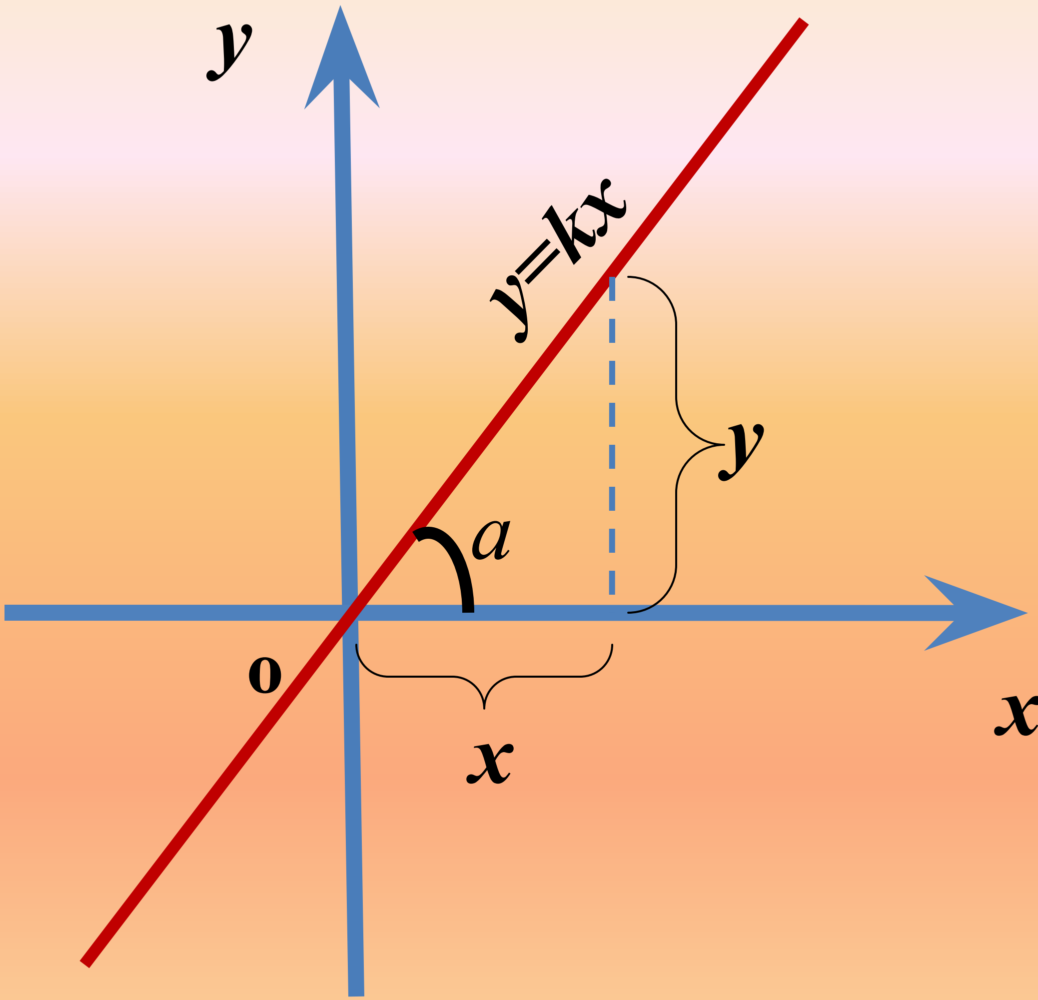
Геометрический смысл производной

Учитель : Потеряйкина О.Н.
МОУ СОШ №68
г.Хабаровск

Готфрид Вильгельм фон Лейбниц

1646г – 1716г

Геометрическая интерпретация производной, впервые данная в конце $XVII$ в. Лейбницем, который основываясь на результатах Ферма и некоторых других выводах, значительно полнее своих предшественников

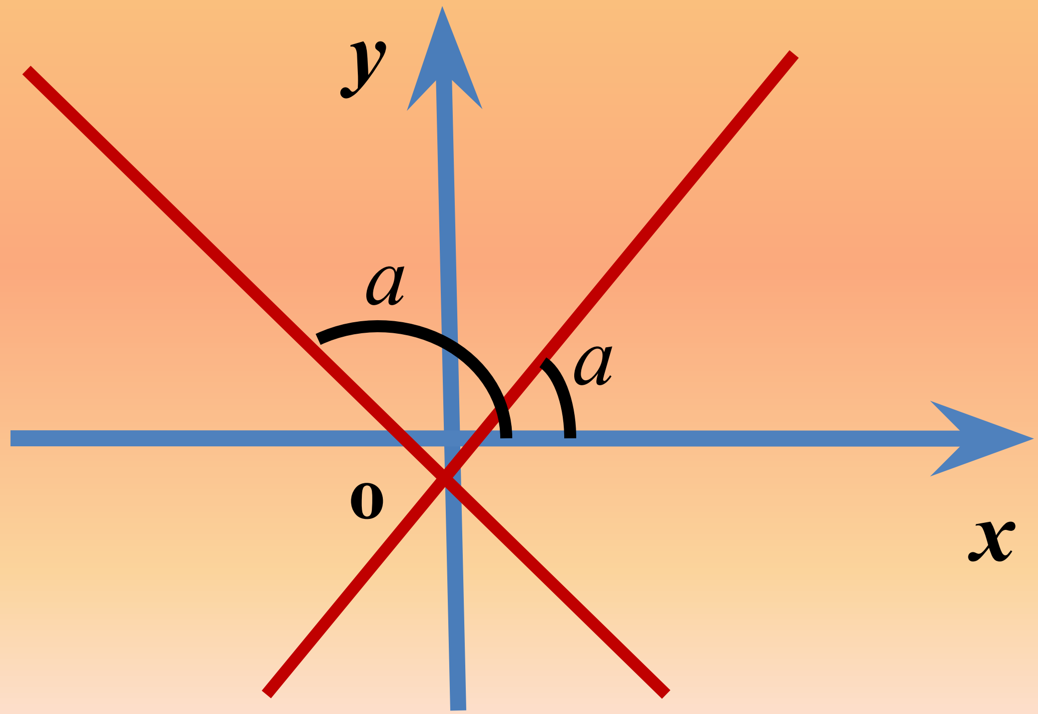


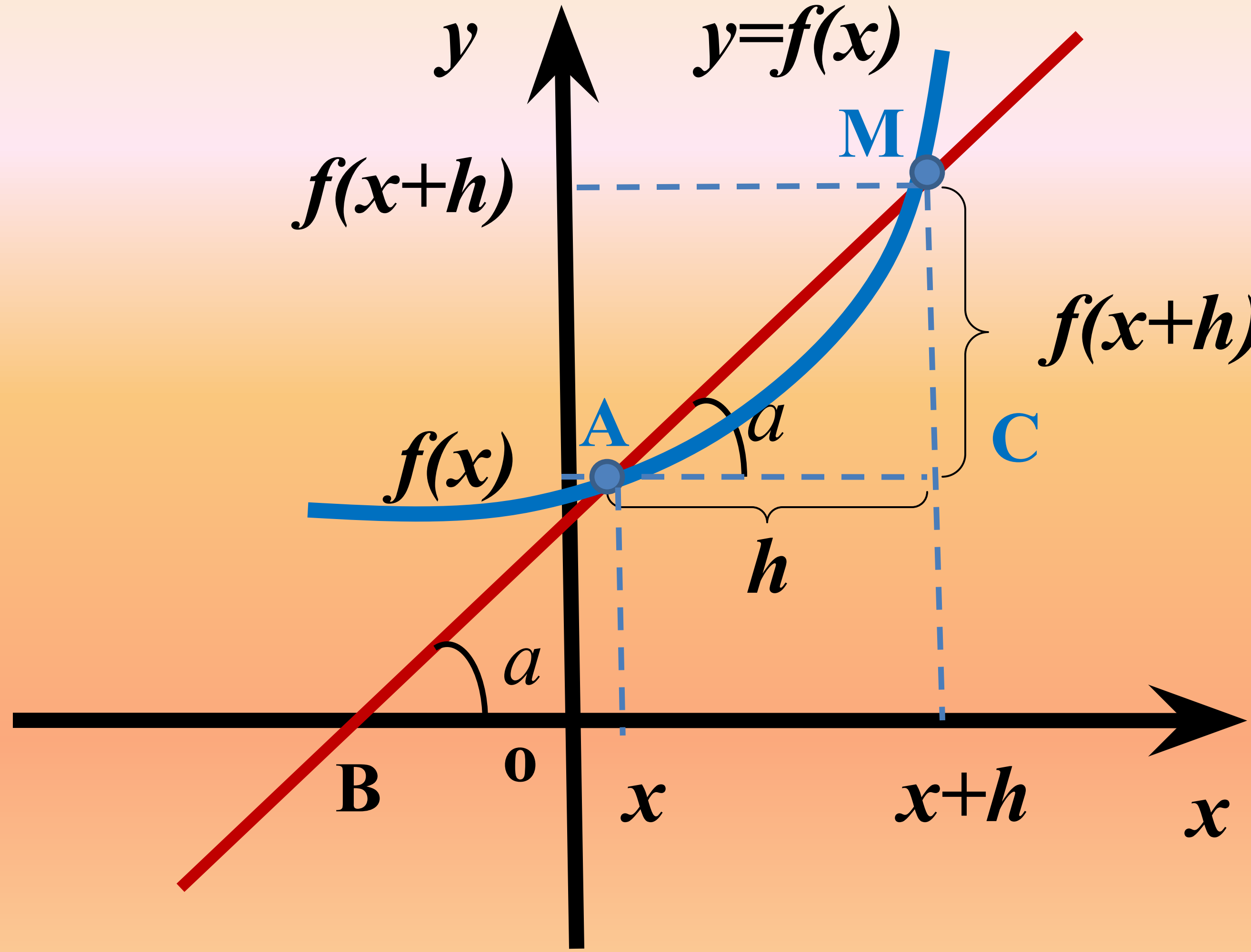
$$k = \frac{y}{x} = \frac{\textit{противолежащий катет}}{\textit{прилежащий катет}} = tg\ a$$

$$k = tg\ a$$

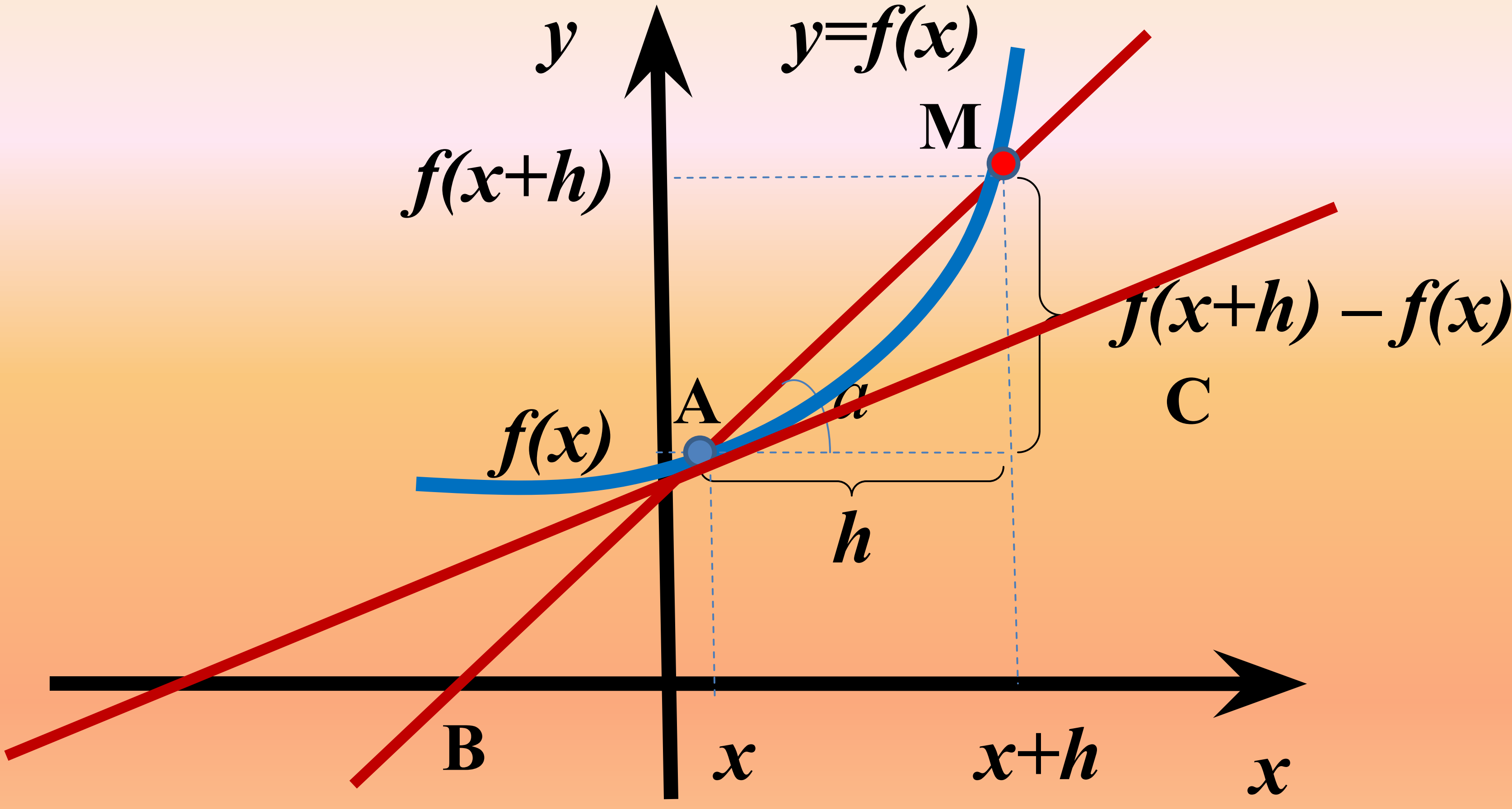
***k* – угловой коэффициент прямой**

***a* –угол между прямой и положительным направлением оси абсцисс**





$$k(h) = tg < MAC = \frac{MC}{AC} = \frac{f(x+h) - f(x)}{x+h - x}$$



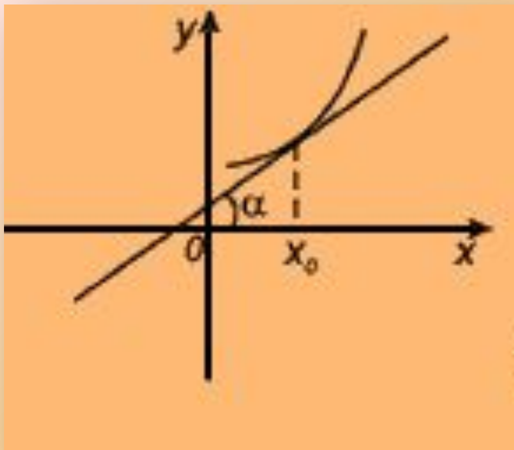
Если h ⟶ 0, тогда M ⟶ A

Прямая MA стремиться занять положение некоторой прямой, которую называют касательной к графику функции y=f(x)

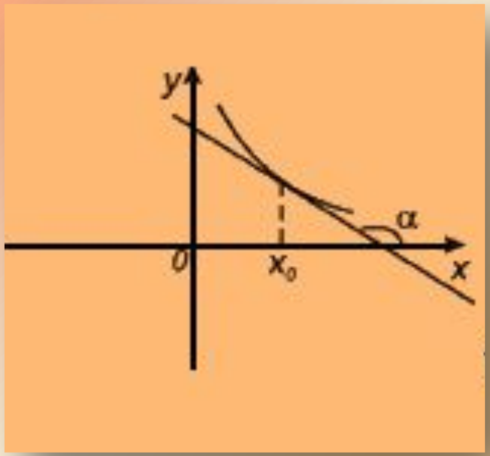
$$\lim_{h \to 0} k(h) \quad \frac{f(x+h) - f(x)}{x+h-x} = f'(x)$$

$$\boxed{k = tg\, a = f'(x)}$$

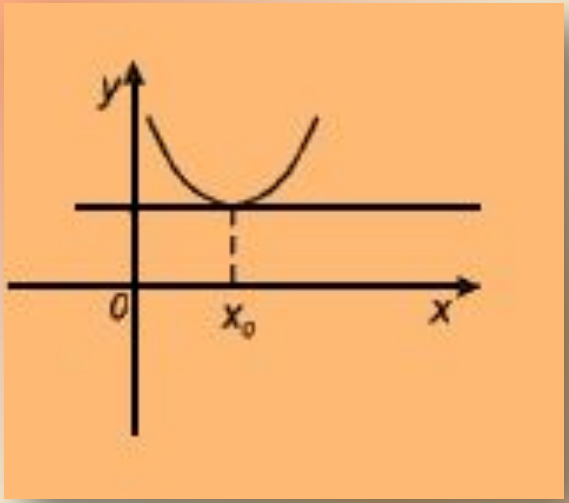
Значение производной в точке равно угловому коэффициенту касательной к графику функции в этой точке



$k = tga = f'(x\ ) > 0$



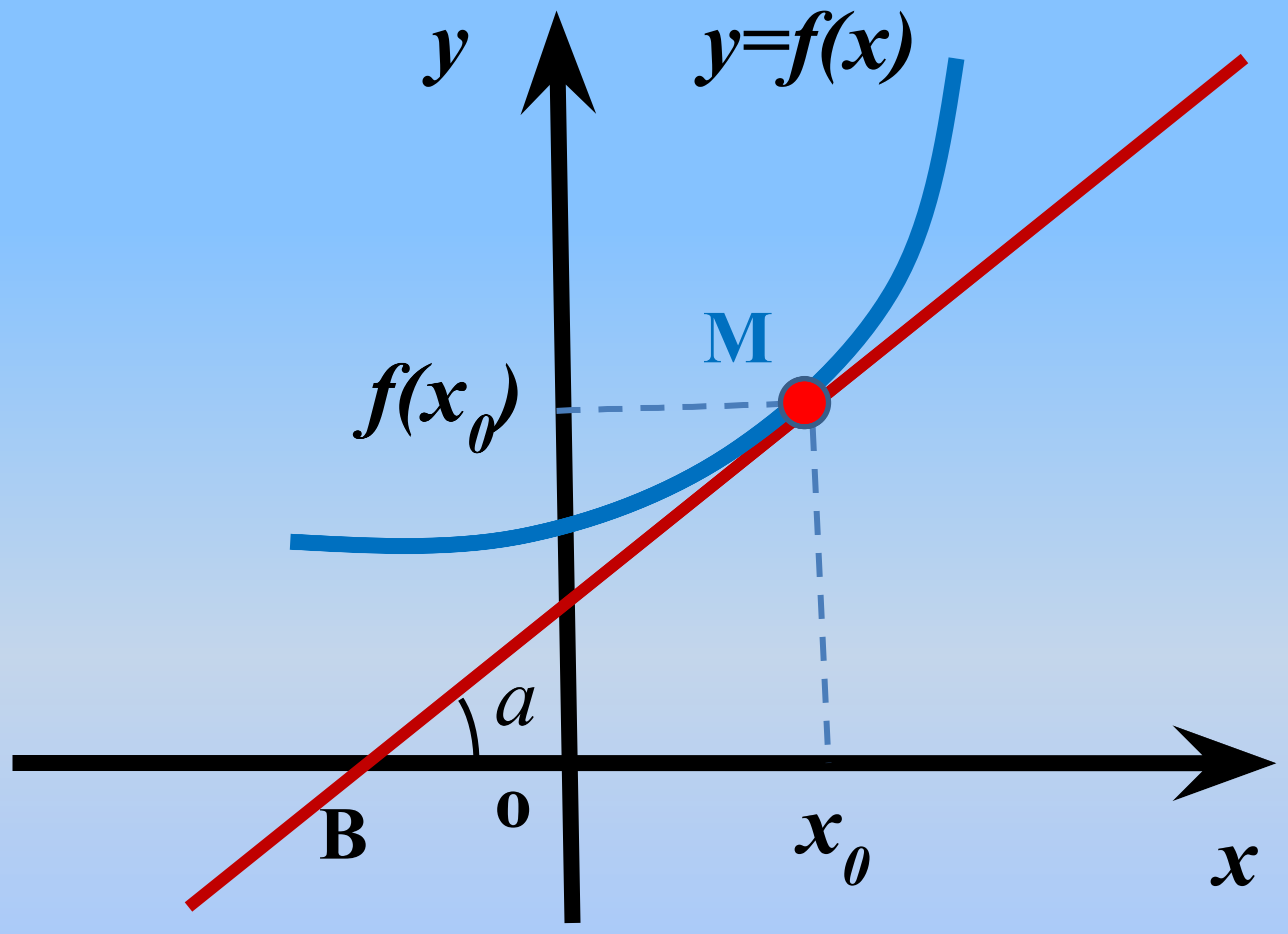
$k = tga = f'(x\ ) < 0$



$k = tga = f'(x\ ) = 0$

Если угол наклона прямой, то тангенс не существует, а значит, производная не существует.

Выведем уравнение касательной к графику дифференцированной функции в точке (x_0; $f(x_0)$)



$$y = kx + b \qquad (1)$$

$$\boxed{k = tg\, a = f'(x)} \rightarrow$$

$$y = f'(x_0)x + b \qquad (2)$$

Т.к. касательная проходит через точку с координатами (x_0; $f(x_0)$) , подставим ее координаты в уравнение (2) и найдем b

$$f(x_0) = f'(x_0)x_0 + b \Longrightarrow b = f(x_0) - f'(x_0)x_0$$

Подставьте в уравнение (2) значение b и сделав соответствующие преобразования получите:

$$\boxed{y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)}$$

Алгоритм
нахождения уравнения касательной к графику функции $y=f(x)$ в точке с абсциссой x_0

1. $\underline{f(x_0)}$ – *находим значение функции в данной точке*
2. $\underline{f'(x)}$ – *находим производную данной функции*
3. $\underline{f'(x_0)}$ - *находим значение производной функции в данной точке*
4. *Подставляем данные в уравнение касательной к графику функции*

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$