

Подобные треугольники.

Геометрия, 8 класс.



Урок 32. Пропорциональные отрезки.



Рассмотрим пропорцию: $K \quad \text{---} \quad E$

$$\frac{2}{4} = \frac{8}{16}$$

$H \quad \text{---} \quad X$

$A \quad \text{---} \quad B$

P

T

Отрезки называются
пропорциональными, если
равны отношения их длин.

$$\frac{KE}{HX} = \frac{AB}{PT}$$

Решение задач:

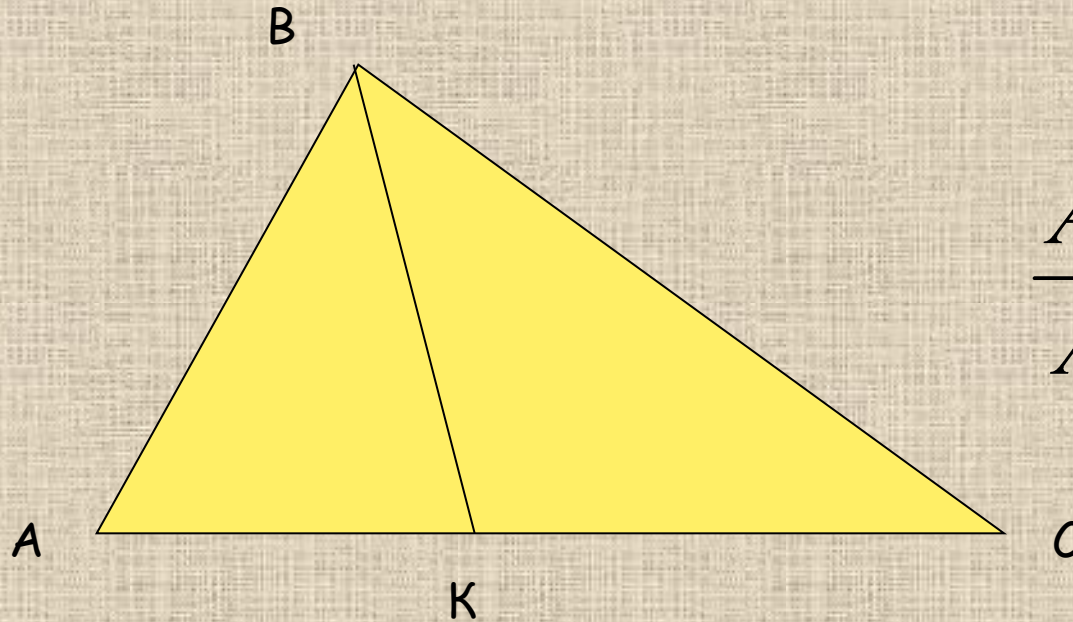
№ 533 (устно)

№ 534.



Свойство биссектрисы треугольника.

Биссектриса треугольника делит противоположную сторону на отрезки, пропорциональные прилежащим сторонам треугольника.



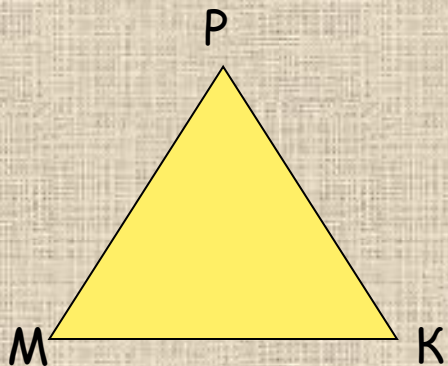
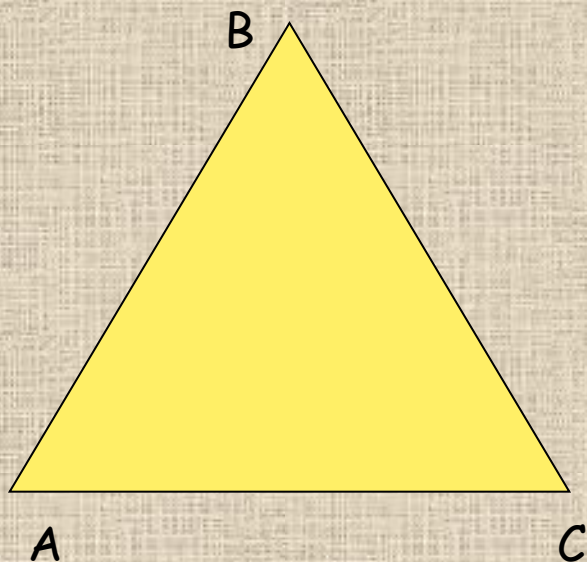
$$\frac{AK}{AB} = \frac{CK}{CB}$$

Решение задач: № 536(а), 538.

Домашнее задание: п.56, № 536(б), 537.



Урок 33. Подобные треугольники.



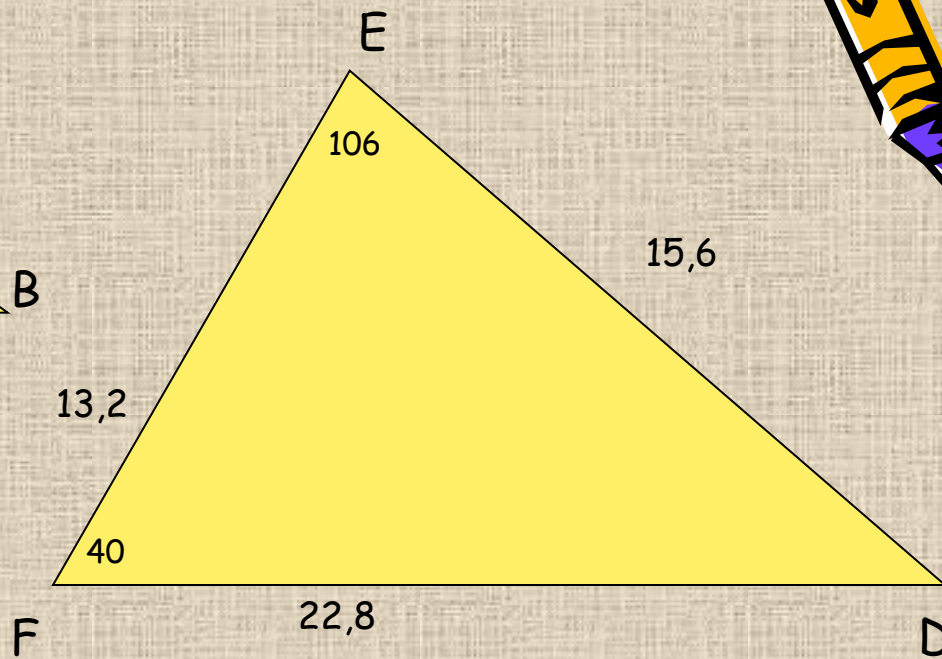
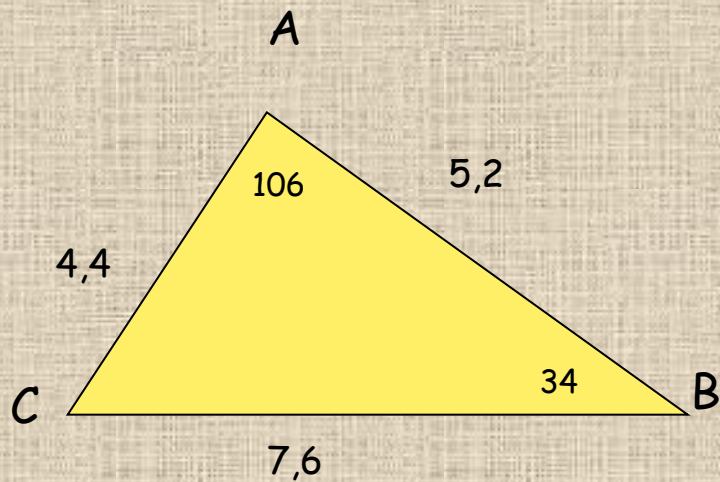
Два треугольника называются **подобными**, если их углы соответственно равны, и стороны одного треугольника пропорциональны соответствующим сторонам другого треугольника.

$$\frac{AB}{MP} = \frac{BC}{PK} = \frac{AC}{MK} = k$$

где k - коэффициент подобия.
Говорят, что $\triangle ABC \sim \triangle MPK$



№ 541.

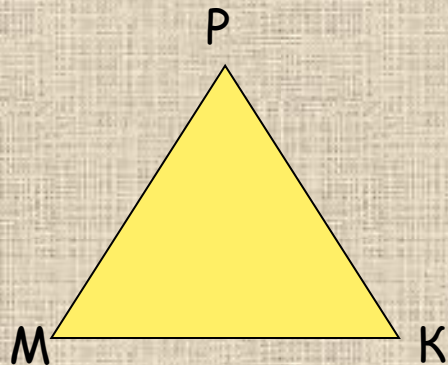
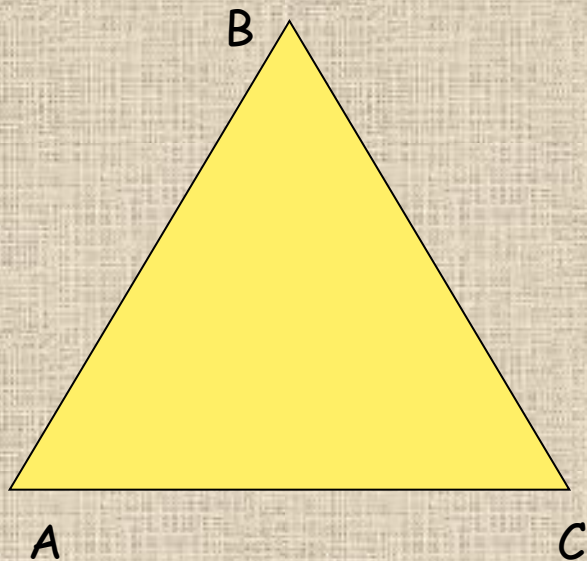


Решение задач: № 542.

Домашнее задание: п.56-57, № 540.



Урок 34. Теорема об отношении площадей подобных треугольников.



ТЕОРЕМА.

Отношение площадей двух подобных треугольников равно квадрату коэффициента подобия.

$$\frac{S_{ABC}}{S_{MPK}} = k^2$$

где k - коэффициент подобия.

Отношение периметров двух подобных треугольников равно коэффициенту подобия.

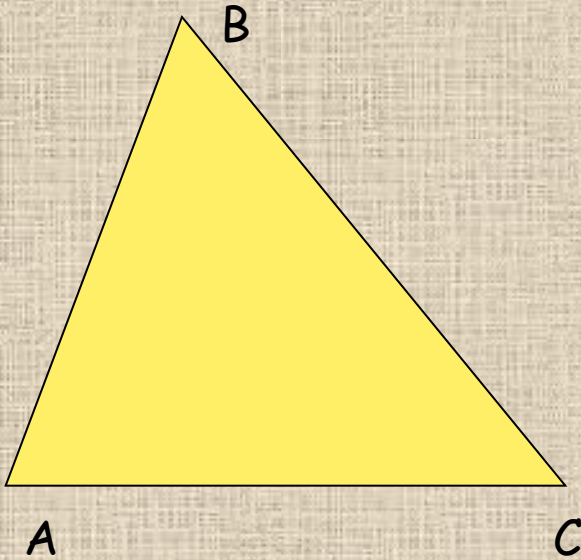
$$\frac{P_{ABC}}{P_{MPK}} = k$$

Решение задач: № 545, 549.

Домашнее задание: п. 56-58, № 544, 548.



урок 35. Первый признак подобия треугольников.



ТЕОРЕМА.

Если 2 угла одного треугольника равны соответственно двум углам другого треугольника, то такие треугольники подобны.

Доказательство: Так как углы $A=A_1$ и $C=C_1$, то угол $B=B_1$.

Так как угол одного треугольника равен углу другого треугольника, то площади этих треугольников относятся как произведения сторон, заключающих эти углы.

$$\frac{S_{ABC}}{S_{A_1B_1C_1}} = \frac{AB \cdot AC}{A_1B_1 \cdot A_1C_1} ;$$

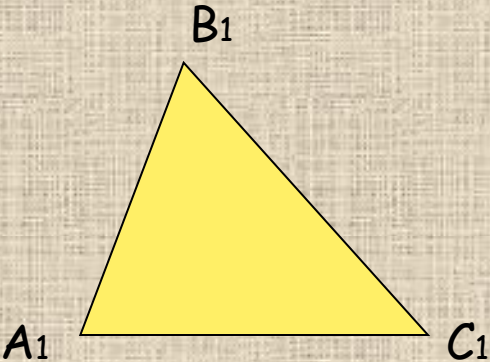
$$\frac{S_{ABC}}{S_{A_1B_1C_1}} = \frac{BC \cdot AC}{B_1C_1 \cdot A_1C_1} ;$$

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} ;$$

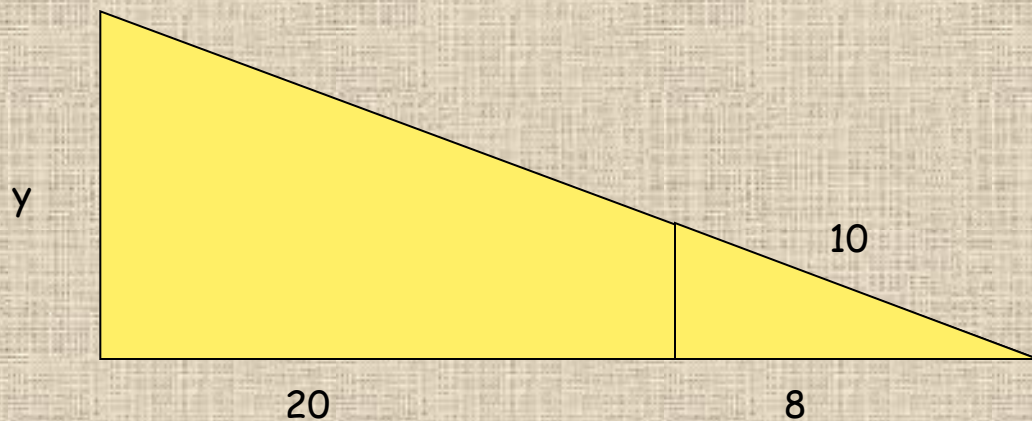
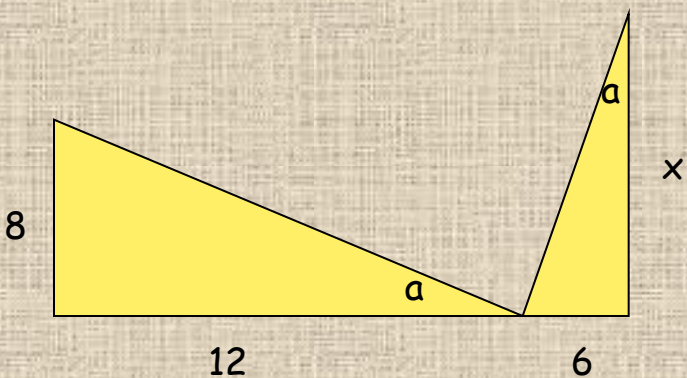
$$\frac{S_{ABC}}{S_{A_1B_1C_1}} = \frac{AB \cdot BC}{A_1B_1 \cdot B_1C_1} ;$$

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$$

Следовательно, $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$



№ 550.

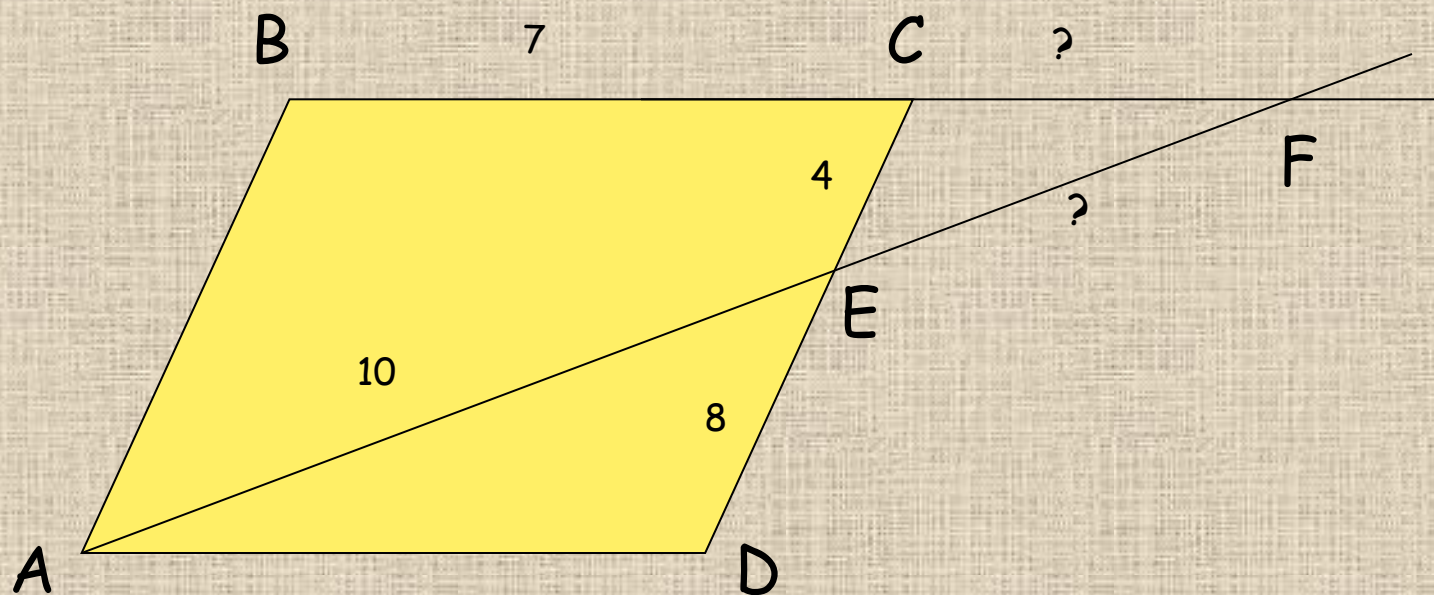


Домашнее задание: п. 59, № 553, 561.

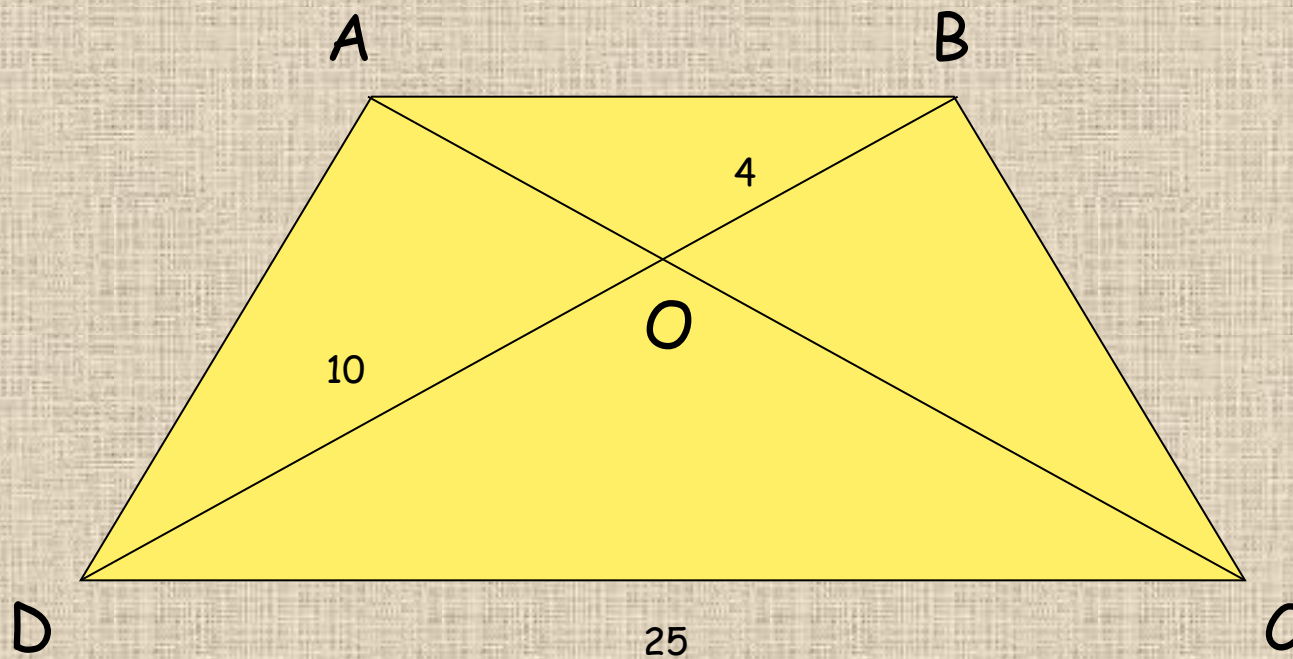


Урок 36. Первый признак подобия треугольников.

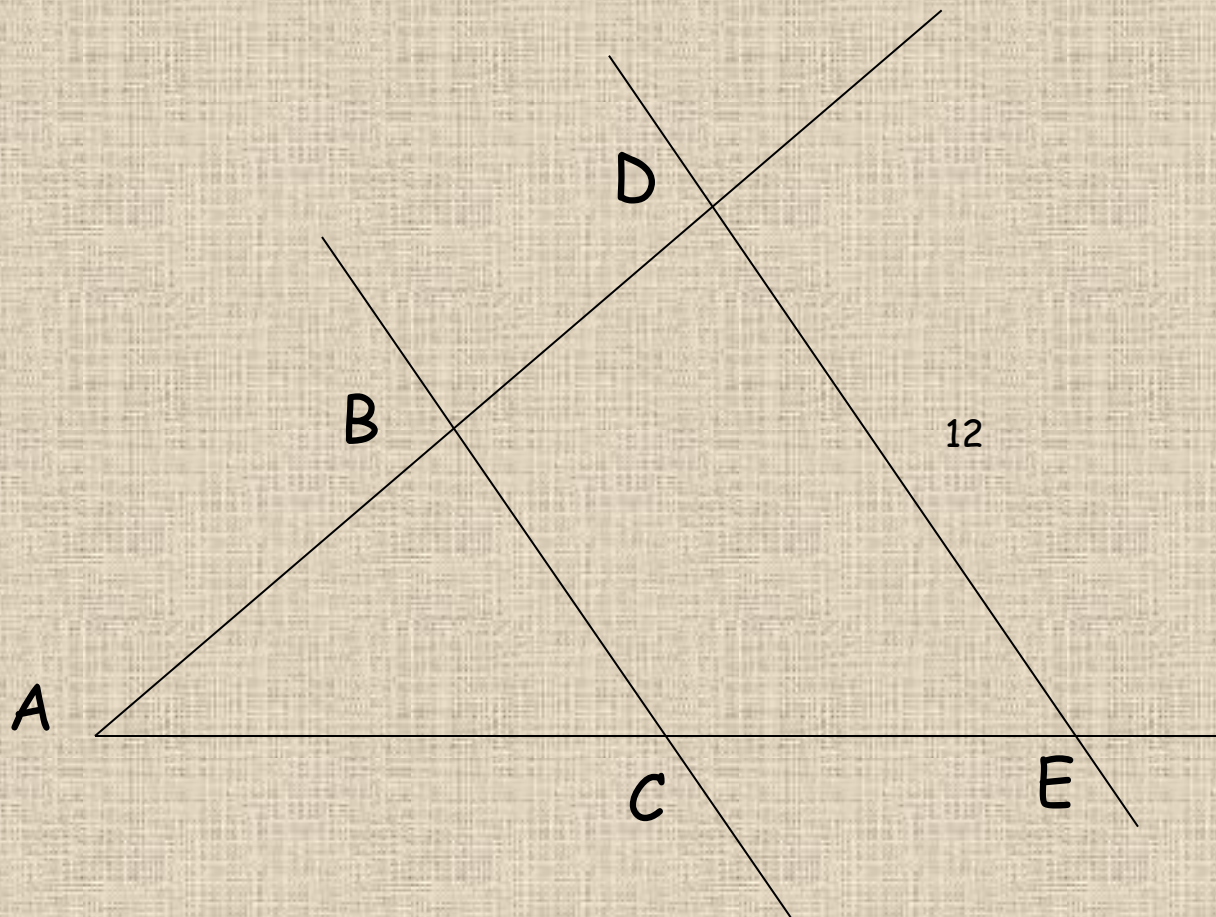
№ 551(а)



№ 552(a)



№ 557(В).



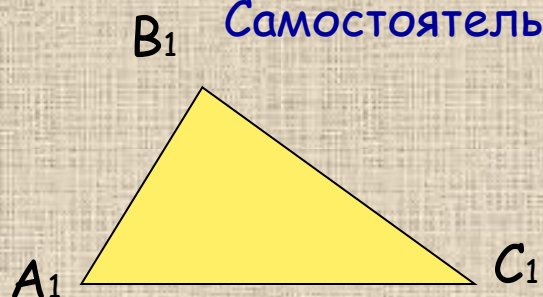
Домашнее задание: стр.160, вопросы
1-5,

п.56-59 №552(В)

Урок 37. Второй признак подобия треугольников.



Самостоятельная работа: стр.120, вариант А1,А2, №1.



ТЕОРЕМА. Если 2 стороны одного треугольника пропорциональны двум сторонам другого треугольника и углы, заключенные между этими сторонами равны, то такие треугольники подобны.

Доказательство:

Достаточно доказать, что углы $C = C_1$.

Рассмотрим $\triangle AB_2C$, у которого углы $1=A_1$, $2=C_1$.

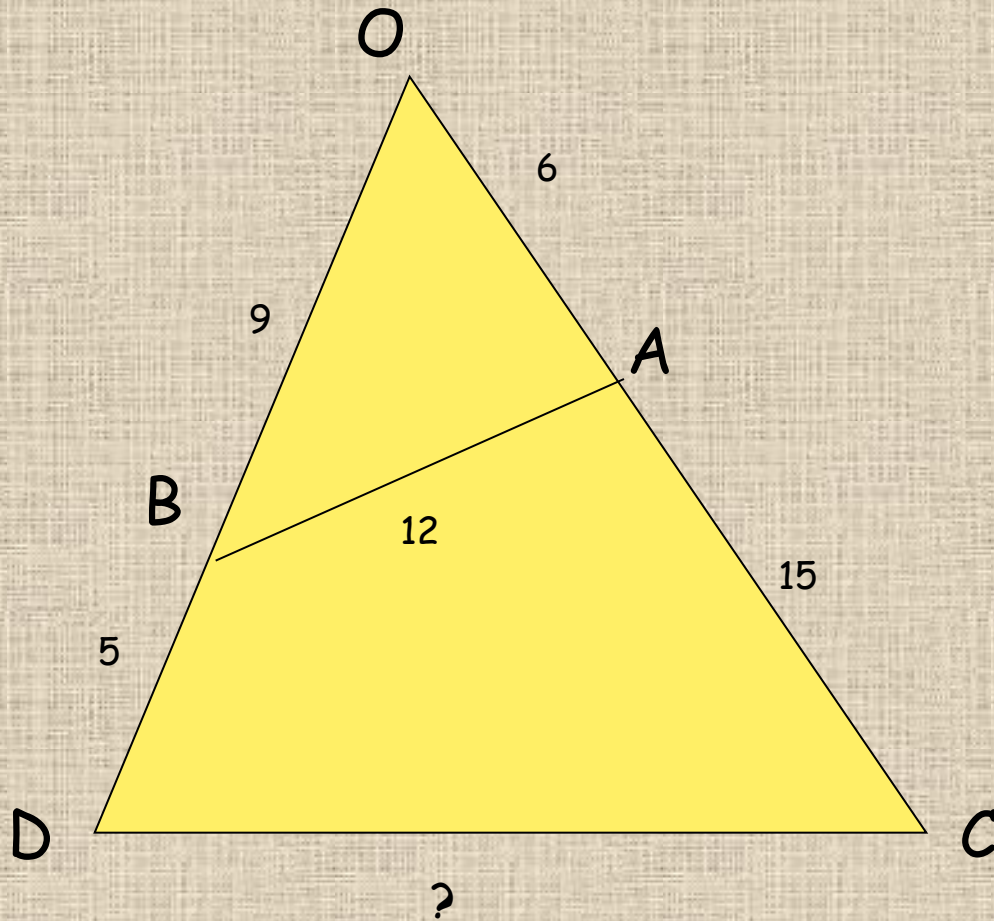
$\triangle A_1B_1C_1 \sim \triangle AB_2C$ по 2 углам, следовательно

$$\frac{AC}{A_1C_1} = \frac{AB_2}{A_1B_1}; \text{ но } \frac{AC}{A_1C_1} = \frac{AB}{A_1B_1}$$

Значит $AB_2 = AB$ и $\triangle AB_2C = \triangle ABC$ по 2 сторонам и углу между ними \Rightarrow угол $C=2$, но угол $2=C_1 \Rightarrow$ угол $C_1 = C \Rightarrow \triangle A_1B_1C_1 \sim \triangle ABC$ по 2 углам



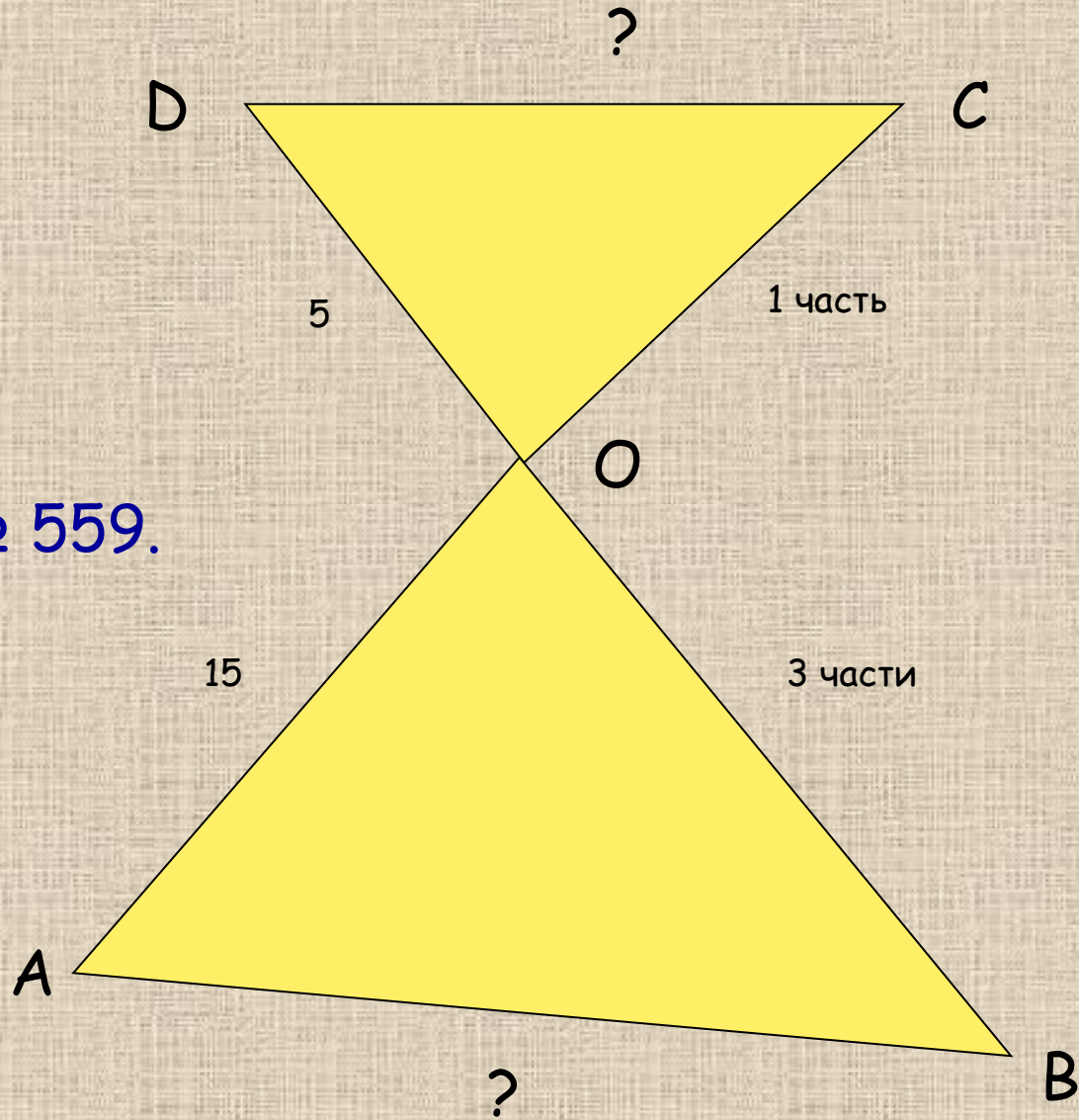
Задача 1.



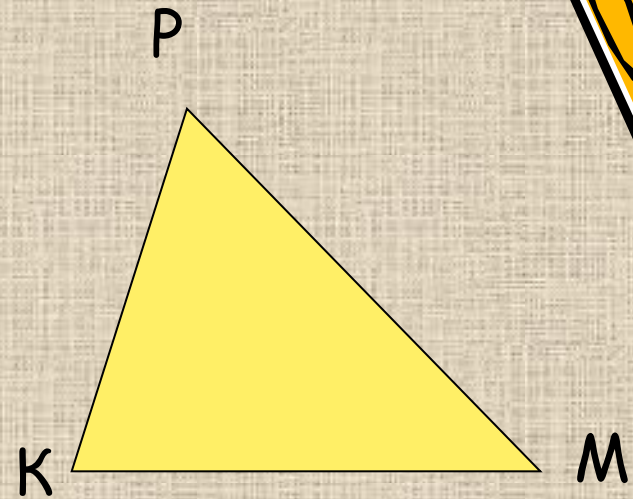
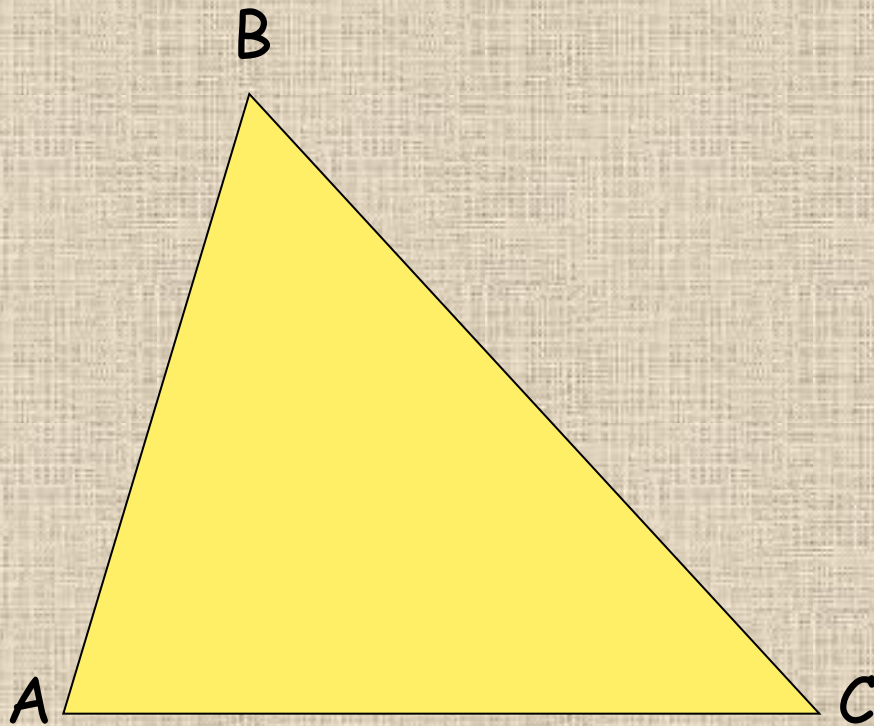
Задача 2.

Домашнее
задание:

п. 59, 60, № 559.



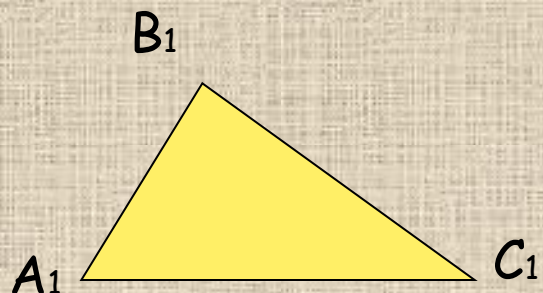
Задача.



Стороны треугольника ABC в 2,5 раза больше сторон треугольника KPM, углы $B = P$, $AC + KM = 4,2$. Найти AC и KM.



Урок 38. Третий признак подобия треугольников.



ТЕОРЕМА. Если 3 стороны одного треугольника пропорциональны трем сторонам другого треугольника, то такие треугольники подобны.

Доказательство:

Достаточно доказать, что углы $A = A_1$.
Рассмотрим $\triangle AB_2C$, у которого углы $1 = A_1$, $2 = C_1$.
 $\triangle A_1B_1C_1 \sim \triangle AB_2C$ по 2 углам, следовательно

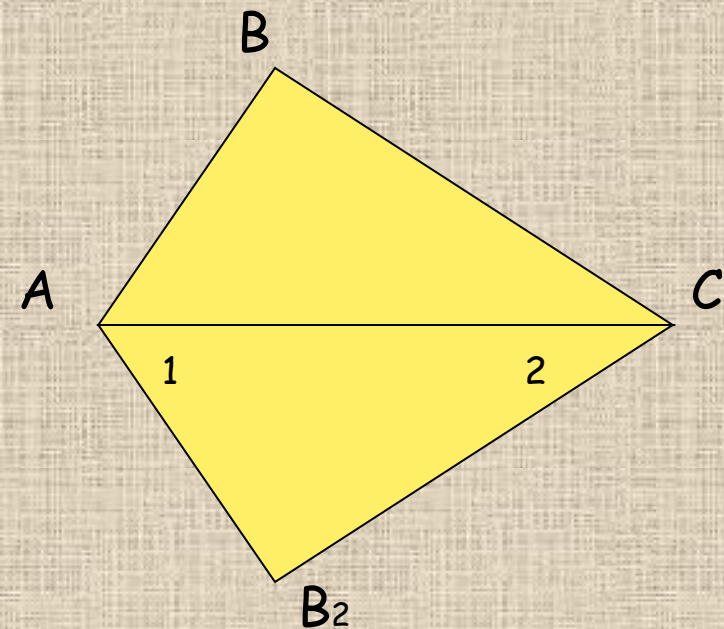
$$\frac{AB_2}{A_1B_1} = \frac{B_2C}{B_1C_1} = \frac{CA}{C_1A_1}$$

Но мы знаем, что

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{CA}{C_1A_1}$$

Значит $AB_2 = AB$, $CB_2 = CB$ и $\triangle AB_2C = \triangle ABC$ по 2 сторонам и углу между ними \Rightarrow угол $A = 1$, но

$1 = A_1 \Rightarrow$ угол $C_1 = C \Rightarrow \triangle A_1B_1C_1 \sim \triangle ABC$ по 2 признаку



Задачи.

1. Подобны ли $\triangle ABC$ и $\triangle KPM$, если $AB = 1\text{ м}$, $AC = 2\text{ м}$, $BC = 1,5\text{ м}$, $KP = 8\text{ дм}$, $KM = 16\text{ дм}$, $PM = 12\text{ дм}$.
2. Стороны треугольника равны $0,8\text{ м}$, $1,6\text{ м}$, 2 м . Найти стороны подобного ему треугольника, периметр которого равен $5,5\text{ м}$.

Домашнее задание: п. 59-61, № 560.



Математический диктант.



1. Третий признак подобия треугольников.
2. Второй признак подобия треугольников.
3. У двух треугольников по одному равному углу. Какого условия недостает, чтобы треугольники были подобны по 1 признаку?
4. Стороны одного треугольника равны 3 см, 6 см и 7 см, а 2 стороны подобного ему треугольника равны 15 см и 35 см. Найти третью сторону.
5. Соответствующие катеты двух подобных треугольников 6 дм и 18 дм. Найти гипотенузу меньшего треугольника, если гипотенуза большего 27 дм.

1. Первый признак подобия треугольников.
2. Третий признак подобия треугольников.
3. У двух треугольников по одному равному углу. Какого условия недостает, чтобы треугольники были подобны по 2 признаку?
4. Соответствующие катеты двух подобных треугольников 5 дм и 10 дм. Найти гипотенузу большего треугольника, если гипотенуза меньшего 7 дм.
5. Стороны одного треугольника равны 15 см, 35 см и 30 см, а 2 стороны подобного ему треугольника равны 6 см и 7 см. Найти третью сторону.



ОТВЕТЫ.

1. По 3 пропорциональным сторонам.
2. По 2 пропорциональным сторонам и углу между ними.
3. Пара равных углов.
4. 30 см.
5. 9 дм.

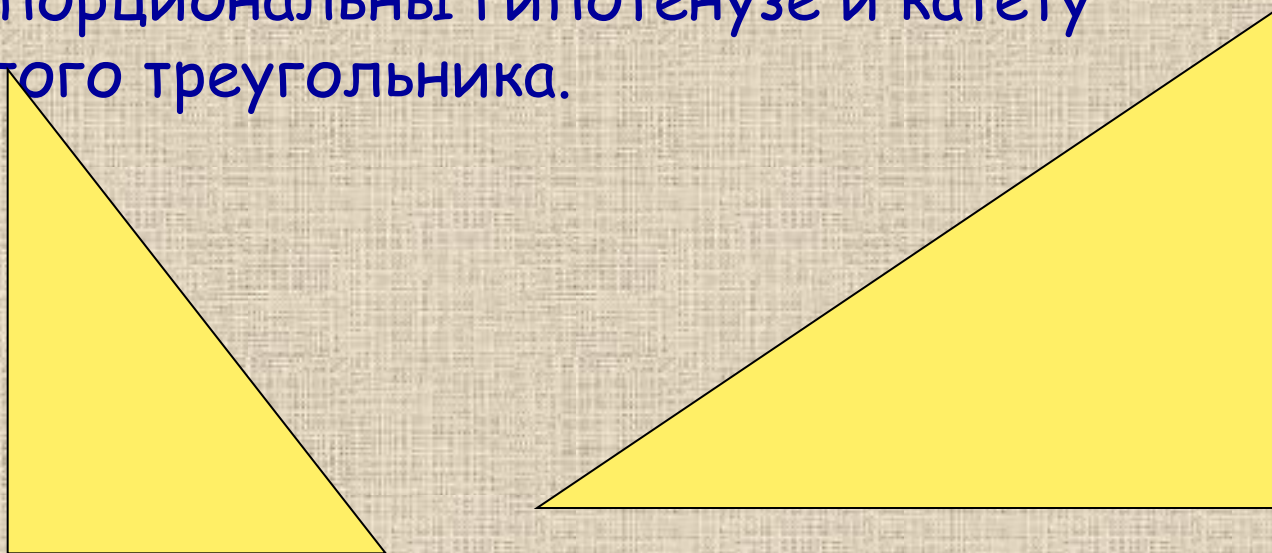
1. По 2 равным углам.
2. По 3 пропорциональным сторонам.
3. Пропорциональность сторон угла.
4. 14 дм.
5. 3 м.



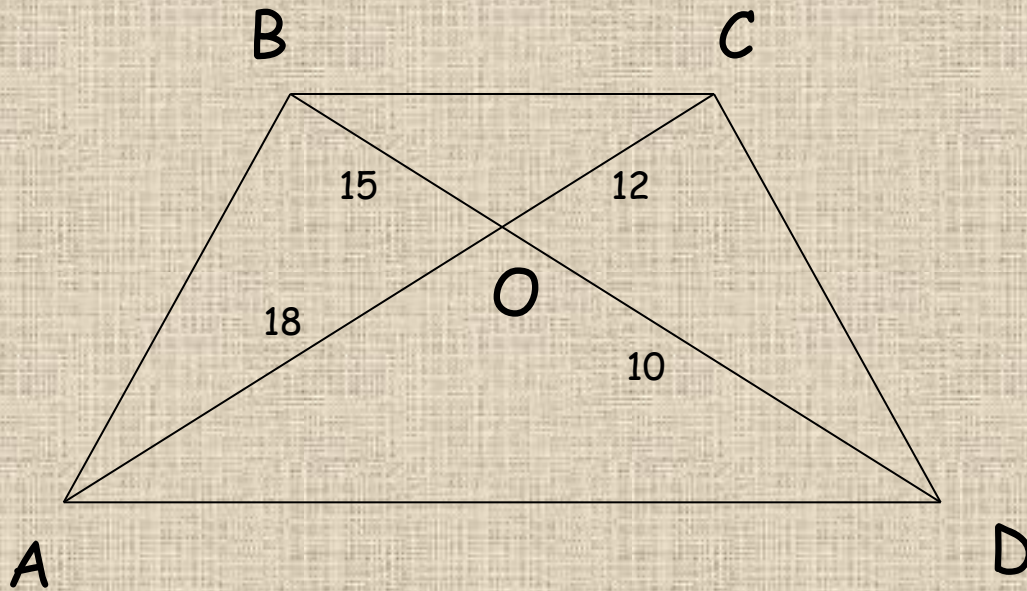
Подобие прямоугольных треугольников.



- Два прямоугольных треугольника подобны, если:
 1. У них есть по равному острому углу.
 2. Катеты одного треугольника пропорциональны катетам другого треугольника.
 3. Гипотенуза и катет одного треугольника пропорциональны гипотенузе и катету другого треугольника.



Задача.



Доказать, что $ABCD$ - трапеция.

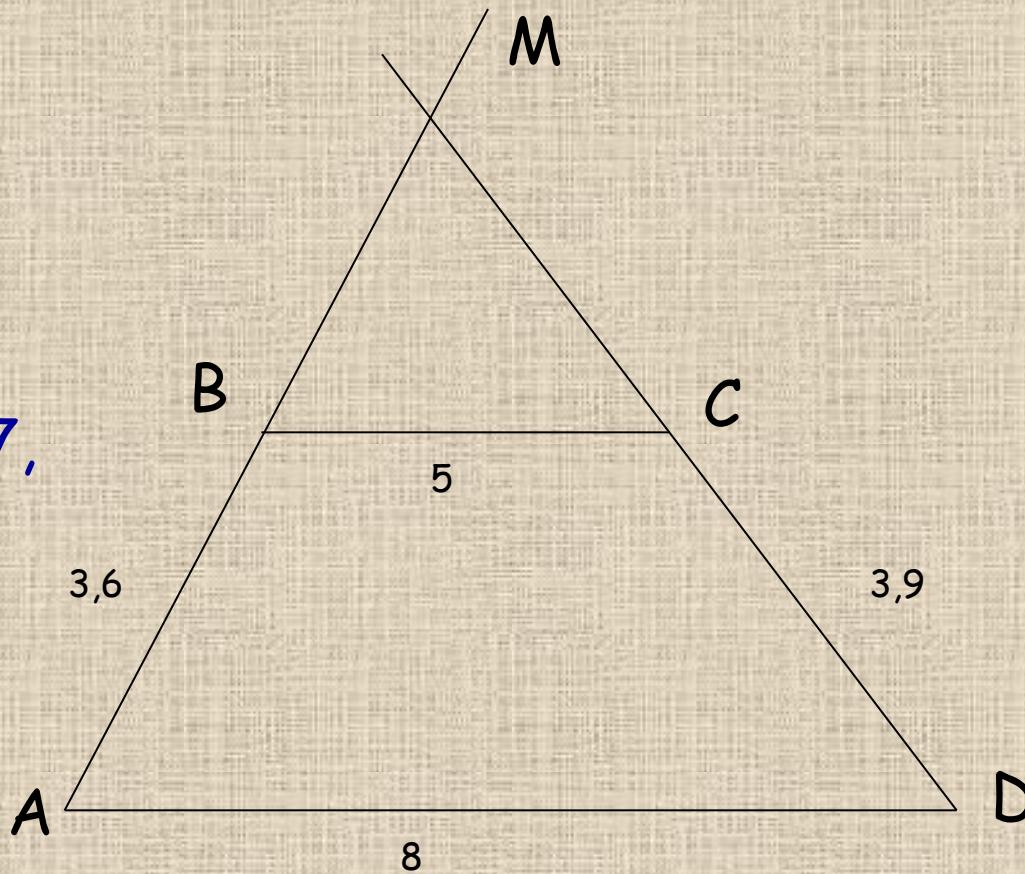


№ 554.

Домашнее
задание:

п. 59-61,

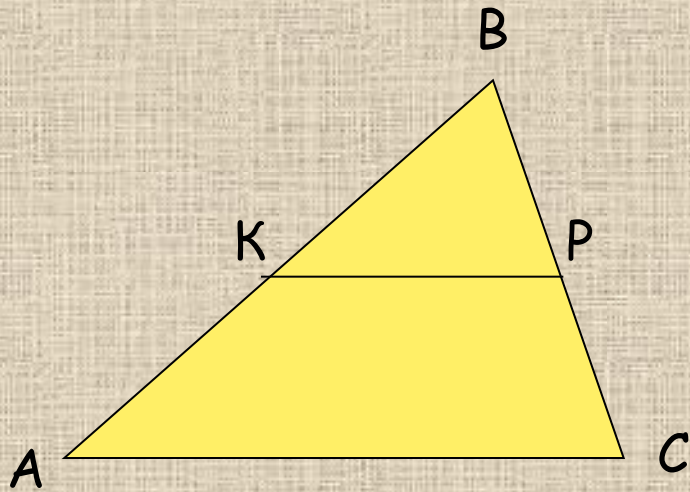
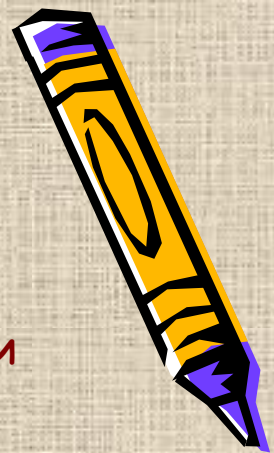
Стр. 160,
вопросы 1-7,
задача



Задача. Продолжение боковых сторон AB и CD трапеции ABCD пересекаются в точке E. Найти стороны $\triangle AED$, если $AB = 5$ см, $BC = 10$ см, $AD = 15$ см, $CD = 8$ см.



Урок 39. Средняя линия треугольника.



Средней линией треугольника называется отрезок, соединяющий середины двух его сторон.

ТЕОРЕМА.

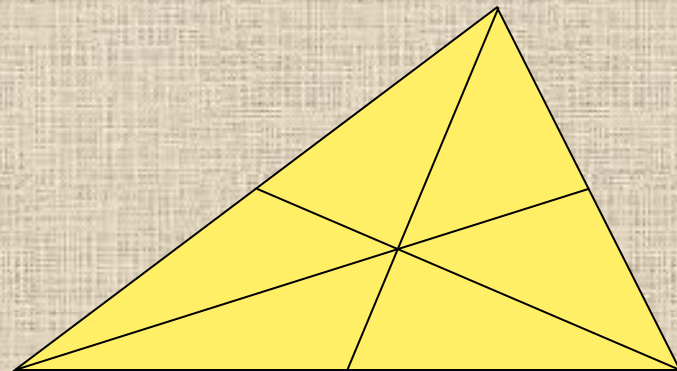
Средняя линия треугольника параллельна одной из его сторон и равна половине этой стороны.

Доказательство:

$\triangle ABC \sim \triangle KBP$, так как угол В-общий, а стороны АВ и КВ, СВ и РВ пропорциональны \Rightarrow угол А=ВКР, но это соответственные углы \Rightarrow $KP \parallel AC$.

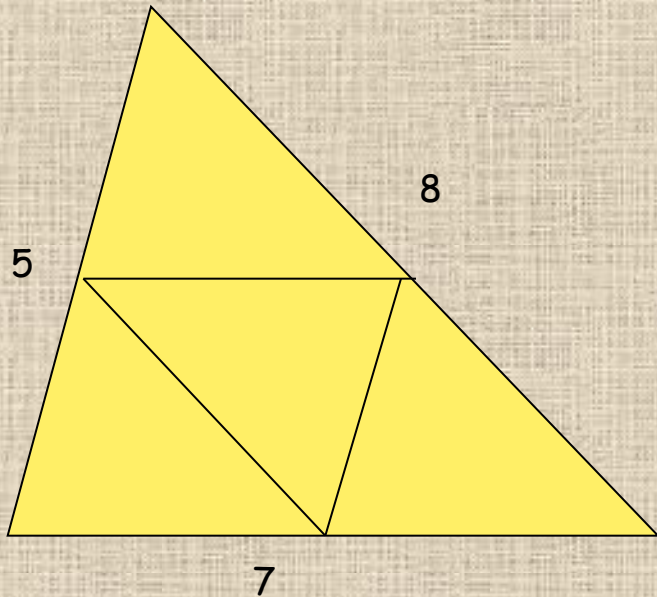
$$\frac{KB}{AB} = \frac{KB}{2KB} = \frac{1}{2}; \frac{BP}{BC} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{KP}{AC} = \frac{1}{2} \Rightarrow KP = \frac{1}{2} AC$$

ТЕОРЕМА. Медианы треугольника пересекаются в одной точке, которая делит каждую медиану в отношении 2:1, считая от вершины.

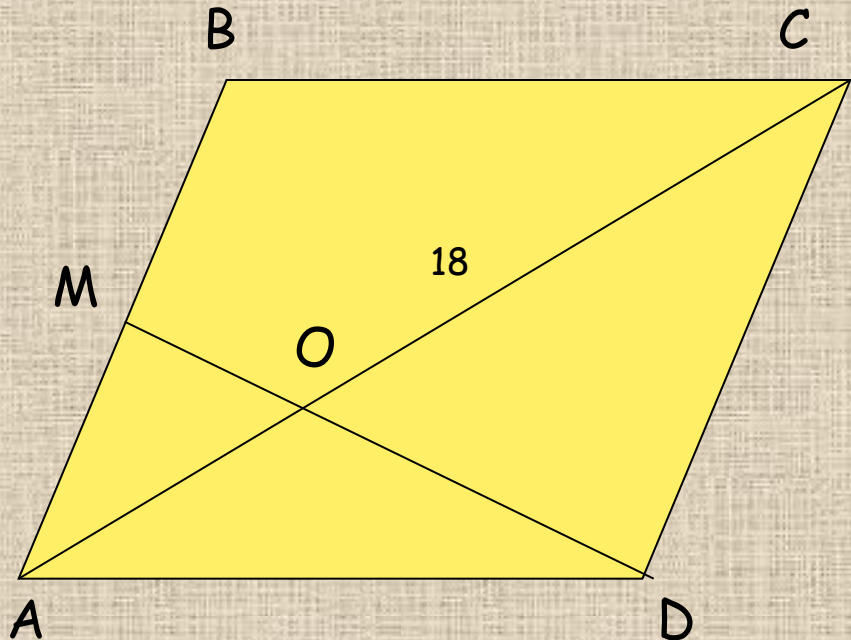


Решение задач.

№ 564.



№ 570.



Домашнее задание: п. 62, № 566.



Математический диктант.



1. Две стороны треугольника соединили отрезком, непараллельным третьей стороне. Является ли этот отрезок средней линией треугольника?
2. Сторона AB $\triangle ABC$ равна 6 см. Чему равна средняя линия треугольника, параллельная этой стороне?
3. Точки M , P и O - середины сторон $\triangle ABC$. Найти стороны $\triangle ABC$, если стороны $\triangle MPO$ равны 3 см, 4 см и 5 см.
4. Концы отрезка AB лежат на двух сторонах треугольника, а длина этого отрезка равна половине третьей стороны. Обязательно ли этот отрезок является средней линией треугольника?

1. Точки A и B являются серединами двух сторон треугольника. Как называется отрезок AB ?
2. Средней линией $\triangle ABC$, параллельная стороне BC , равна 4 см. Найти сторону BC .
3. Точки A , B , C - середины сторон $\triangle MPO$. Найти периметр $\triangle ABC$, если отрезки MP , PO и MO равны 3 дм, 4 дм и 5 дм.
4. Концы отрезка KP лежат на двух сторонах треугольника, он параллелен третьей стороне треугольника и равен ее половине. Является ли KP средней линией?



ОТВЕТЫ.

1. Нет
2. Средняя линия
3. 24 см
4. Нет

1. Средняя линия
2. 8 см
3. 6 дм
4. Нет

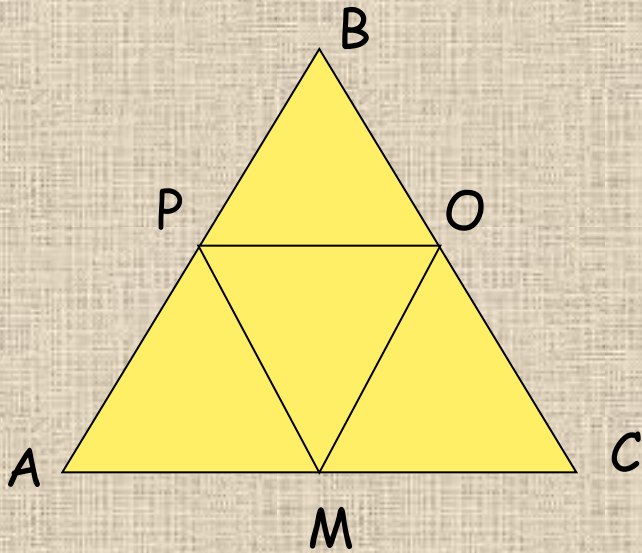


Задачи.

1. Дано:

$$P_{ABC} = 12 \text{ см}$$

Найти: P_{MPO}

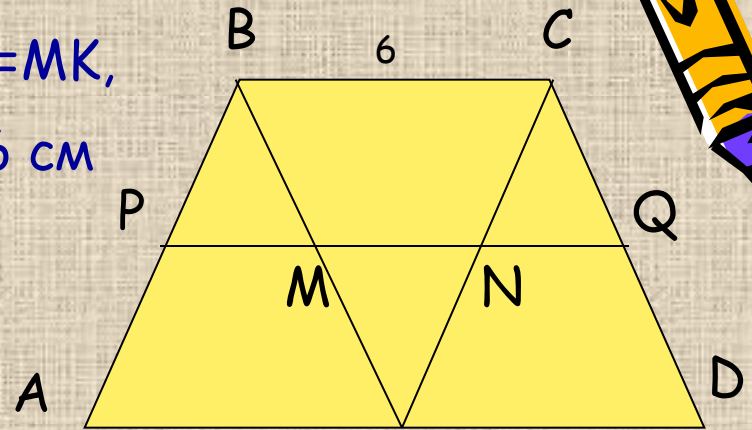


2. Дано:

$$AD = 2BC, MB = MK,$$

$$NC = NK, BC = 6 \text{ см}$$

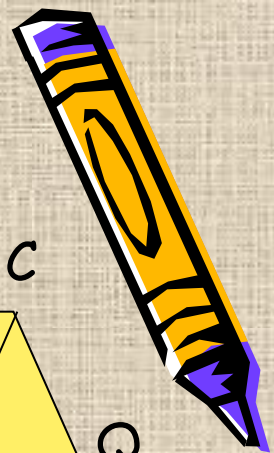
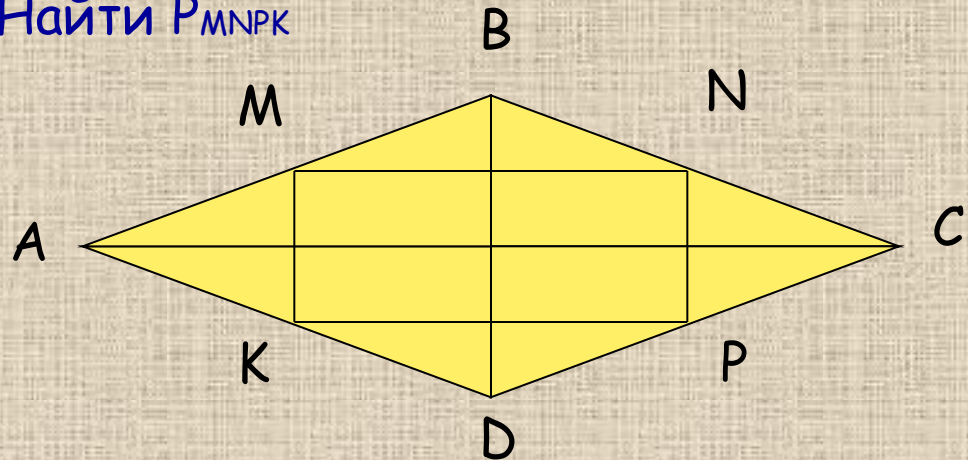
Найти PQ



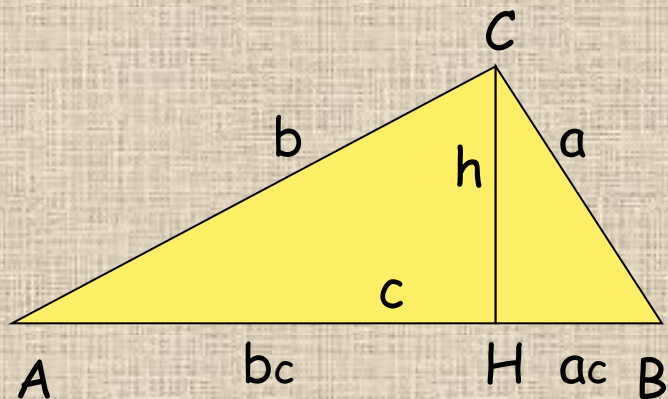
3. Дано:

$$AC = 10 \text{ см}, BD = 8 \text{ см}$$

Найти P_{MNPK}



Урок 40. Пропорциональные отрезки в прямоугольном треугольнике.



Высота прямоугольного треугольника, проведенная из вершины прямого угла, делит треугольник на 2 подобных прямоугольных треугольника, каждый из которых подобен данному треугольнику.



- Признак подобия прямоугольных треугольников. Два прямоугольных треугольника подобны, если у них есть по равному острому углу.
- Отрезок XY называется средним пропорциональным (средним геометрическим) для отрезков AB и CD , если $XY = \sqrt{AB \cdot CD}$
- Свойство 1. Высота прямоугольного треугольника, проведенная из вершины прямого угла, есть среднее пропорциональное между проекциями катетов на гипотенузу.

$$CH = \sqrt{AH \cdot BH}$$

- Свойство 2. Катет прямоугольного треугольника есть среднее пропорциональное между гипотенузой и проекцией этого катета на гипотенузу.

$$AC = \sqrt{AB \cdot AH};$$

$$BC = \sqrt{AB \cdot BH}$$

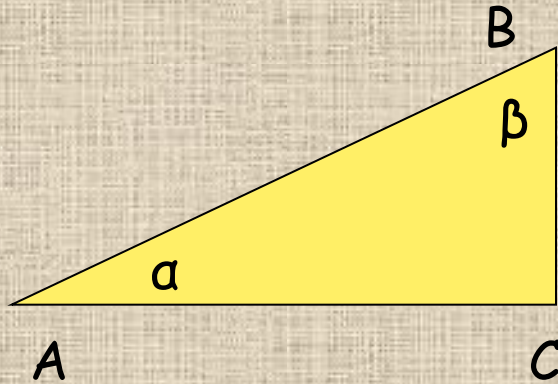
- Решение задач: № 572, 575, 577.

- Домашнее задание:
стр.160, вопросы 8-11, принести циркуль,
№ 576, 578-в общую тетрадь.

- Проверочная работа.
стр. 124, вариант А1, А2,
задачи 1, 2.



Урок 42. Синус, косинус и тангенс острого угла прямоугольного треугольника.



$$\sin \alpha = \frac{BC}{AB}$$

$$\cos \alpha = \frac{AC}{AB}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{BC}{AC}$$

- Синусом острого угла прямоугольного треугольника называется отношение противолежащего катета к гипотенузе.
- Косинусом острого угла прямоугольного треугольника называется отношение прилежащего катета к гипотенузе.
- Тангенсом острого угла прямоугольного треугольника называется отношение противолежащего катета к прилежащему.
- Тангенс угла равен отношению синуса к косинусу этого угла.

$$\frac{\sin A}{\cos A} = \frac{\frac{BC}{AB}}{\frac{AC}{AB}} = \frac{BC}{AC} = \operatorname{tg} A$$



Основное тригонометрическое тождество.

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = ?$$

$$\frac{BC^2}{AB^2} + \frac{AC^2}{AB^2} = \frac{BC^2 + AC^2}{AB^2} = \frac{AB^2}{AB^2} = 1$$

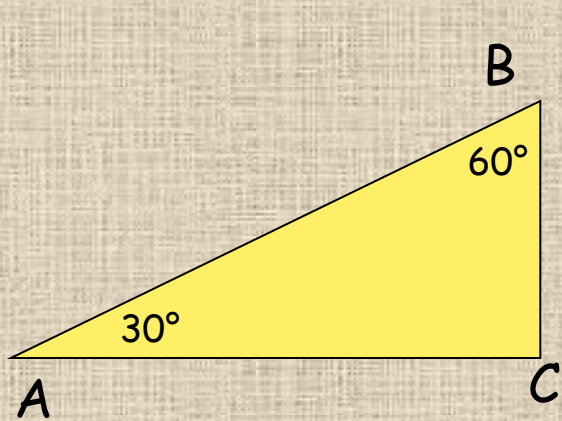
$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

Решение задач: № 591(а,б), 592(а,в,д), 593(а,в).

Домашнее задание: п.66, № 593(б,г), 592(б,г,е), 591(в, г).



Урок 43. Значения синуса, косинуса и тангенса для углов 30° , 45° , 60° .



$$BC = \frac{1}{2} AB,$$

$$\sin A = \sin 30 = \frac{BC}{AB} = \frac{\frac{1}{2} AB}{AB} = \frac{1}{2};$$

$$\cos A = \cos 30 = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$\operatorname{tg} 30 = \frac{\sin 30}{\cos 30} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}};$$

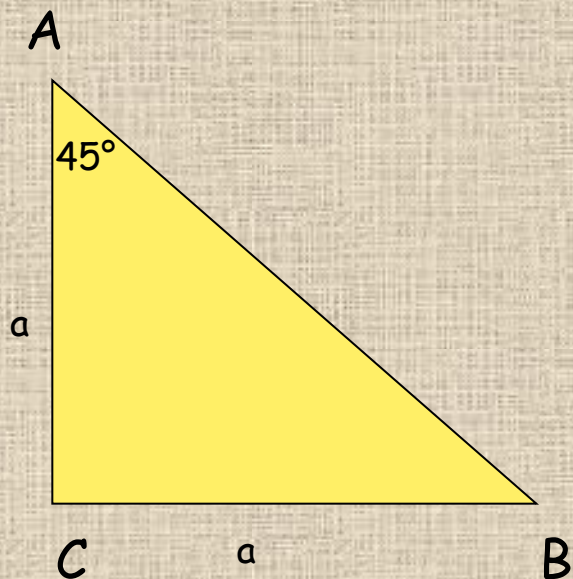
$$\cos B = \cos 60 = \frac{BC}{AB} = \frac{\frac{1}{2} AB}{AB} = \frac{1}{2};$$

$$\sin 60 = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$\operatorname{tg} 60 = \frac{\sin 60}{\cos 60} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3};$$



Урок 43. Значения синуса, косинуса и тангенса для углов 30° , 45° , 60° .



Пусть $AC = BC = a$, тогда

$$AB = \sqrt{a^2 + a^2} = \sqrt{2a^2} = a\sqrt{2};$$

$$\sin 45 = \frac{BC}{AB} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\cos 45 = \frac{AC}{AB} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\operatorname{tg} 45 = \frac{\sin 45}{\cos 45} = 1.$$



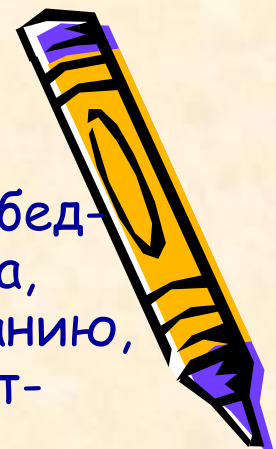
Решение задач.

1. Найти площадь равнобедренного прямоугольного треугольника с основанием 10 см и углом при основании 45° .
2. Найти катеты прямоугольного треугольника, гипотенуза которого 2 см, один из острых углов 30° .
3. В треугольнике ABC угол $A=45^\circ$, угол $C=60^\circ$, $BC=2$ см. Найти AC.
4. № 600.

Домашнее задание: п. 66, 67, № 602.



Контрольная работа № 4.



1. Средняя линия равнобедренного треугольника, параллельная боковой стороне, равна 13 см, а медиана, проведенная к основанию - 24 см. Найти среднюю линию, параллельную основанию треугольника.
2. Найти $\sin \alpha$ и $\operatorname{tg} \alpha$, если $\cos \alpha = 8/17$.
3. Найти синус, косинус тангенс большего острого угла прямоугольного треугольника с катетами 7 см и 24 см.

1. Средняя линия равнобедренного треугольника, параллельная основанию, равна 16 см, а биссектриса, проведенная к основанию - 30 см. Найти среднюю линию, параллельную боковой стороне треугольника.
2. Найти $\cos \alpha$ и $\operatorname{tg} \alpha$, если $\sin \alpha = 5/12$.
3. Найти синус, косинус тангенс меньшего острого угла прямоугольного треугольника с катетом 40 см и гипотенузой 41 см.



