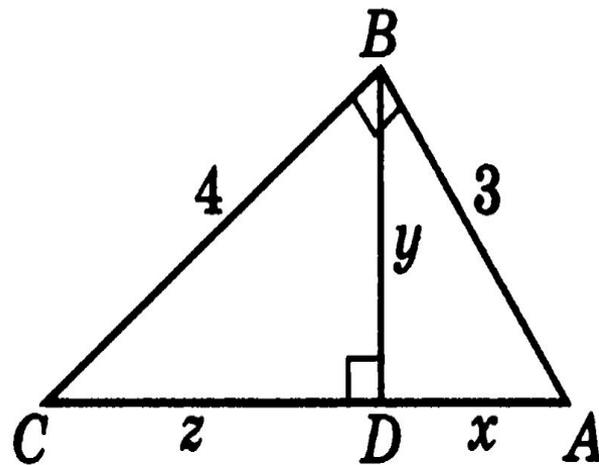


Рис. 1.2

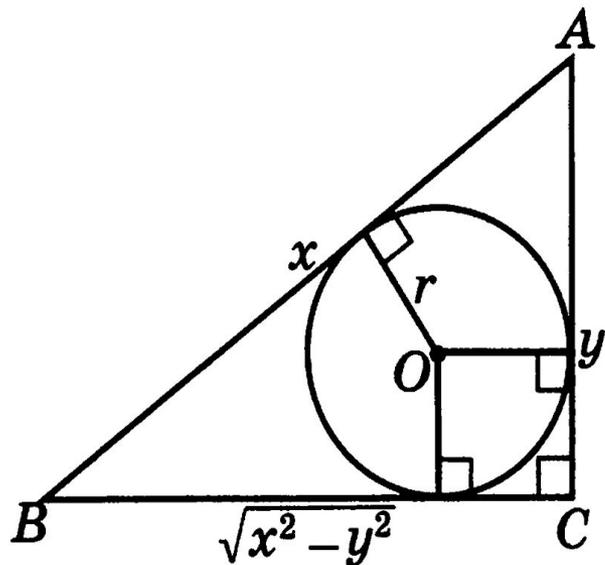


Рис. 1.8

Площадь этого треугольника 24 кв. ед., а его периметр 24 лин. ед. Тогда радиус окружности, вписанной в треугольник ABC , равен 2. Так как длина гипотенузы AB равна сумме длин катетов AC и BC без удвоенной длины радиуса вписанной в этот треугольник окружности, то $x = y + \sqrt{x^2 - y^2} - 4$.

Из второго уравнения системы получаем $x = 10$. Значит, $y = 6$ или $y = 8$.

Ответ. (10; 6), (10; 8).

2. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y\sqrt{x^2 - y^2} = 48 \\ x + y + \sqrt{x^2 - y^2} = 24. \end{cases}$$

Решение. Нетрудно убедиться, что x и y положительны.

Так как $y^2 + (\sqrt{x^2 - y^2})^2 = x^2$, то числа y , $\sqrt{x^2 - y^2}$ и x являются длинами соответственно катетов и гипотенузы треугольника ABC с прямым углом ACB (рис. 1.8).

Векторный способ

1. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 3. \end{cases}$$

Решение.

Первый способ. Уравнение $x + y + z = 3$ есть уравнение плоскости (рис. 1.10), пересекающей оси прямоугольной декартовой системы координат в точках $A(3; 0; 0)$, $B(0; 3; 0)$, $C(0; 0; 3)$.

Уравнение $x^2 + y^2 + z^2 = 3$ есть уравнение сферы с центром в точке $O(0; 0; 0)$ и радиусом R , равным $\sqrt{3}$.

Вычислим расстояние от точки O до плоскости ABC . Для этого рассмотрим тетраэдр $OABC$.

Объем V тетраэдра равен $\frac{1}{3} S_{\triangle ABC} \cdot H$, где $H = OD$ (D — центр треугольника ABC), т. е.

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{(3\sqrt{2})^2 \sqrt{3}}{4} \cdot H = \frac{3H\sqrt{3}}{2}.$$

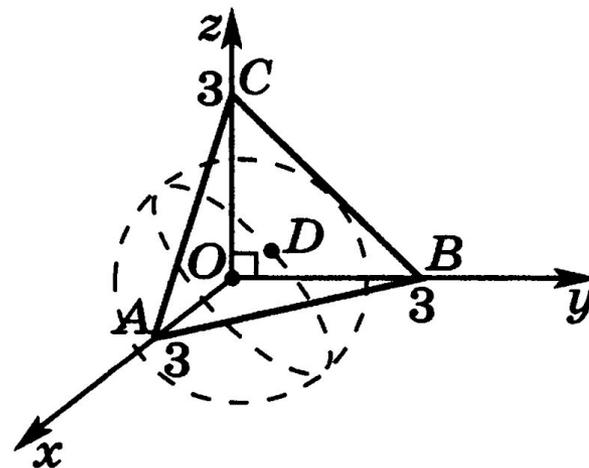


Рис. 1.10

Объем тетраэдра может быть подсчитан иначе:
 $\frac{1}{3} S_{\Delta OAB} \cdot CO$, т. е. $V = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 3^2 \cdot 3 = \frac{9}{2}$. Приравняв $\frac{3H\sqrt{3}}{2}$ и $\frac{9}{2}$,
получаем $H = \sqrt{3}$. Это означает, что расстояние от точки O
до плоскости ABC равно радиусу сферы, т. е. плоскость ка-
сается сферы. Следовательно, точка касания является цен-
тром треугольника ABC .

Так как $D(x; y; z)$ — центр равностороннего тре-
угольника ABC , где $A(3; 0; 0)$, $B(0; 3; 0)$, $C(0; 0; 3)$, то
 $x = y = z$.

Заменив y и z на x в уравнениях данной системы, полу-
чаем $x = 1$.

Второй способ. Рассмотрим $\vec{a}(x; y; z)$ и $\vec{b}(1; 1; 1)$.

$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{3}, \quad |\vec{b}| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3}.$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x \cdot 1 + y \cdot 1 + z \cdot 1 = 3, \quad |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| = \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 3,$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|.$$

$$\text{Значит, } \vec{a} \uparrow \uparrow \vec{b} \text{ и } \frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{1}.$$

Ответ. (1; 1; 1).

Формула расстояния между точками

1. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 3x + 4y = 26 \\ \sqrt{x^2 + y^2 - 4x + 2y + 5} + \sqrt{x^2 + y^2 - 20x - 10y + 125} = 10. \end{cases}$$

Рассмотрим слагаемые левой части второго уравнения:

$$\sqrt{x^2 + y^2 - 4x + 2y + 5} = \sqrt{(x - 2)^2 + (y + 1)^2}.$$

Пусть это — расстояние между точками $M(x; y)$ и $A(2; -1)$.

$$\sqrt{x^2 + y^2 - 20x - 10y + 125} = \sqrt{(x - 10)^2 + (y - 5)^2}.$$

Пусть это — расстояние между точками $M(x; y)$ и $B(10; 5)$.

Расстояние между точками $A(2; -1)$ и $B(10; 5)$ подсчитаем: $AB = \sqrt{(10 - 2)^2 + (5 + 1)^2} = 10$.

Итак, второе уравнение системы можно интерпретировать как $AM + BM = AB$, что дает нам право утверждать: $M \in AB$, причем точка M принадлежит отрезку AB , т. е. $2 \leq x \leq 10$ и $-1 \leq y \leq 5$.

Составим уравнение прямой AB , проходящей через точки $A(2; -1)$ и $B(10; 5)$: $-1 = k \cdot 2 + b$ и $5 = k \cdot 10 + b$. Отсюда $k = \frac{3}{4}$, $b = -\frac{5}{2}$, т. е. $y = \frac{3}{4}x - \frac{5}{2}$ или $3x - 4y = 10$. Теперь

$$\begin{cases} 3x + 4y = 26 \\ 3x - 4y = 10. \end{cases} \text{ Значит, } x = 6 \text{ и } y = 2.$$

Ответ. (6; 2).

2. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 14x - 10y + 58 = 0 \\ \sqrt{x^2 + y^2 - 16x - 12y + 100} + \sqrt{x^2 + y^2 + 4x - 20y + 104} = 2\sqrt{29}. \end{cases}$$

Решение.

Первый способ. Если в задаче 1 можно было выразить, например, y через x из первого уравнения и затем, подставив во второе уравнение это выражение, решить второе уравнение как иррациональное, то в данном случае такой прием трудоемок.

Геометрическая интерпретация второго уравнения (см. задачу 1) приведет нас к решению системы

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 14x - 10y + 58 = 0 \\ y = -\frac{2}{5}x + \frac{46}{5} \end{cases}$$

Второй способ. Этот способ включает в себя ту часть первого способа, в которой иррациональное уравнение заменяется на линейное.

Первое уравнение $x^2 + y^2 - 14x - 10y + 58 = 0$ преобразуем в уравнение $(x - 7)^2 + (y - 5)^2 = 16$.

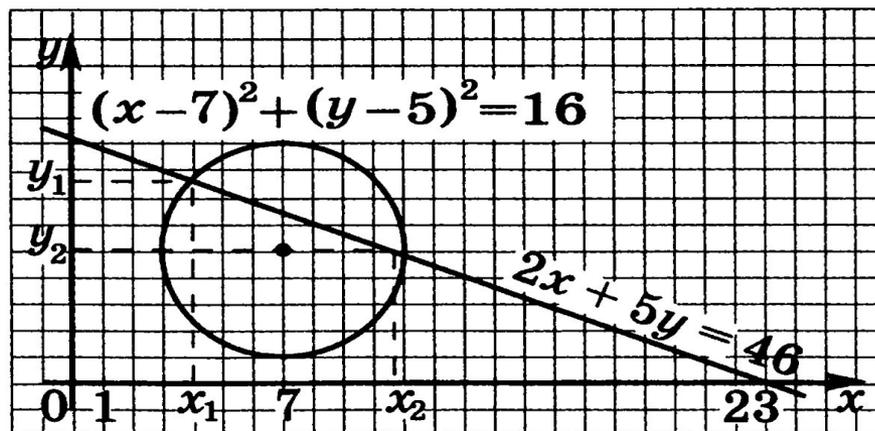


Рис. 1.11

Получилась система
$$\begin{cases} (x-7)^2 + (y-5)^2 = 16 \\ 2x + 5y = 46. \end{cases}$$

Первое уравнение — это уравнение окружности с центром в точке (7; 5) и радиусом 4. Второе уравнение — это уравнение прямой, проходящей через точки (23; 0) и $(0; \frac{46}{5})$. Взаимное расположение этих линий представлено на рисунке 1.11.

Так как получились две точки пересечения, то исходная система имеет два решения: $(x_1; y_1)$ и $(x_2; y_2)$. Следует, однако, заметить, что при таком способе решения числа x_1 и y_1 , x_2 и y_2 мы находим «на глаз», т. е. приближенно. Поэтому их необходимо проверить по условию.

Ответ. $(x_1; y_1), (x_2; y_2)$.



Спасибо за внимание