

**В мире**

**МНОГОГРАННИКОВ**

**Не будь в природе твердых тел, не было бы и геометрии.**

**А Пуанкаре**

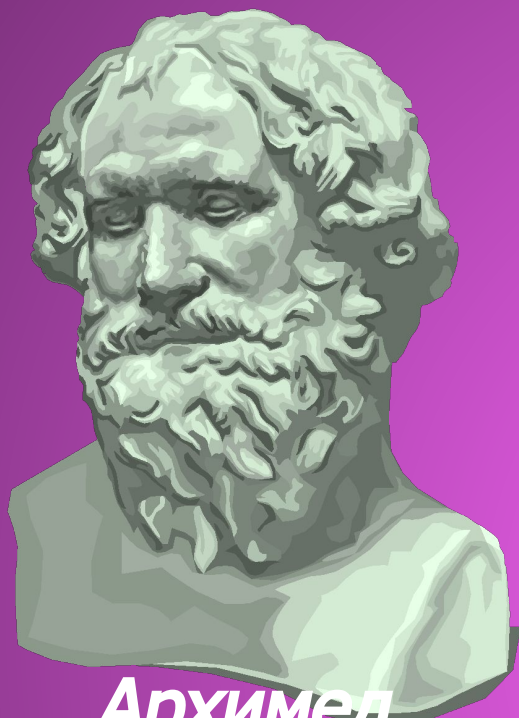
Эту презентацию я посвящаю увлекательному разделу геометрии – **теории многогранников**. Чем же привлекательны многогранники?

Они обладают богатой историей, которая связана с такими знаменитыми учеными древности, как

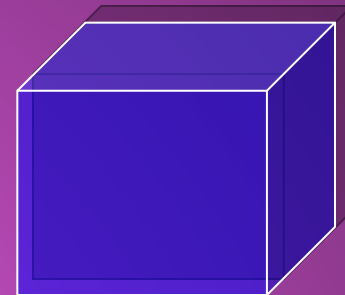
**Пифагор, Евклид, Архимед**. Многогранники

были известны в Древнем Египте и Вавилоне. В то же время теория многогранников – современный раздел математики, имеющий практическое приложение в алгебре, теории чисел, в естествознании, в областях прикладной математики.

Математика, в частности геометрия, представляет собой могущественный инструмент преобразования мира, в котором по словам Готфрида Харби, **» нет места для некрасивой математики.»**

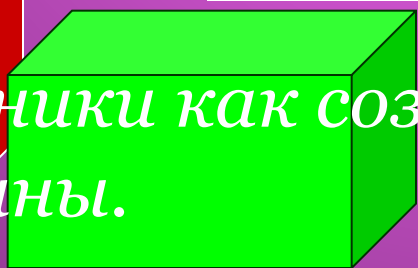
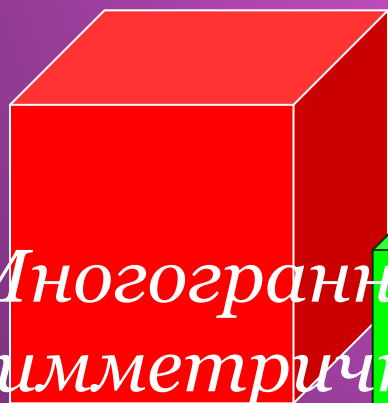


Архимед

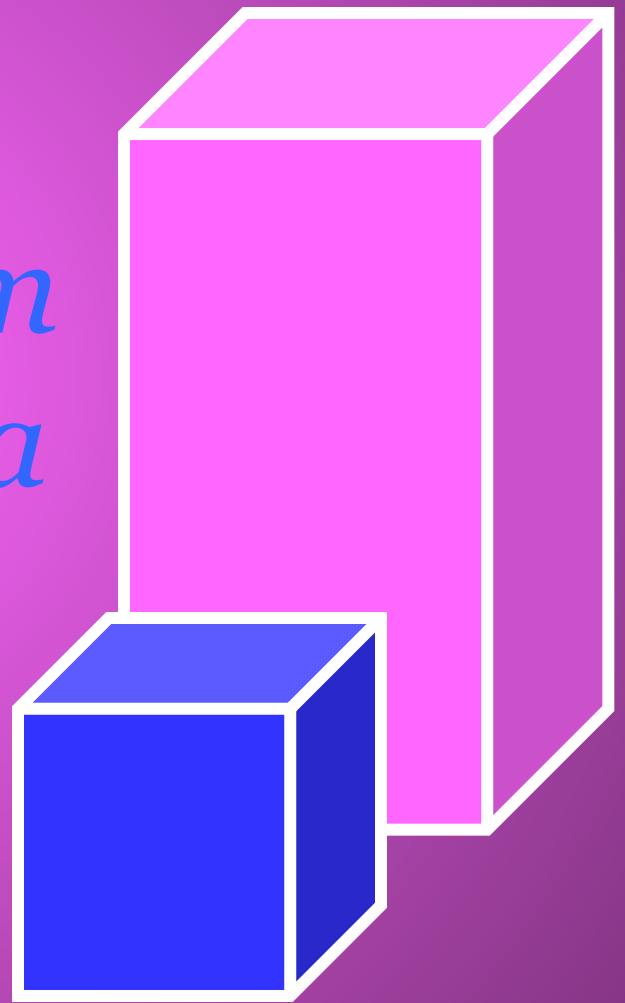


Понятие  
многогранника  
является одним  
из  
центральных в  
курсе  
стереометрии.

Многогранники как создания в природе красивы и симметричны.

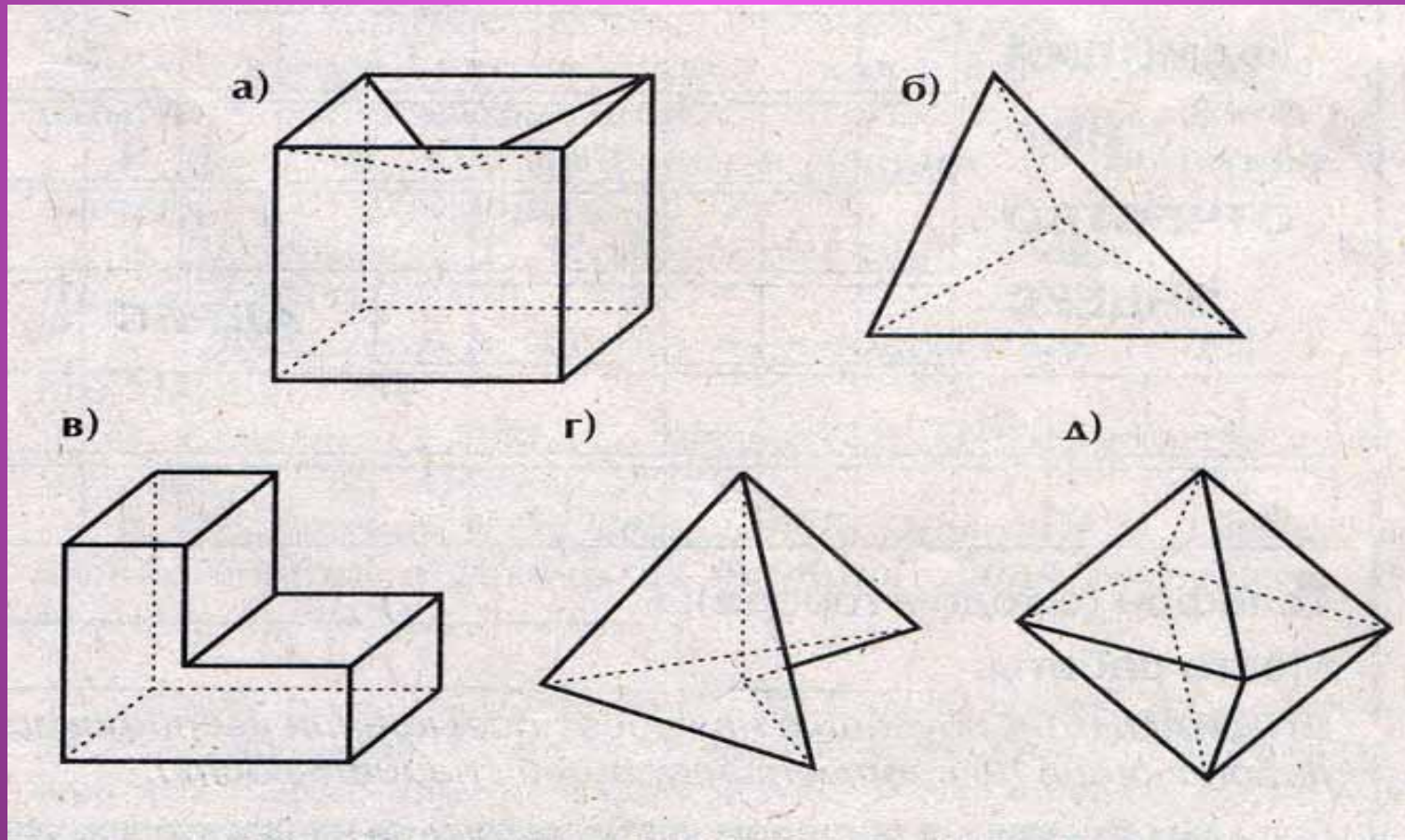


*Многогранник-  
это такое тело,  
поверхность  
которого состоит  
из конечного числа  
плоских  
многоугольников.*



# Многогранники

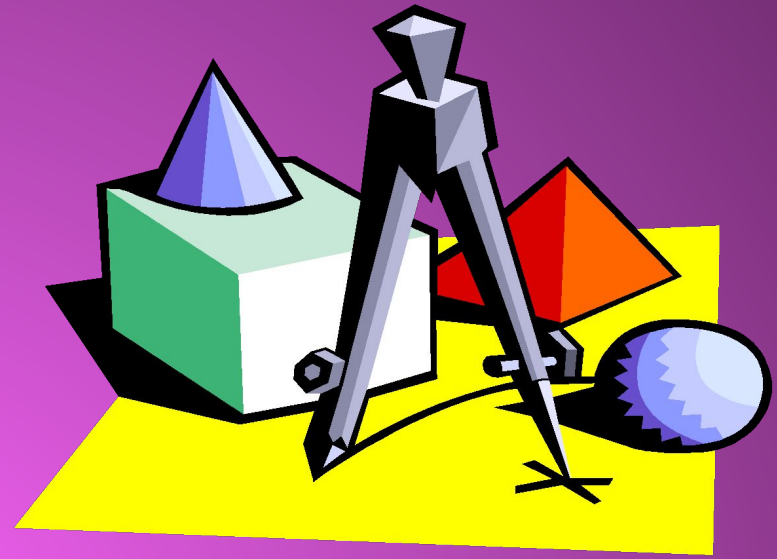
## выпуклые и невыпуклые



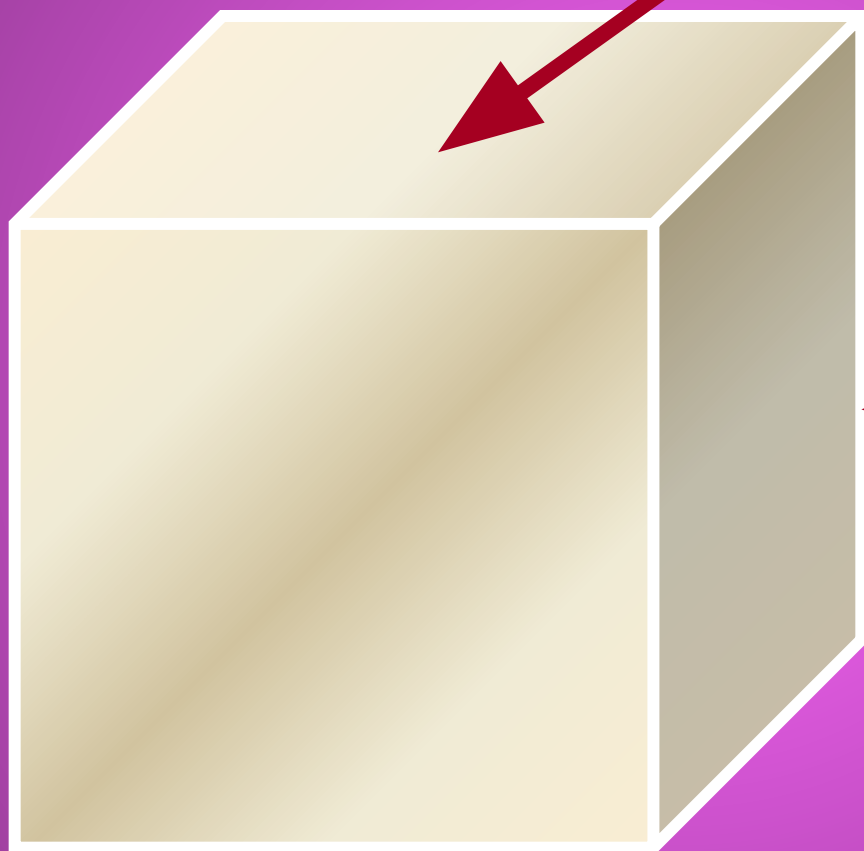
Определение.

- *Многогранник называется*

*выпуклым, если он расположен по одну сторону каждого плоского многоугольника на его поверхности.*



Пример.



Грань

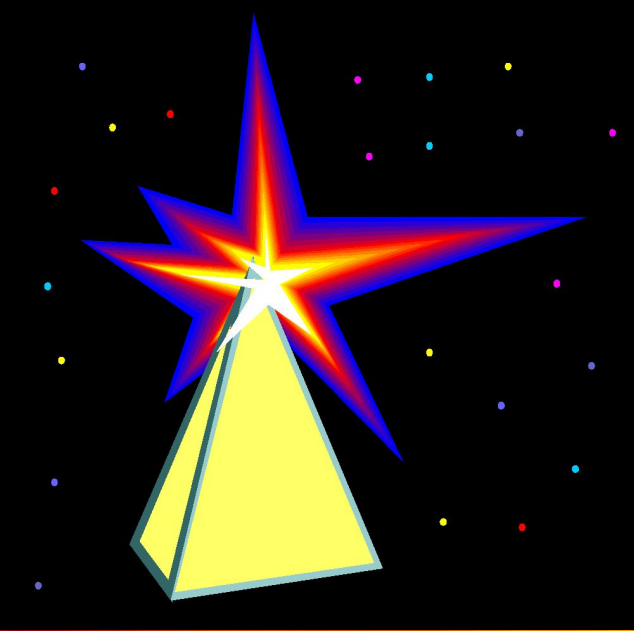
6

ребро

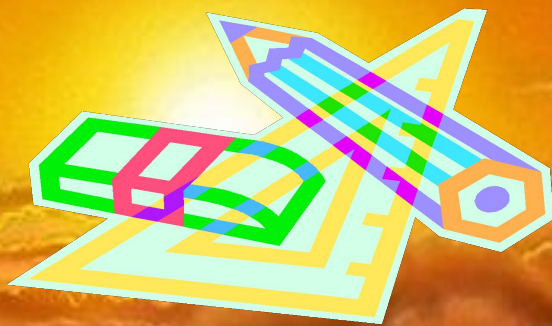
12

вершина

8



# Разновидности



# Многогранников



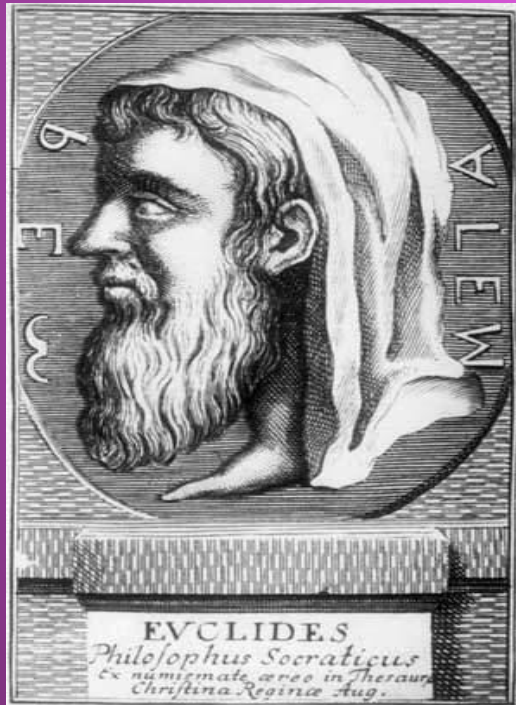
# Призма



*«Призма есть телесная фигура заключенная между плоскостями, из которых две противоположные равны и параллельны, остальные же – параллелограммы.»*

*Евклид*

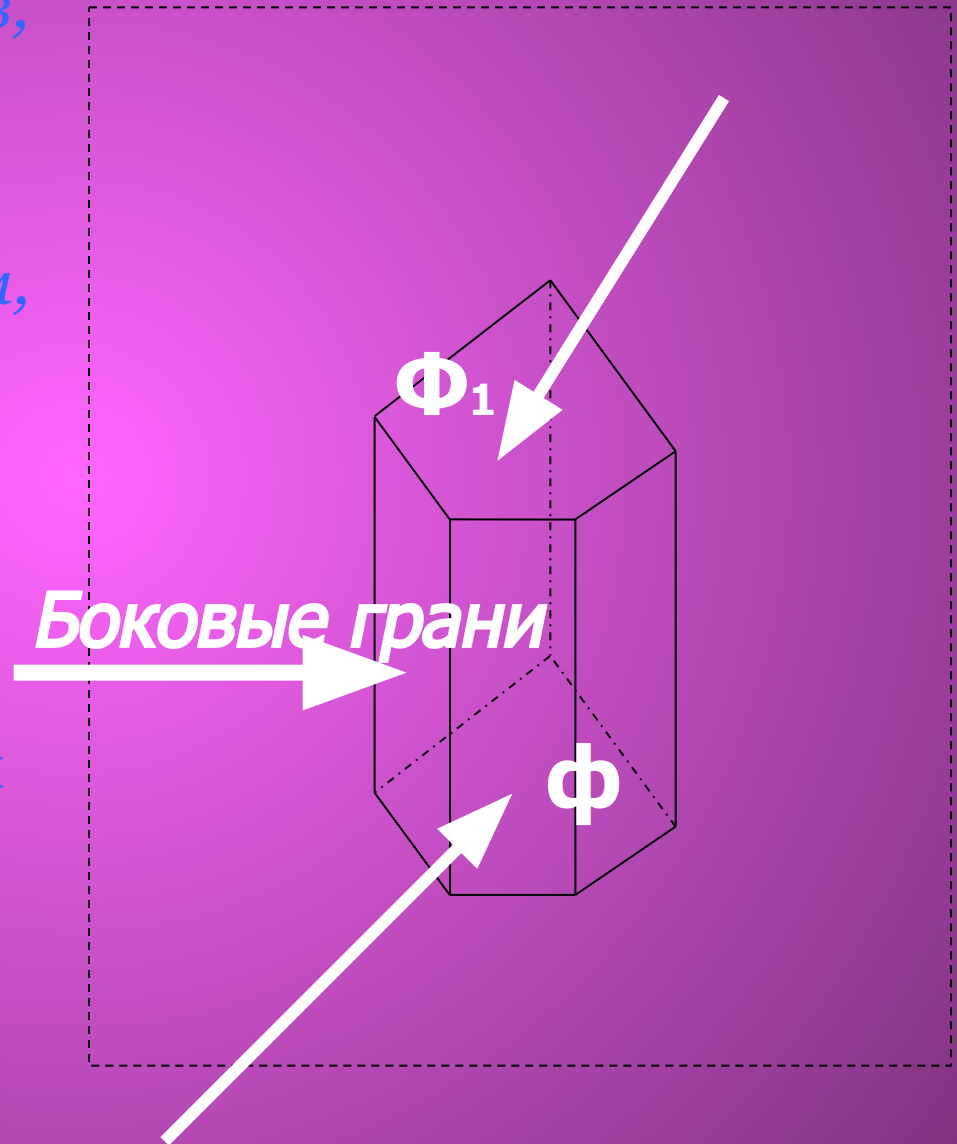
*Евклид ( предположительно 330- 277 до н.э. ) – математик Александрийской школы Древней Греции, автор первого дошедшего до нас трактата по математике «Начала» ( в 15 книгах )*



*В 18 веке Тейлор дал такое определение призмы - это многогранник, у которого все грани кроме двух, параллельны одной прямой.*



Призма-многогранник, который состоит из двух плоских многоугольников, лежащих в разных плоскостях и совмещаемых параллельным переносом, и всех отрезков, соединяющих соответствующие точки этих многоугольников. Многоугольники  $\Phi$  и  $\Phi_1$ , лежащие в параллельных плоскостях, называют основаниями призмы, а остальные грани - боковыми гранями.



Поверхность призмы, таким образом, состоит из двух равных многоугольников (оснований) и параллелограммов (боковых граней). Различают призмы треугольные, четырехугольные, пятиугольные и т.д. в зависимости от числа вершин основания.

Если боковое ребро призмы перпендикулярно плоскости ее основания, то такую призму называют прямой; если боковое ребро призмы не перпендикулярно плоскости ее основания, то такую призму называют наклонной. У прямой призмы боковые грани - прямоугольники.



а



б



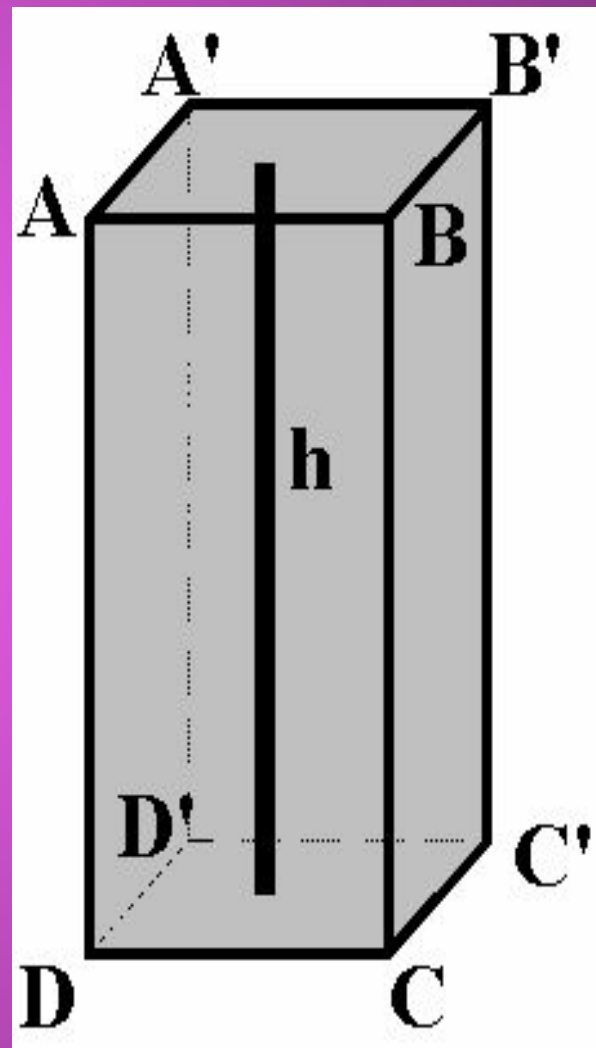
в



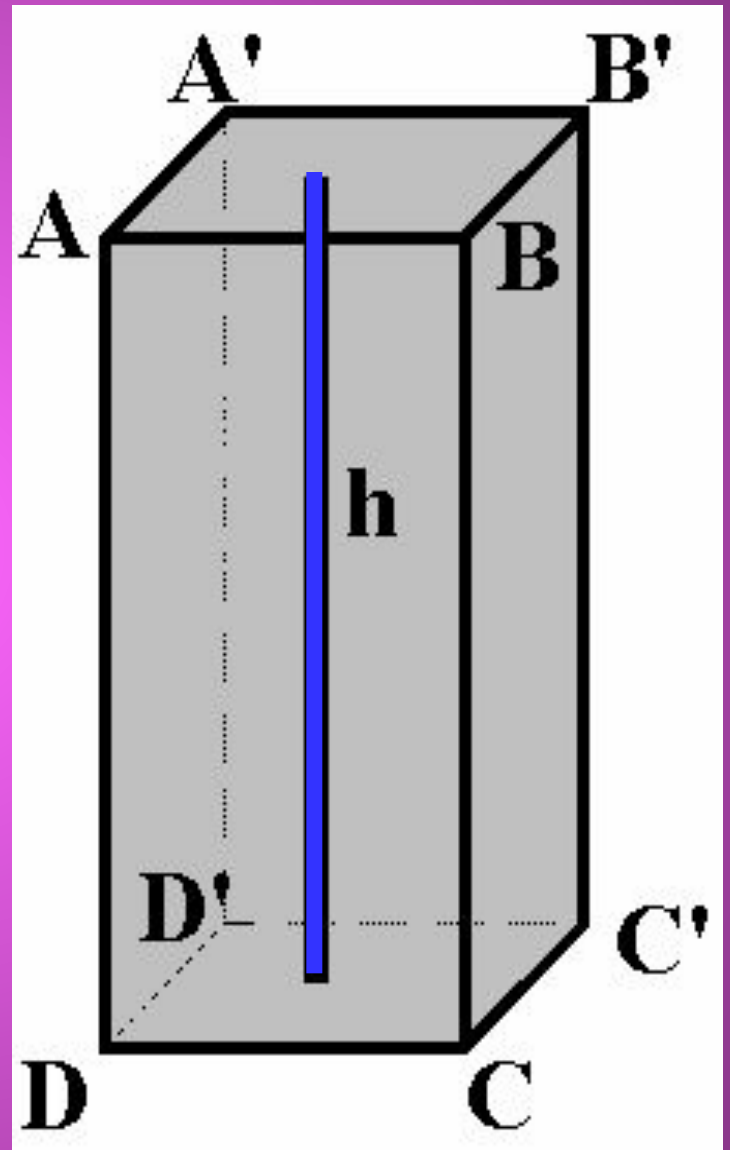
г

# Свойства призмы :

- Основания призмы равны .
- У призмы основания лежат в параллельных плоскостях.
- У призмы боковые ребра параллельны и равны.



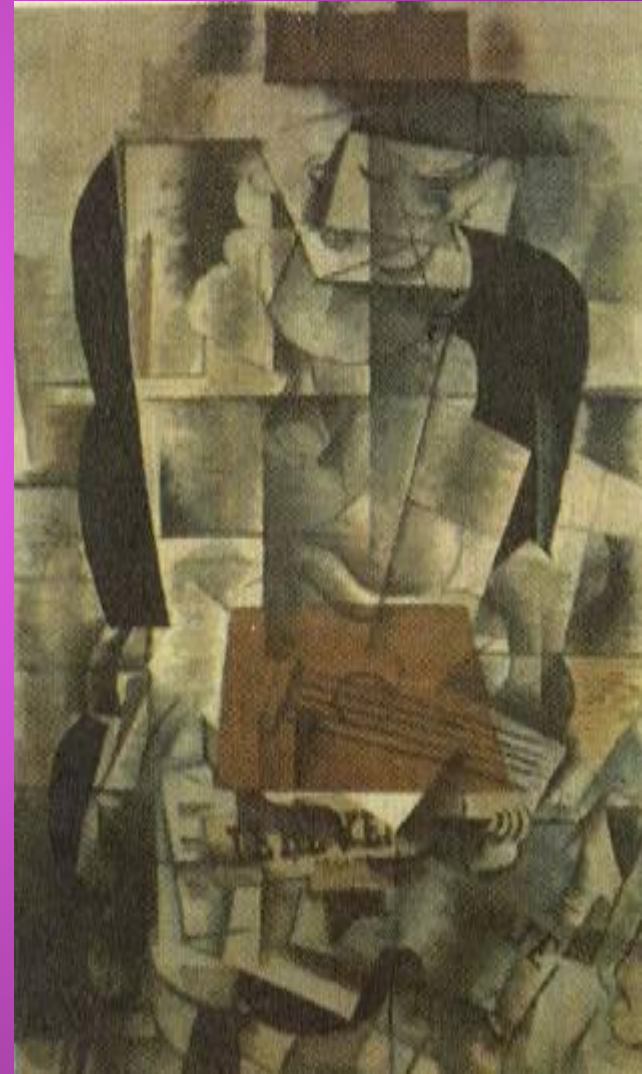
- *Высотой* призмы называется расстояние между плоскостями ее оснований.



# Интересные факты

## Кубизм

- *Оказывается, что призма может быть не только геометрическим телом, но и художественным шедевром. Именно призма стала основой картин Пикассо, Брака, Гресса и т.д.*





# Ледяная призма

- *Оказывается, что снежинка может принять форму шестигранной призмы, но это будет зависеть от температуры воздуха.*



# Пирамида

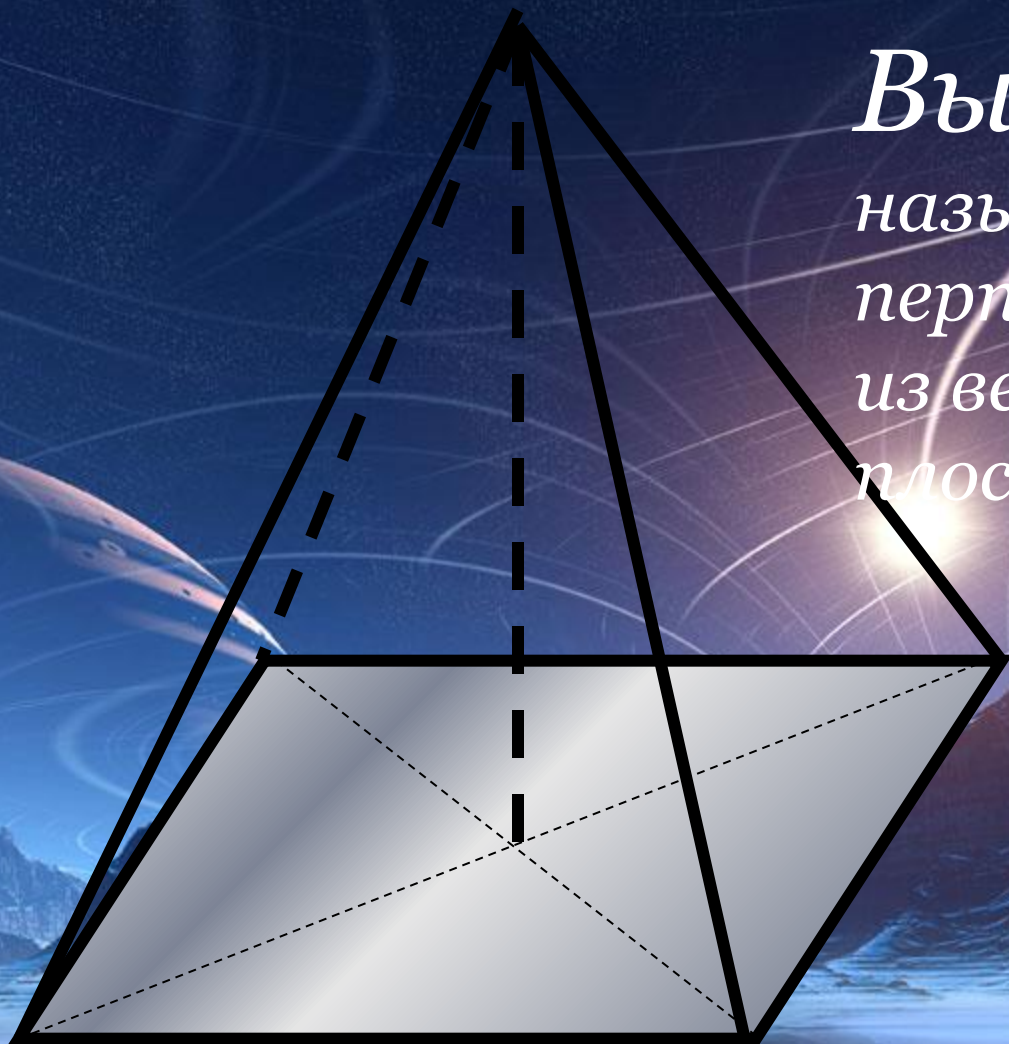


А ЧТО ЭТО ?!!!

Пирамида – многогранник, который состоит из плоского многоугольника – основания пирамиды, точки, не лежащей в плоскости основания, – вершины и всех отрезков, соединяющих вершину пирамиды с точками основания.

Отрезки, соединяющие вершину пирамиды с вершинами основания, называются боковыми ребрами.

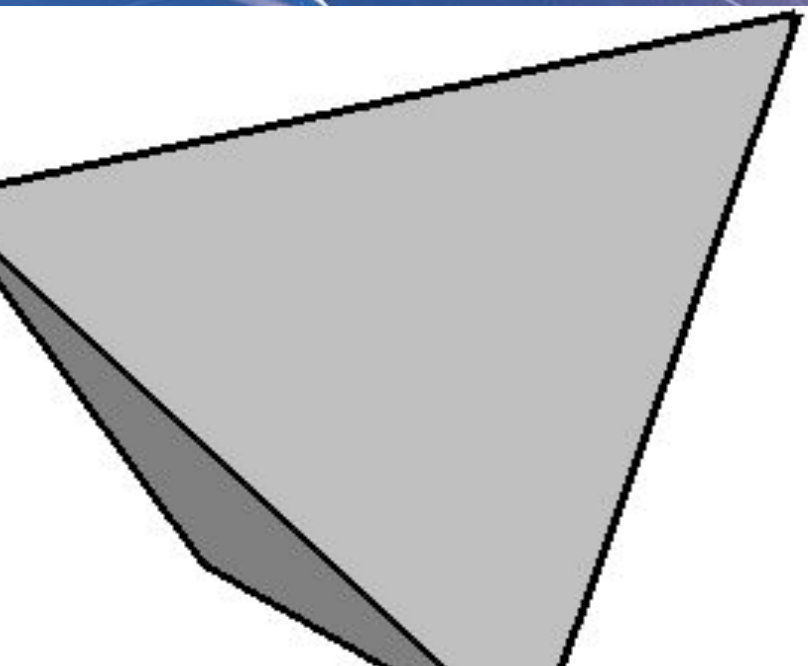




*Высотой* пирамиды называется перпендикуляр, опущенный из вершины пирамиды на плоскость основания.

*Пирамида называется  $n$  – угольной, если ее основанием является  $n$  – угольник.*

*Треугольная пирамида называется также тетраэдром.*



*Пирамида - монументальное сооружение, имеющее геометрическую форму пирамиды. Пирамидами называются гигантские гробницы древнеегипетских фараонов, 3 - 2 тыс. до н.э.*



NEFERTITI

# Первое чудо света

"Само время боится пирамид" -

говорит арабская пословица.

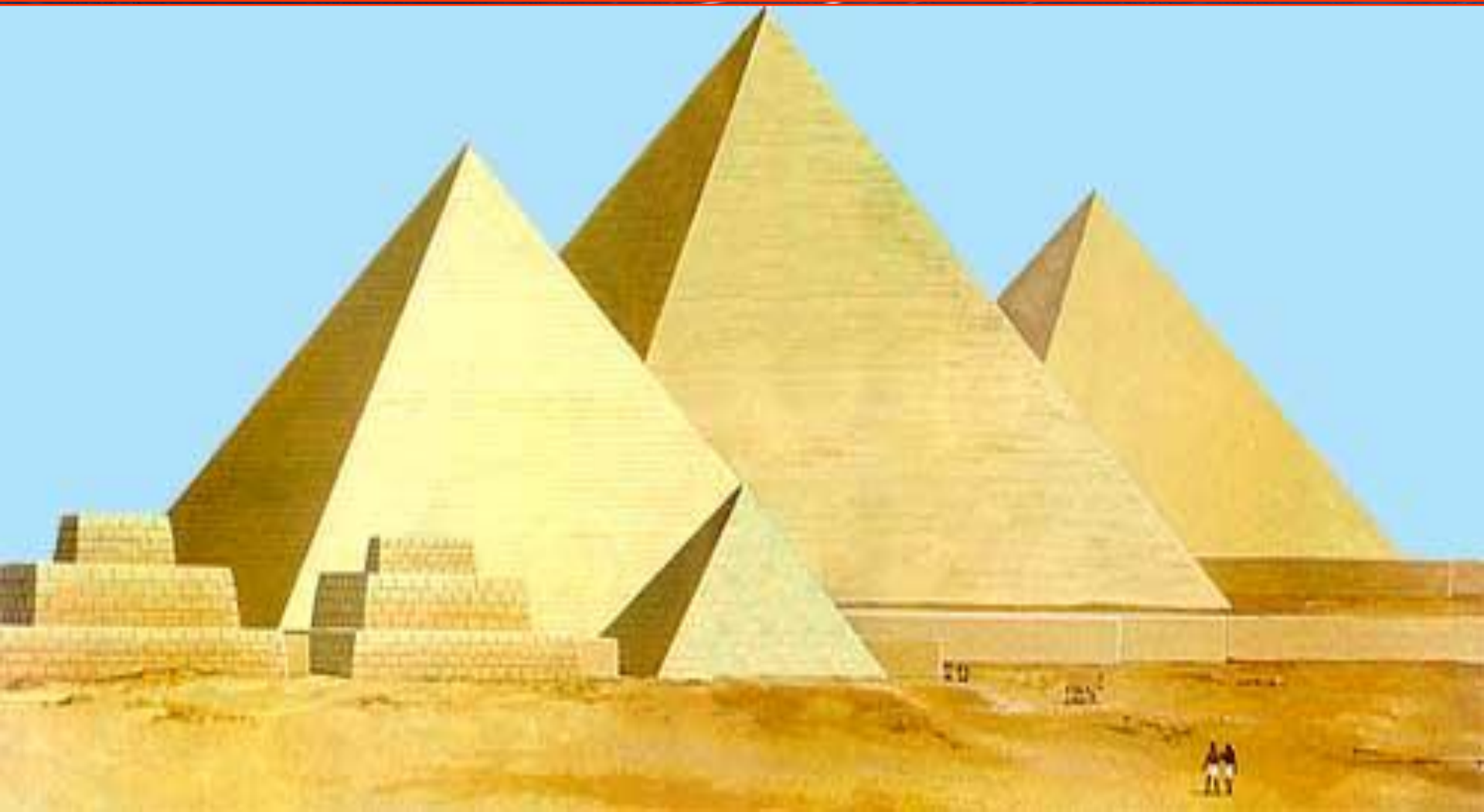
*Всего в Египте около сотни пирамид – больших и маленьких, ступенчатых и идеально гладких. Они расположены по берегам Нила неподалеку от древней столицы страны, в эпоху Древнего царства носящей название Мемфис. Но самые известные пирамиды Египта находятся на кромке пустынного плато Гиза на окраине Каира. Крупнейшая из них – пирамида Хеопса, второго фараона четвертой династии. Пирамида Хеопса – самое большое сооружение, когда-либо воздвигнутое человеком.*





Основание пирамиды Хеопса представляет собой квадрат со стороной 227,5 метров. Высота сооружения при постройке была 146,6 метров, но в настоящее время пирамида на 9 метров ниже: верхние камни упали во время землетрясения. Ее высота соответствует пятиэтажному небоскребу.

# Великая пирамида в Гизе





*На строительство  
Великой пирамиды  
100000 человек  
потребовалось 20 лет.  
Она была создана из  
более чем 2 миллионов  
каменных блоков,  
каждый из которых  
весил не менее 2,5 тонн.*



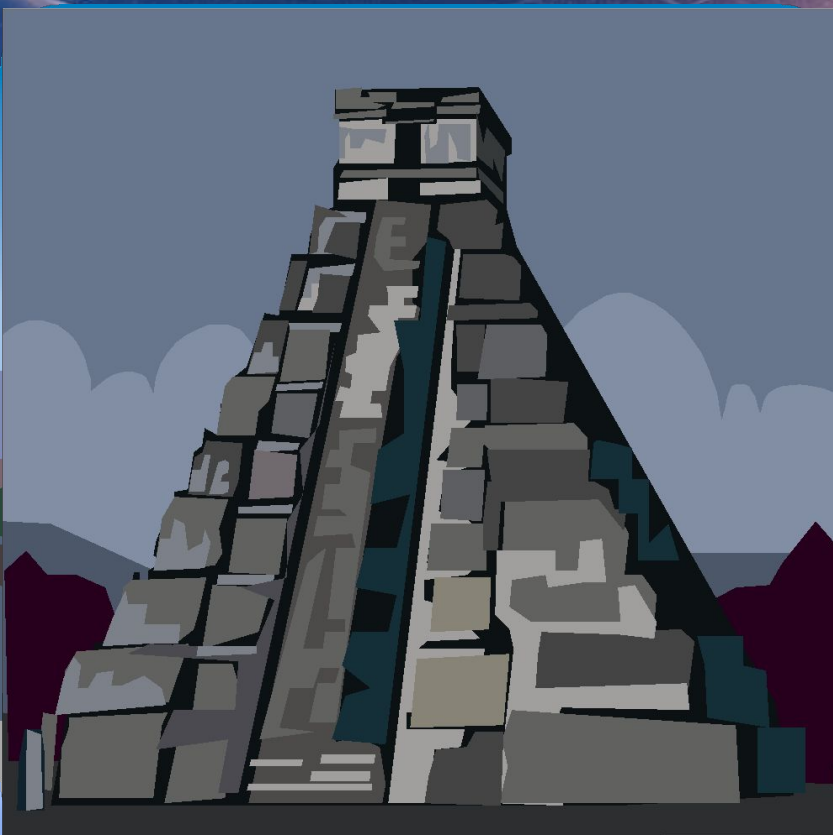
**Применение**

***пирамиды***





*Пирамида широко используется в повседневной жизни, даже в домашнем хозяйстве. Мы часто встречаем пирамиду на улице в виде элементов зданий или самих архитектурных построек.*



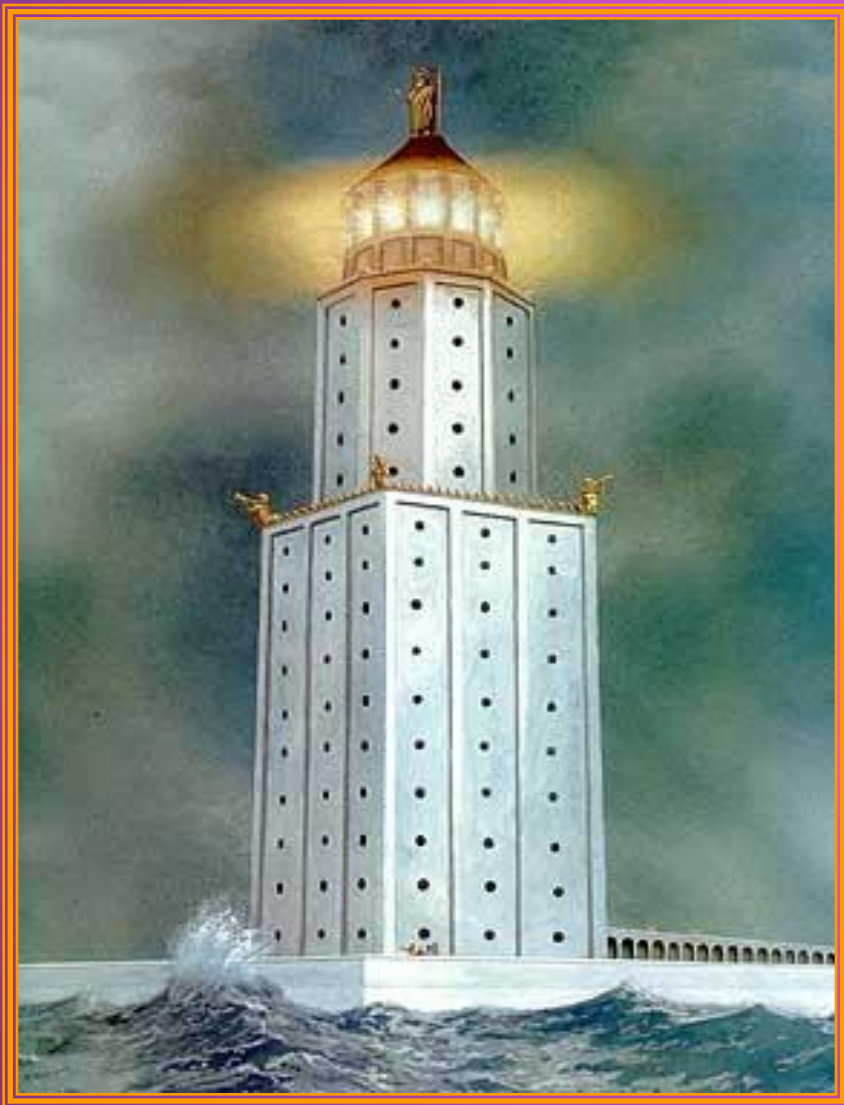
Зайдя в ювелирный магазин, перед нашими глазами предстает огромный выбор из миллиона украшений, сделанных в виде пирамиды. Многочисленные статуэтки, разнообразные подставки, необыкновенной красоты скульптуры – все это пирамиды.



*Элементы пирамиды широко используются в технике. Обратите внимание на компьютер, а клавиатура? Кнопки, на которых наши пальцы часто отстукивают необходимый материал – являются подобием четырехугольной усеченной пирамиды.*

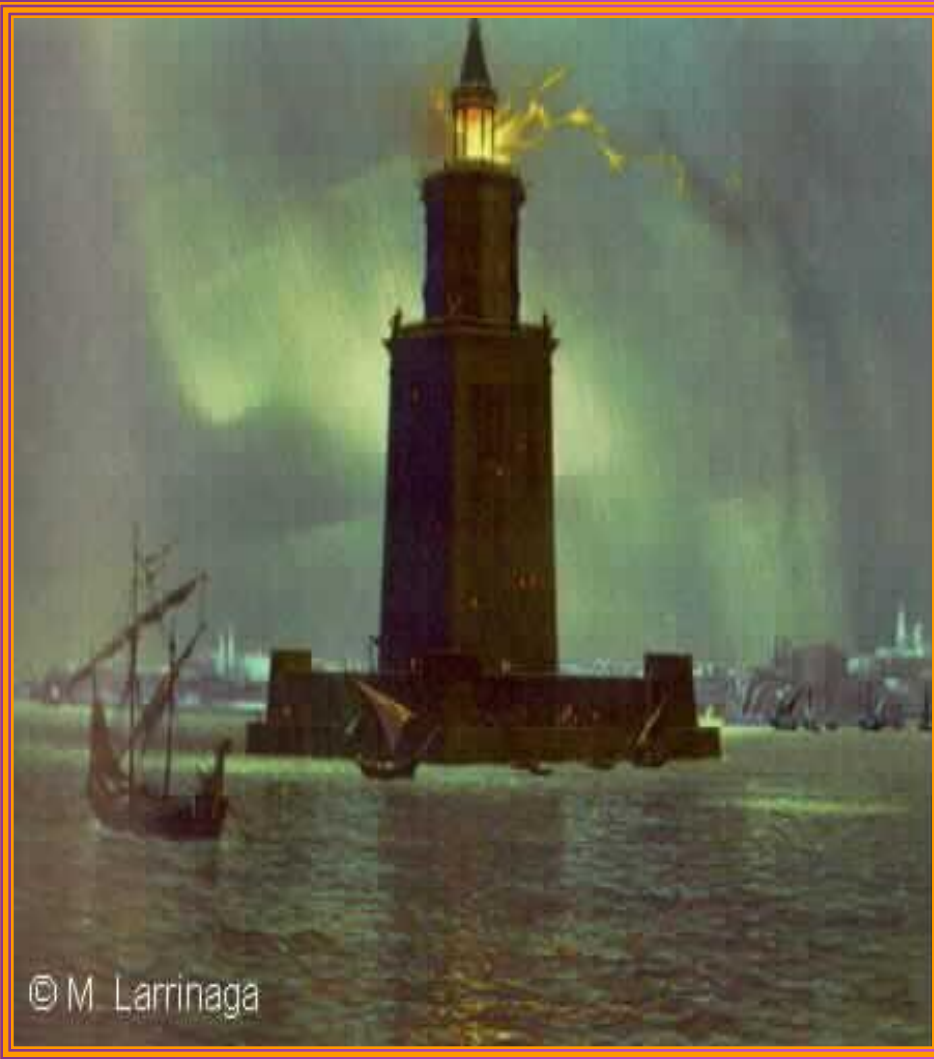


# Александрийский маяк



- В III веке до н.э. был построен маяк, чтобы корабли могли благополучно миновать рифы на пути в александрийскую бухту. Ночью им помогало в этом отражение языков пламени, а днём- столб дыма. Это был первый в мире маяк, и простоял он 1500 лет.
- Маяк был построен на маленьком острове Фарос в Средиземном море, около берегов Александрии. На его строительство ушло 20 лет, а завершён он был около 280 года до н.э.





- *Маяк состоял из трёх мраморных башен, стоявших на основании из массивных каменных блоков. На вершине башни стояла статуя Зевса Спасителя. Общая высота маяка составляла 117 метров.*
- *Огонь горел в верхней башне, которая формой напоминала цилиндр. За пламенем стояли бронзовые пластины, направляющие свет в море. С кораблей можно было видеть этот маяк на расстоянии до 50 км.*



- *В XIV веке маяк был уничтожен землетрясением. Его обломки использовали при строительстве военного форта. Форт не раз перестраивался и до сих пор стоит на месте первого в мире маяка.*





- *Мавсол был правителем Карий. Столицей области был Галикарнас. Мавсол женился на своей сестре Артемизии. Он решил построить гробницу для себя и своей царицы. Мавсол мечтал о величественном памятнике, который бы напоминал миру о его богатстве и могуществе. Он умер до окончания работ над гробницей. Руководить строительством продолжила Артемизия. Гробница была построена в 350 году до н. э. Она была названа Мавзолеем по имени царя.*

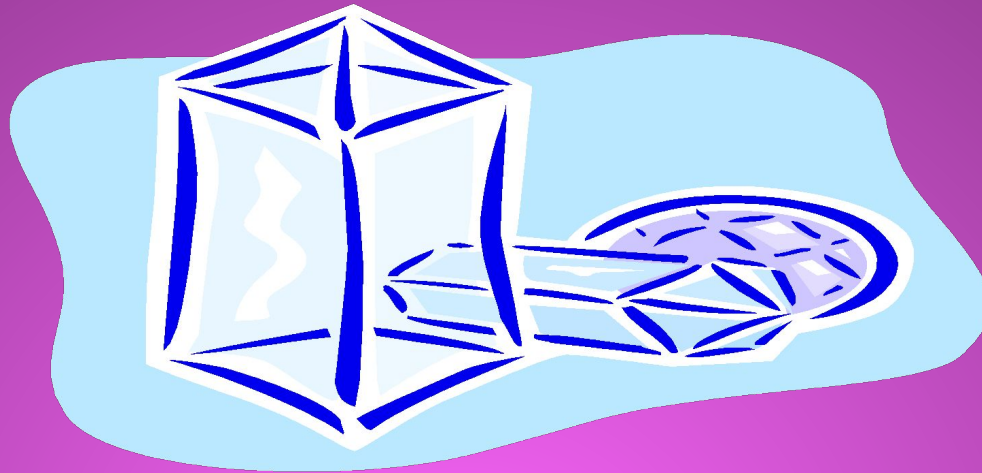


- *Пепел царственной четы хранился в золотых урнах в усыпальнице в основании здания. Ряд каменных львов сторожил это помещение. Само сооружение напоминало греческий храм, окружённый колоннами и статуями. На вершине здания находилась ступенчатая пирамида. На высоте 43 м над землёй её венчало скульптурное изображение колесницы, запряжённой лошадьми. На ней, вероятно, стояли статуи царя и царицы.*

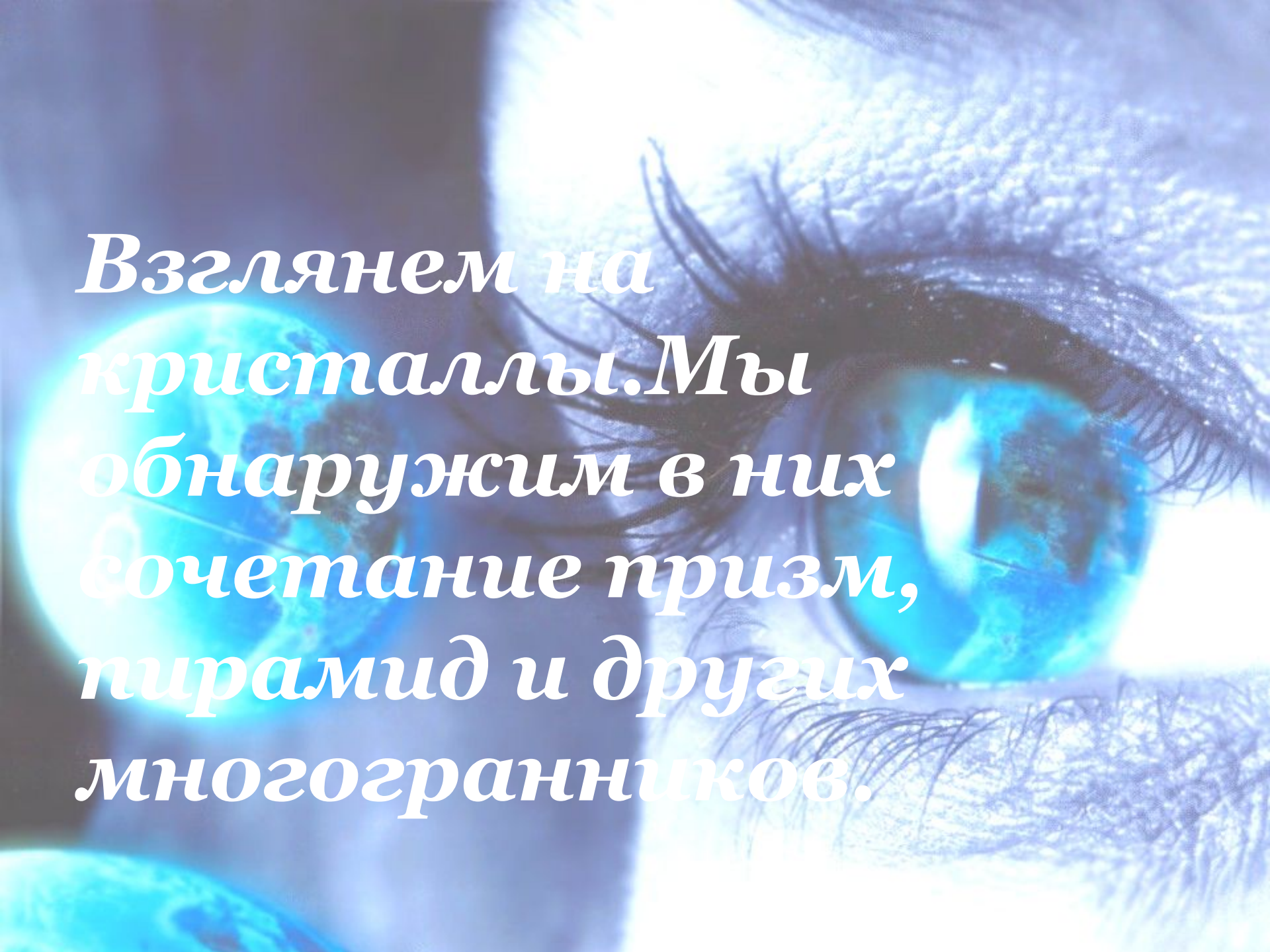


- *Спустя восемнадцать столетий землетрясение разрушило Мавзолей до основания. Ещё триста лет прошло, прежде чем археологи приступили к раскопкам. В 1857 году все находки были перевезены в Британский музей в Лондоне. Теперь на месте, где когда-то был Мавзолей, осталась лишь горстка камней.*

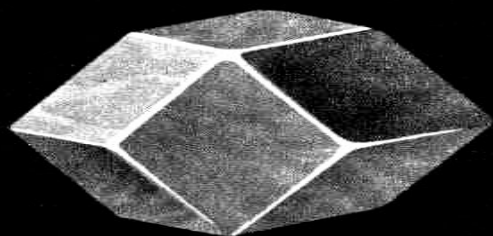




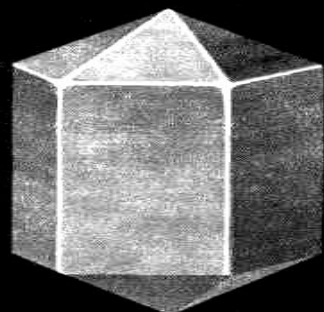
- Существуют не только геометрические формы, созданные руками человека. Их много и в самой природе. Воздействие на облик земной поверхности таких природных факторов, как ветер, вода, солнечный свет, весьма стихийно и носит беспорядочный характер. Однако песчаные дюны, галька на морском берегу, кратер потухшего вулкана имеют, как правило, геометрически правильные формы. В земле иногда находят камни такой формы, как будто их кто-то тщательно вытиливал, шлифовал, полировал. Это - **кристаллы.**



*Взглянем на  
кристаллы. Мы  
обнаружим в них  
сочетание призм,  
пирамид и других  
многогранников.*



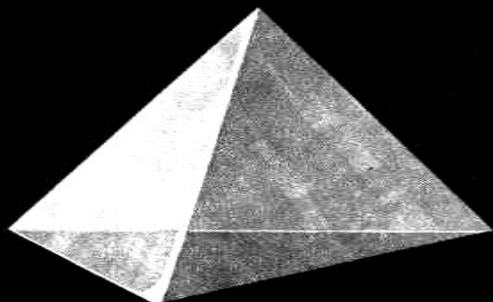
АЛЬМАНДИН



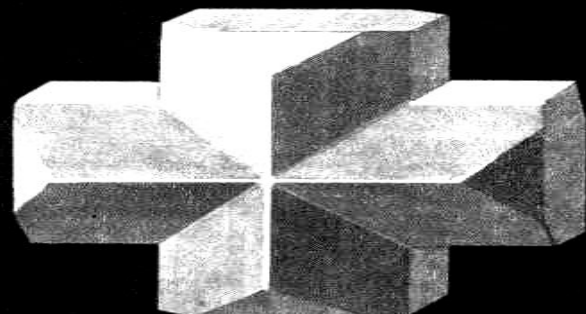
АПАТИТ



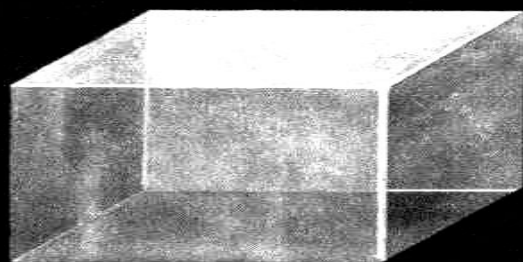
ИСЛАНДСКИЙ ШПАТ



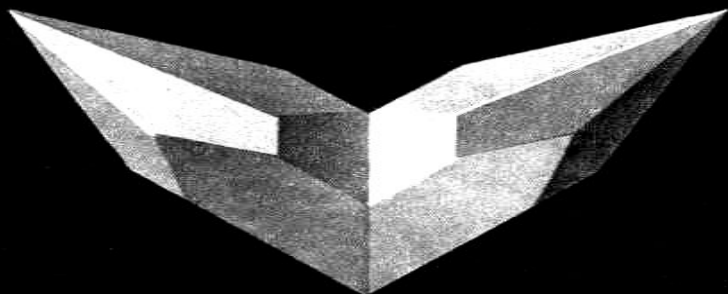
ЛЁД



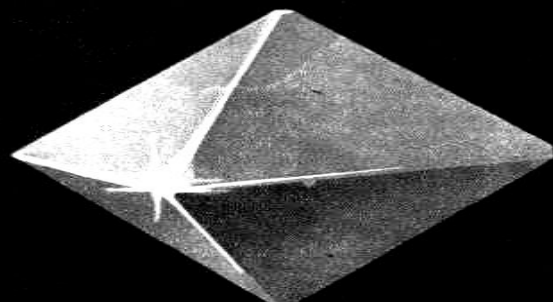
СТАВРОЛИТ  
(двойник)



ПОВАРЕННАЯ СОЛЬ



КАЛЬЦИТ (двойник)



ЗОЛОТО



# Параллелепипед

- *Если основание призмы есть параллелограмм, то он называется параллелепипедом.*

*У параллелепипеда все грани - параллелограммы*



# Это интересно!

Слово « **параллельный** »  
происходит от греческого  
« **параллелос** » - идти рядом. От  
него уже происходят слова

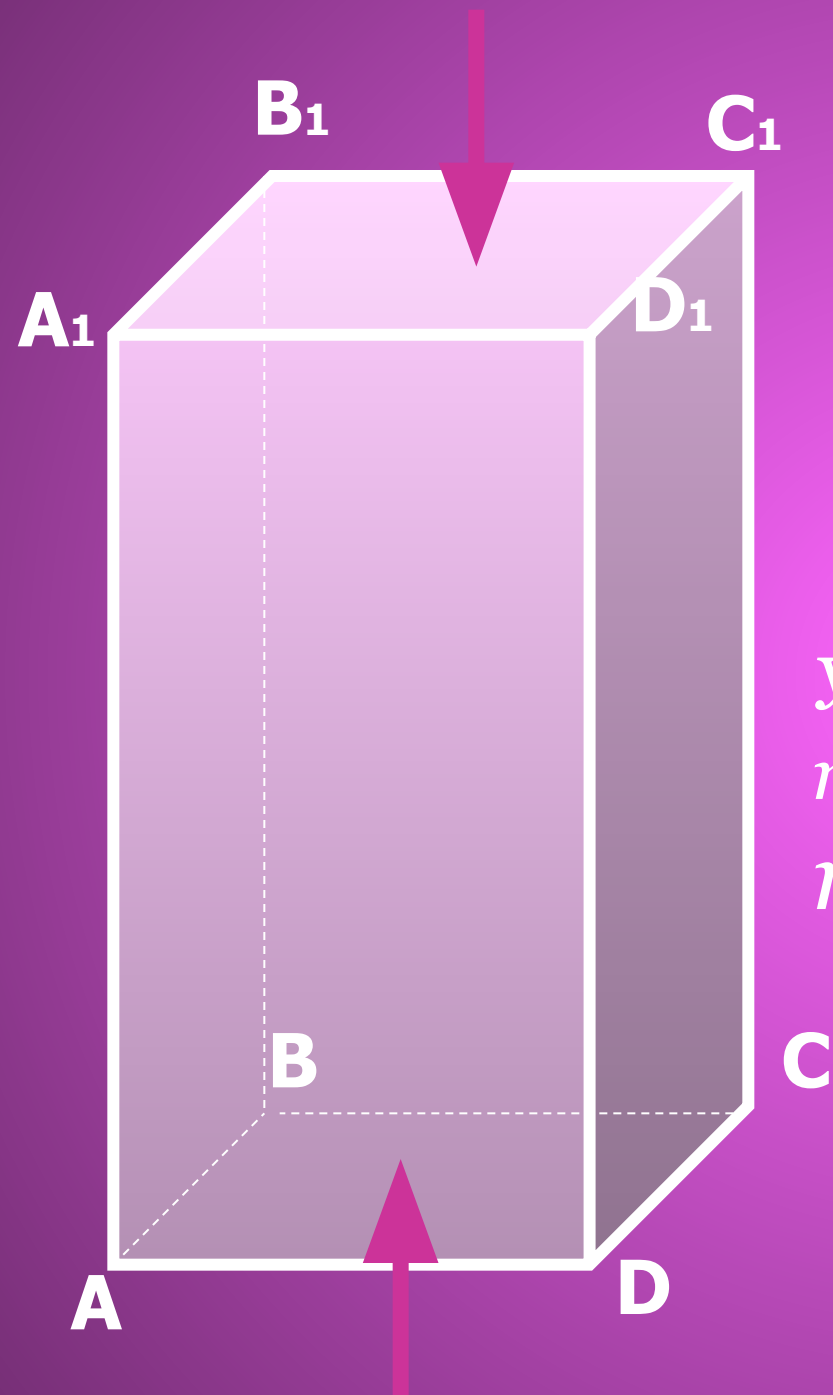
« **параллелепипед** » и  
другие .

*Параллелепипеды, как и призмы, могут быть прямыми и наклонными.*

*Параллелепипед называется **прямым**, если его ребра перпендикулярны основанию.*



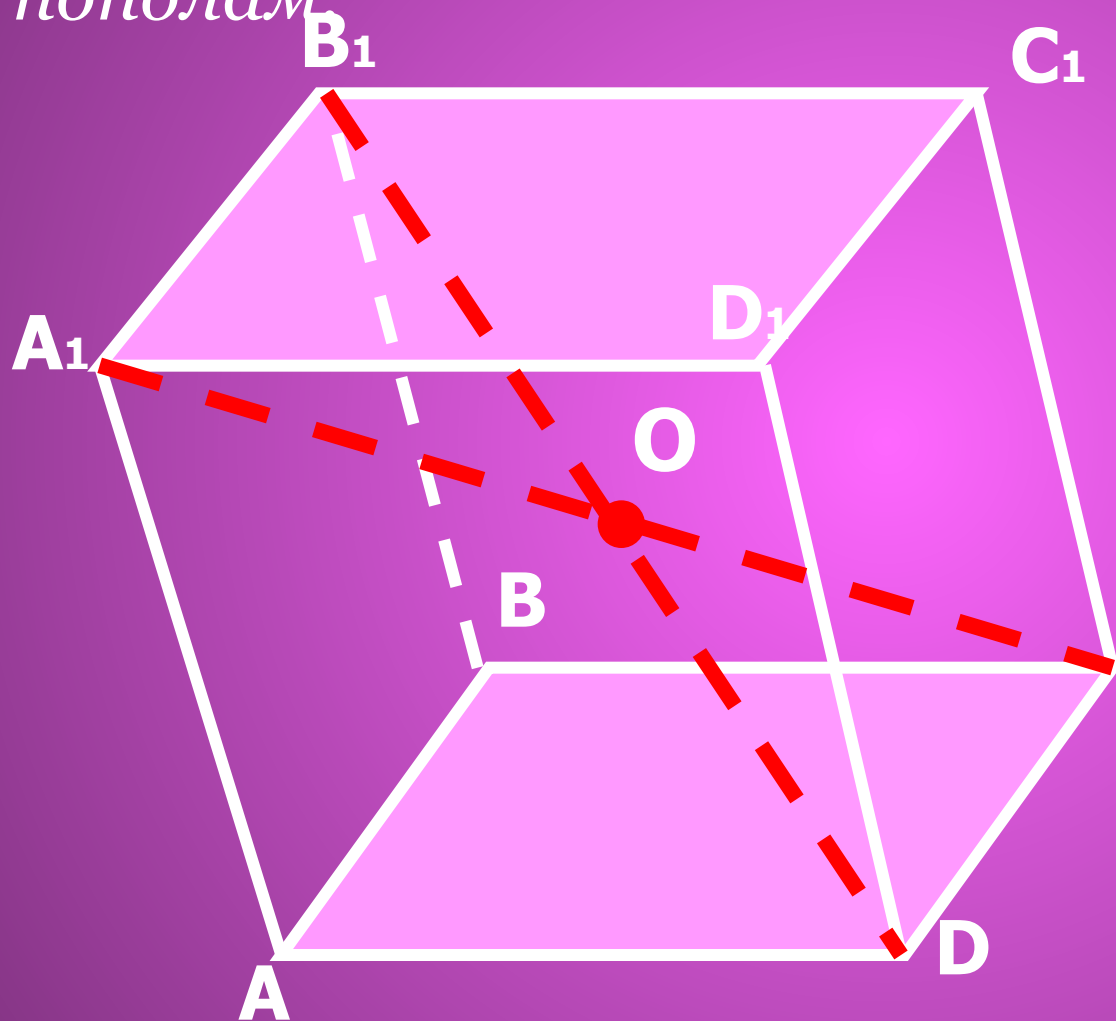
*В противном случае параллелепипед называется **наклонным**.*



*Грани параллелепипеда, не имеющие общих вершин, называются противоположащими.*

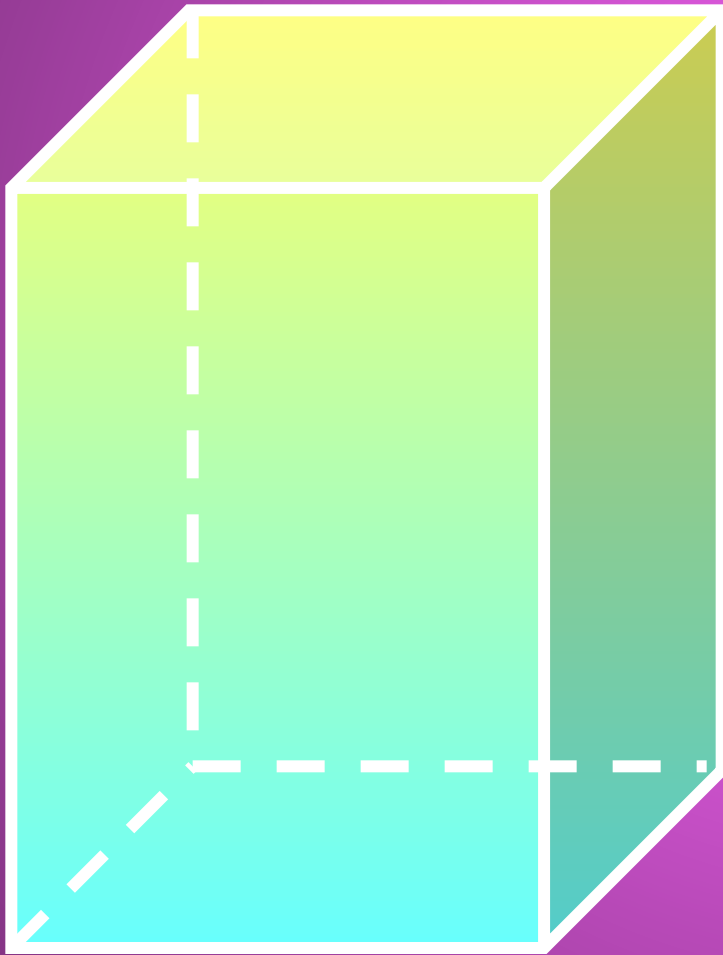
*У параллелепипеда противоположащие грани параллельны и равны.*

*Диагонали параллелепипеда пересекаются в одной точке и точкой пересечения делятся пополам*



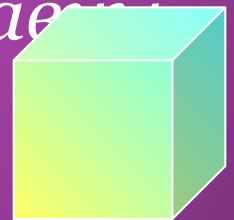
*Точка пересечения диагоналей параллелепипеда является его центром симметрии.*

Прямой параллелепипед, у которого основанием является прямоугольник, называется **прямоугольным параллелепипедом**.

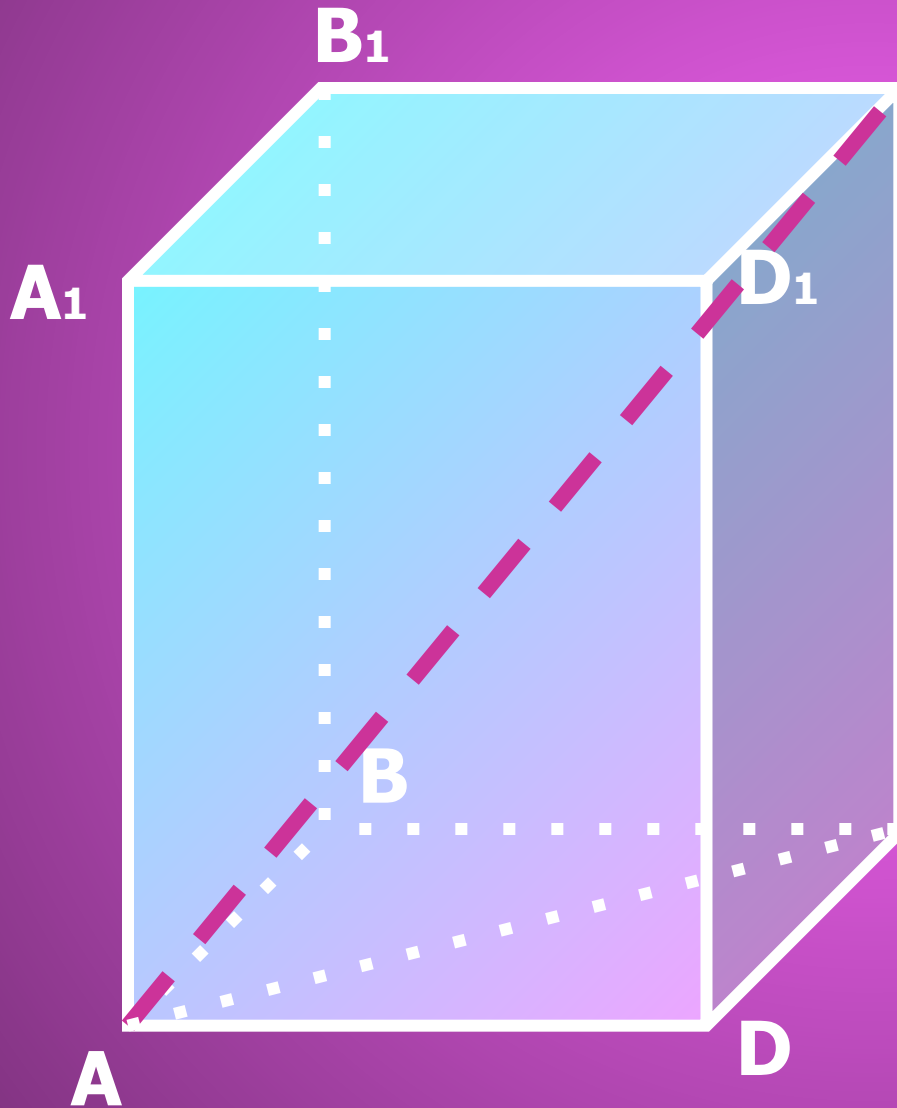


*У прямоугольного параллелепипеда все грани - **прямоугольники**.*

*Прямоугольный параллелепипед, у которого все ребра равны, называется **кубом***







$C_1$

*В*  
прямоугольном  
параллелепипеде  
квадрат любой  
диагонали равен  
 $C$   
сумме  
квадратов трех  
его измерений .



- *Моделями прямоугольного параллелепипеда служат :*
- *классная комната*



*кирпич*



*спичечный коробок*



# Кристаллография

- Оказывается, что кристаллы кальцита, сколько их не дроби на более мелкие части, всегда распадаются на осколки, имеющие форму параллелепипеда.



- *Городские здания чаще всего имеют форму многогранников. Как правило, это обычные параллелепипеды. И лишь неожиданные архитектурные решения украшают города.*



# Проверочный тест:

1. Является ли призма правильной, если её ребра равны?

а) да; в) нет. Обоснуйте свой ответ.

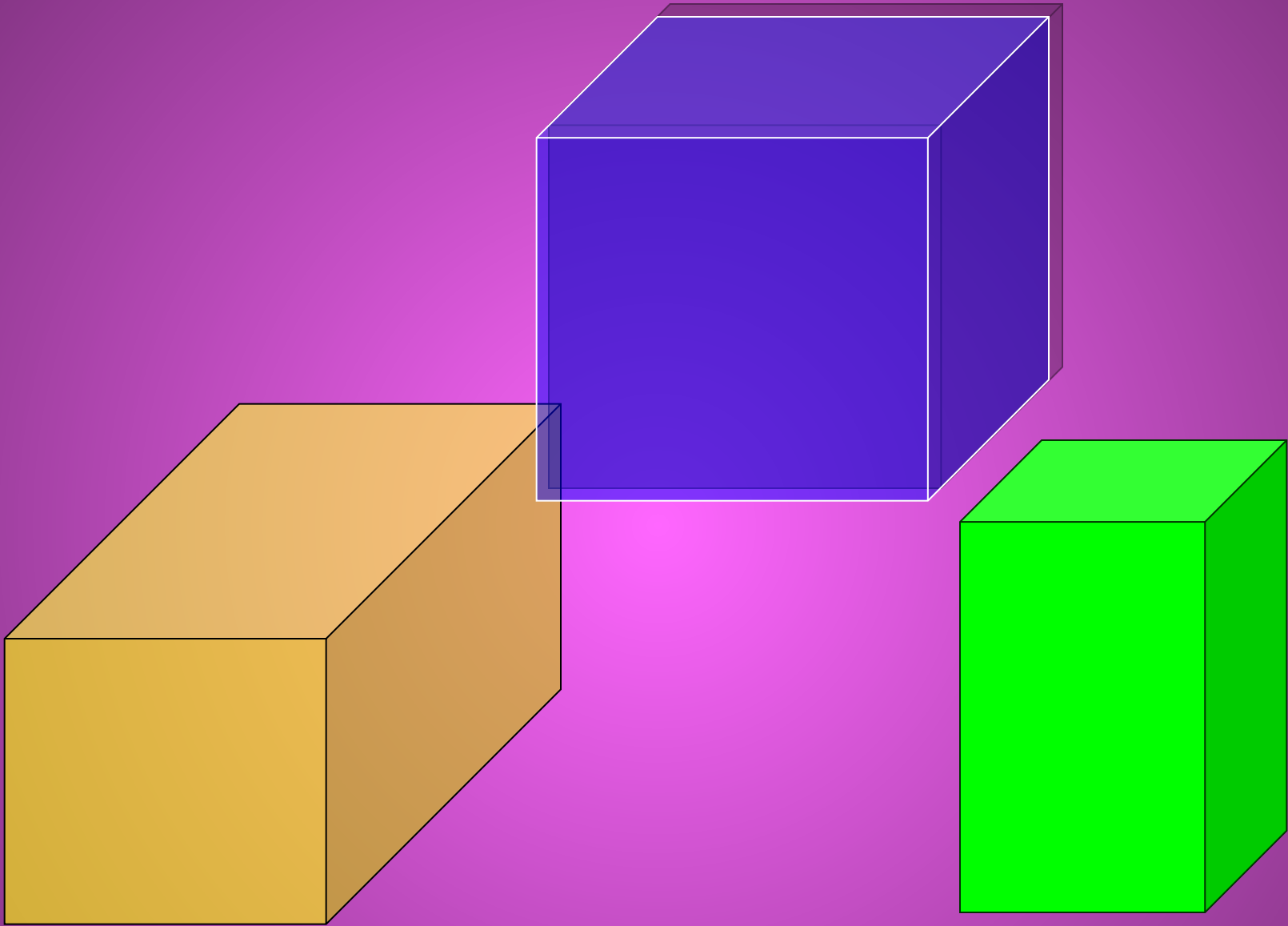
2. Высота правильной треугольной призмы равна 6 см. Сторона основания равна 4 см. Найдите площадь полной поверхности этой призмы.

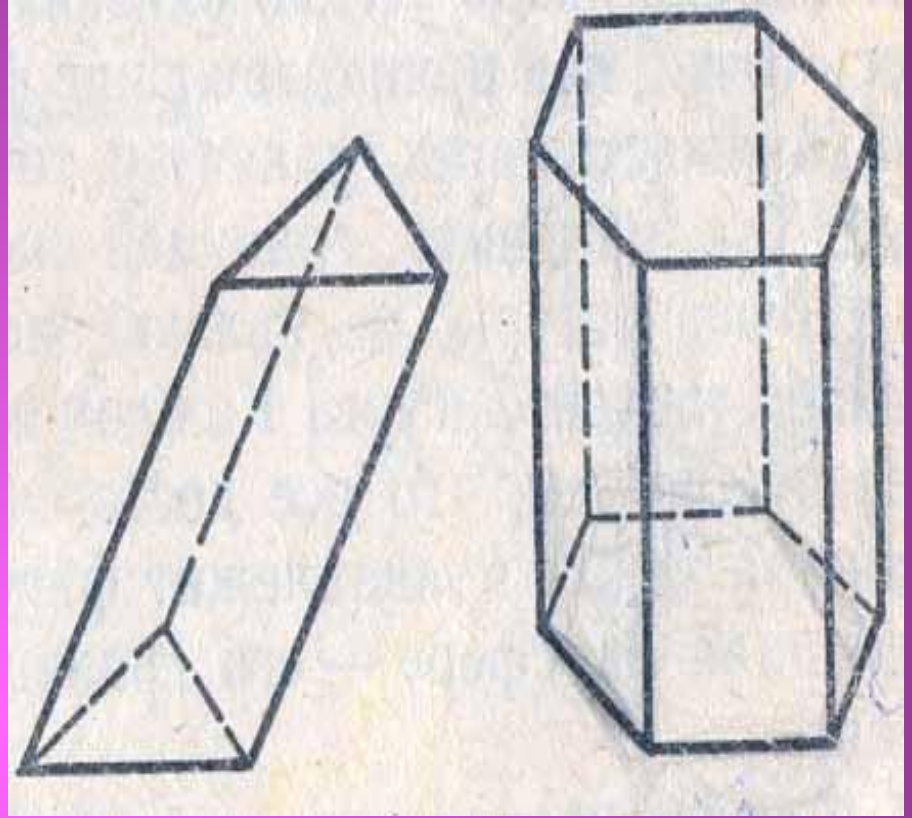
3. Площади двух боковых граней наклонной треугольной призмы равны 40 и 30 см<sup>2</sup>. Угол между этими гранями прямой. Найдите площадь боковой поверхности призмы.

4. В параллелепипеде  $ABCDA_1B_1C_1D_1$  проведены сечения  $A_1BC$  и  $CB_1D_1$ . В каком отношении эти плоскости делят диагональ  $AC_1$ .

***Спасибо за  
внимание!!!***



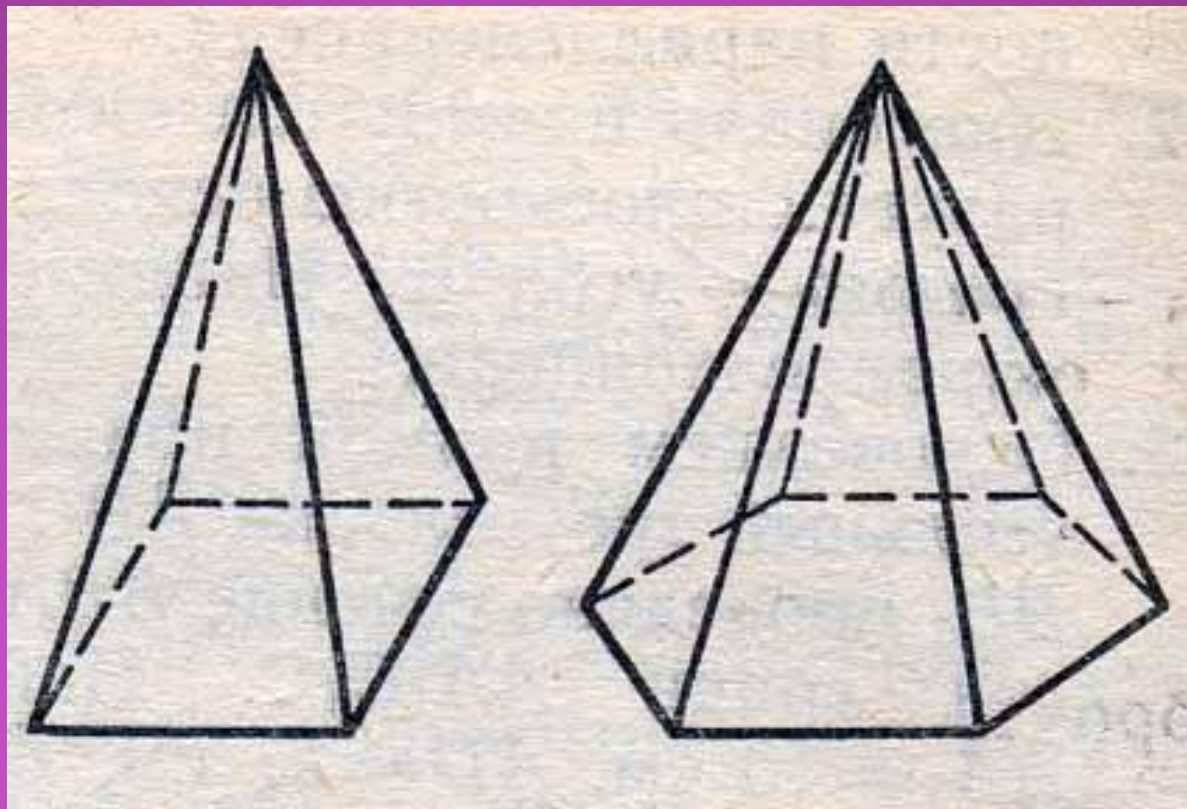


















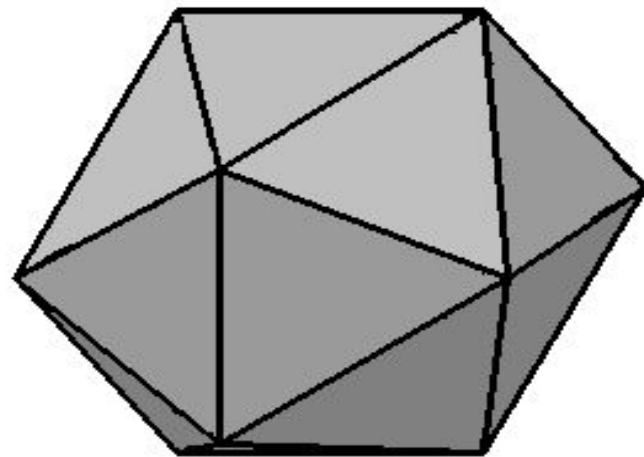
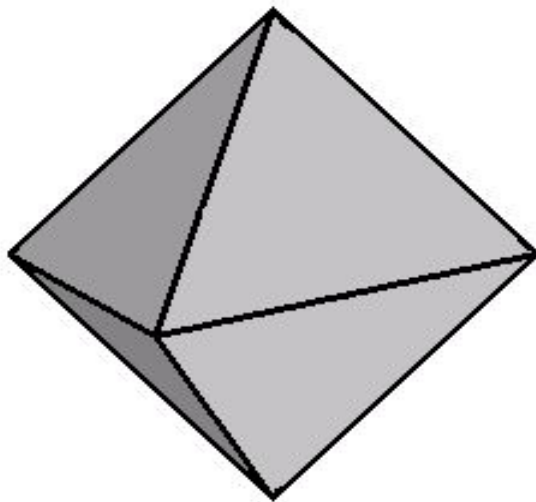
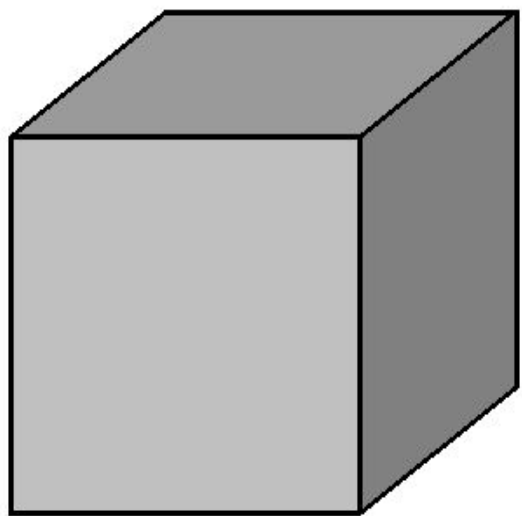


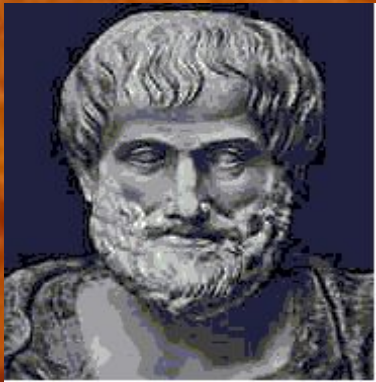






# Многогранники





**а**



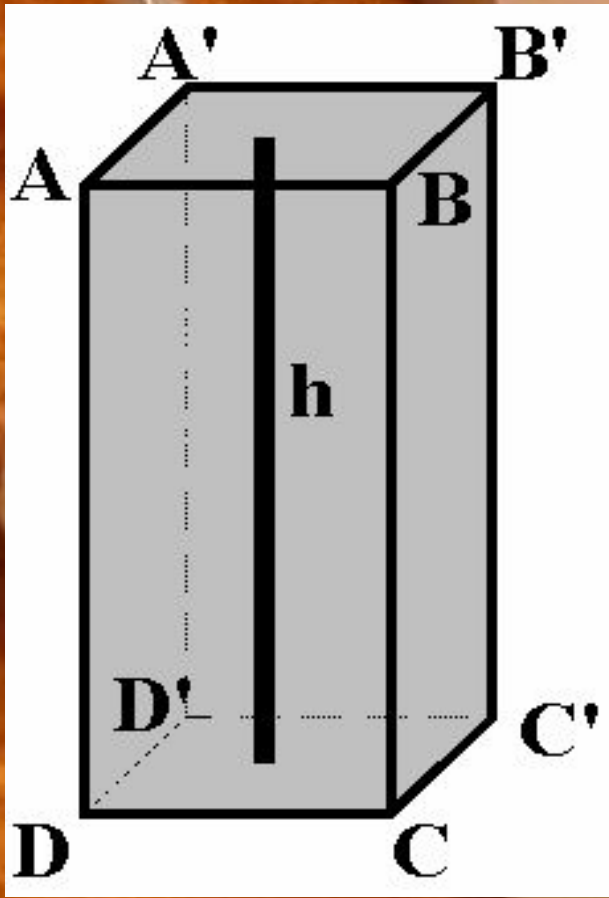
**б**



**в**



**г**





## *Немножко истории*

- 1) тетраэдр, имеющий 4 грани, 4 вершины, 6 ребер;
- 2) куб - 6 граней, 8 вершин, 12 ребер;
- 3) октаэдр - 8 граней, 6 вершин, 12 ребер;
- 4) додекаэдр - 12 граней, 20 вершин, 30 ребер;
- 5) икосаэдр - 20 граней, 12 вершин, 30 ребер.



















# Немножко истории:

Ученые и философы Древней Греции восприняли и переработали достижения культуры и науки Древнего Востока. Фалес, Пифагор, Демокрит, Евдокс и др. ездили в Египет и Вавилон для изучения музыки, математики и астрономии. Не случайно зачатки греческой геометрической науки связаны с именем *Фалеса Милетского*, основателя *ионийской* школы. Ионийцы, населявшие территорию, которая граничила с восточными странами, первыми заимствовали знания Востока и стали их развивать. Ученые ионийской школы впервые подвергли логической обработке и систематизировали математические сведения, позаимствованные у древневосточных народов, в особенности у вавилонян. Фалесу, главе этой школы, Прокл и другие историки приписывают немало геометрических открытий. Об отношении *Пифагора Самосского* к геометрии Прокл пишет в своем комментарии к "Началам" Евклида следующее: "Он изучал эту науку (т. е. геометрию), исходя от первых ее оснований, и старался получать теоремы при помощи чисто логического мышления". Прокл приписывает Пифагору, кроме известной теоремы о квадрате гипотенузы, еще построение пяти правильных многогранников:

# *Тела Платона*

Тела Платона - это выпуклые многогранники, все грани которых правильные многоугольники. Все многогранные углы правильного многогранника конгруэнтны. Как это следует уже из подсчета суммы плоских углов при вершине, выпуклых правильных многогранников не больше пяти. Указанным ниже путем можно доказать, что существует именно пять правильных многогранников (это доказал Евклид). Они - правильный тетраэдр, куб, октаэдр, додекаэдр и икосаэдр.



# Тела Платона

Октаэдр - восьмигранник; тело, ограниченное восемью треугольниками; правильный октаэдр ограничен восемью равносторонними треугольниками; один из пяти правильных многогранников. (рис.3).

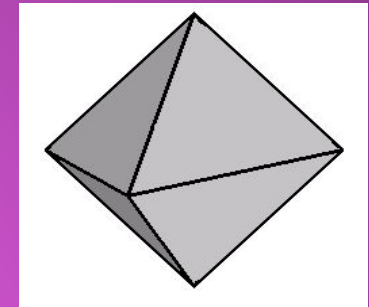


Рис.3

Додекаэдр - двенадцатигранник, тело, ограниченное двенадцатью многоугольниками; правильный пятиугольник; один из пяти правильных многогранников. (рис.4).

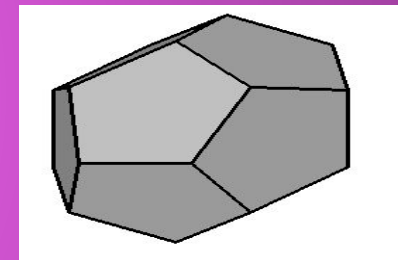


Рис.4

Икосаэдр - двадцатигранник, тело, ограниченное двадцатью многоугольниками; правильный икосаэдр ограничен двадцатью равносторонними треугольниками; один из пяти правильных многогранников. (рис.5).

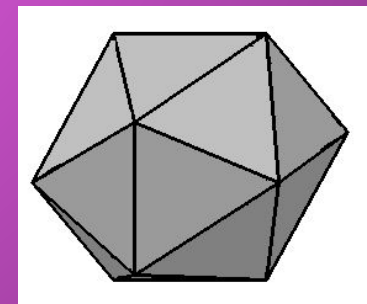


Рис.5

# *Немножко истории*

Грани додекаэдра являются правильными пятиугольниками. Диагонали же правильного пятиугольника образуют так называемый звездчатый пятиугольник - фигуру, которая служила эмблемой, опознавательным знаком для учеников Пифагора. Известно, что пифагорейский союз был одновременно философской школой, политической партией и религиозным братством. Согласно легенде, один пифагореец заболел на чужбине и не мог перед смертью расплатиться с ухаживавшим за ним хозяином дома. Последний нарисовал на стене своего дома звездчатый пятиугольник. Увидав через несколько лет этот знак, другой странствующий пифагореец осведомился о случившемся у хозяина и щедро его вознаградил.

Достоверных сведений о жизни и научной деятельности Пифагора не сохранилось. Ему приписывается создание учения о подобии фигур. Он, вероятно, был среди первых ученых, рассматривавших геометрию не как практическую и прикладную дисциплину, а как абстрактную логическую науку.

## *Немножко истории*

В школе Пифагора было открыто существование несоизмеримых величин, т. е. таких, отношение между которыми невозможно выразить никаким целым или дробным числом. Примером может служить отношение длины диагонали квадрата к длине его стороны, равное  $\sqrt{2}$ . Число это не является рациональным (т. е. целым или отношением двух целых чисел) и называется иррациональным, т. е. нерациональным (от латинского ratio - отношение).

# Тела Платона

Тетраэдр - четырехгранник, все грани которого треугольники, т.е. треугольная пирамида; правильный тетраэдр ограничен четырьмя равносторонними треугольниками; один из пяти правильных многоугольников. (рис.1).

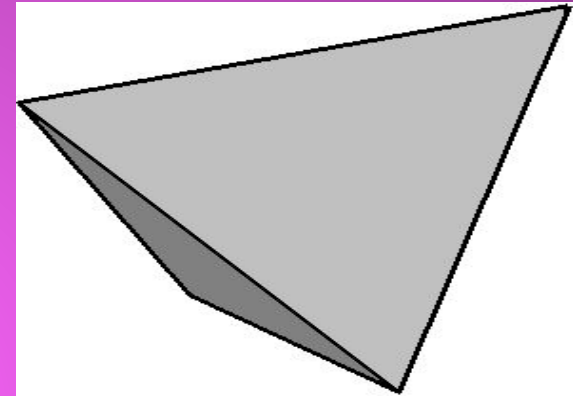


Рис.1

Куб или правильный гексаэдр - правильная четырехугольная призма с равными ребрами, ограниченная шестью квадратами. (рис.2).

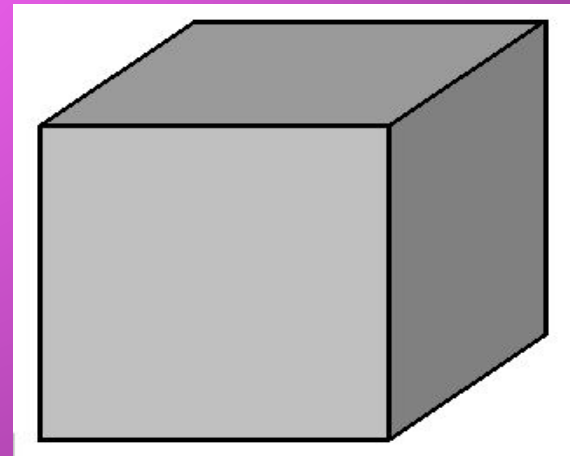


Рис.2

# Тела Платона

Тетраэдр - четырехгранник, все грани которого треугольники, т.е. треугольная пирамида; правильный тетраэдр ограничен четырьмя равносторонними треугольниками; один из пяти правильных многоугольников. (рис.1).

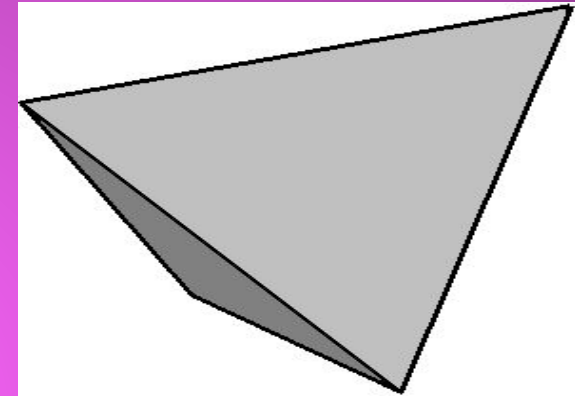


Рис.1

Куб или правильный гексаэдр - правильная четырехугольная призма с равными ребрами, ограниченная шестью квадратами. (рис.2).

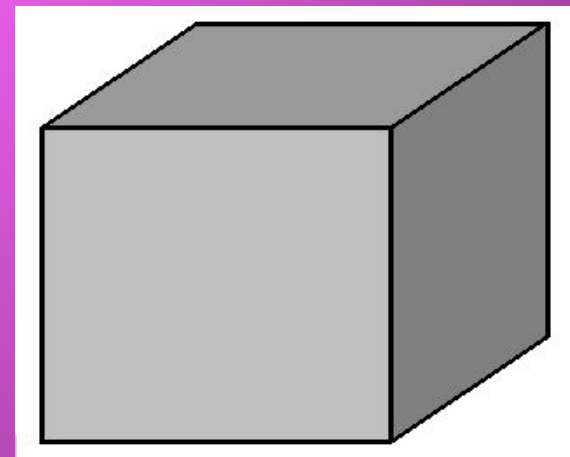


Рис.2

| <u>Название:</u> | <u>Число ребер при вершине</u> | <u>Число сторон грани</u> | <u>Число граней</u> | <u>Число вершин</u> | <u>Число ребер</u> |
|------------------|--------------------------------|---------------------------|---------------------|---------------------|--------------------|
| <u>Тетраэдр</u>  | 3                              | 3                         | 4                   | 4                   | 6                  |
| <u>Куб</u>       | 3                              | 4                         | 6                   | 8                   | 12                 |
| <u>Октаэдр</u>   | 4                              | 3                         | 8                   | 6                   | 12                 |
| <u>Додекаэдр</u> | 3                              | 5                         | 12                  | 20                  | 30                 |
| <u>Икосаэдр</u>  | 5                              | 3                         | 20                  | 12                  | 30                 |

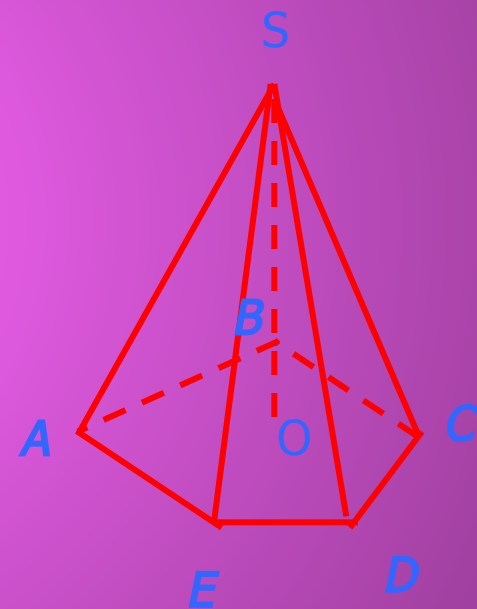
# Пирамида

**Пирамида**-многогранник, который состоит из плоского многоугольника- основания пирамиды, точки, не лежащие в плоскости основания-вершины пирамиды и всех отрезков, соединяющих вершину пирамиды с точками основания

На рисунке изображены пятиугольная пирамида  $SABCDE$  и ее развертка. Треугольники, имеющие общую вершину, называют **боковыми гранями** пирамиды; общую вершину боковых граней - **вершиной** пирамиды; многоугольник, которому не принадлежит эта вершина, - **основанием** пирамиды; ребра пирамиды, сходящиеся в ее вершине, - **боковыми ребрами** пирамиды. **Высота** пирамиды - это отрезок перпендикуляра, проведенного через ее вершину к плоскости основания, с концами в вершине и на плоскости основания пирамиды. На рисунке отрезок  $SO$  - высота пирамиды.

**Определение.** Пирамида, основание которой - **правильный многоугольник** и вершина проектируется в его центр, называется **правильной**.

На рисунке изображена правильная шестиугольная пирамида.



# Измерение объемов

Объемы зерновых амбаров и других сооружений в виде кубов, призм и цилиндров египтяне и вавилоняне, китайцы и индийцы вычисляли путем умножения площади основания на высоту. Однако древнему Востоку были известны в основном только отдельные правила, найденные опытным путем, которыми пользовались для нахождения объемов для площадей фигур. В более позднее время, когда геометрия сформировалась как наука, был найден общий подход к вычислению объемов многогранников.

Среди замечательных греческих ученых V - IV вв. до н.э., которые разрабатывали теорию объемов, были Демокрит из Абдеры и Евдокс Книдский.

Евклид не применяет термина "объем". Для него термин "куб", например, означает и объем куба. В XI книге "Начал" изложены среди других и теоремы следующего содержания.

- 1. Параллелепипеды с одинаковыми высотами и равновеликими основаниями равновелики.*
- 2. Отношение объемов двух параллелепипедов с равными высотами равно отношению площадей их оснований.*
- 3. В равновеликих параллелепипедах площади оснований обратно пропорциональны высотам.*

Теоремы Евклида относятся только к сравнению объемов, так как непосредственное вычисление объемов тел Евклид, вероятно, считал делом практических руководств по геометрии. В произведениях прикладного характера Герона Александрийского имеются правила для вычислений объема куба, призмы, параллелепипеда и других пространственных фигур.



# Параллелепипед

*Призма, основание которой - параллелограмм, называется параллелепипедом.*

*В соответствии с определением параллелепипед - это четырехугольная призма, все грани которой - параллелограммы. Параллелепипеды, как и призмы, могут быть прямыми и наклонными. На рисунке 1 изображен наклонный параллелепипед, а на рисунке 2- прямой параллелепипед.*

*Прямой параллелепипед, основанием которого служит прямоугольник, называют **прямоугольным параллелепипедом**. У прямоугольного параллелепипеда все грани - прямоугольники.*

*Моделями прямоугольного параллелепипеда служат классная комната, кирпич, спичечная коробка.*

*Длины трех ребер прямоугольного параллелепипеда, имеющих общий конец, называют его **измерениями**. Например, имеются спичечные коробки с измерениями 15, 35, 50 мм. Куб - прямоугольный параллелепипед с равными измерениями. Все шесть граней куба - равные квадраты.*

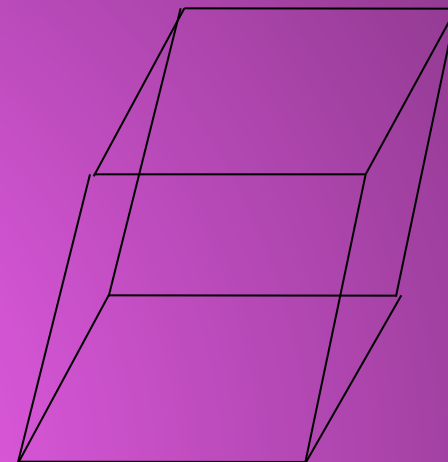


Рис.1

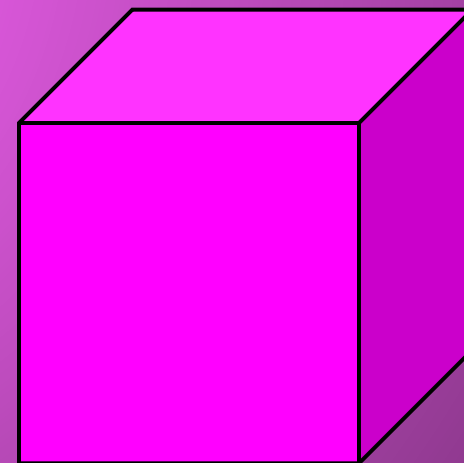


Рис. 2

# Параллелепипед

Рассмотрим некоторые свойства параллелепипеда.

**Теорема.** *Параллелепипед симметричен относительно середины его диагонали.*

Из теоремы непосредственно следуют **важные свойства параллелепипеда:**

1. *Любой отрезок с концами, принадлежащими поверхности параллелепипеда и проходящий через середину его диагонали, делится ею пополам; в частности, все диагонали параллелепипеда пересекаются в одной точке и делятся ею пополам.*
2. *Противолежащие грани параллелепипеда параллельны и равны*