§6 Главные направления линии второго порядка

Главные диаметры

- Опр. Направление называется главным, если оно сопряжено с перпендикулярным ему направлением.

Направление будет главным, если

1) $\vec{q}$ и $\vec{p}$ - взаимно сопряженные.
2) $\vec{q}$ и $\vec{p}$ - перпендикулярные.

$\vec{p}(p_1, p_2)$, $\vec{q}\ (q_1, q_2)$

$$1)\ a_{11}p_1q_1 + a_{12}p_1q_2 + a_{12}p_2q_1 + a_{22}p_2q_2 = 0$$

$$2)\ p_1q_1 + p_2q_2 = 0$$

Т.е. $\vec{q}(-p_2, p_1)$ – тогда..

Главные диаметры

- $-a_{11}p_1p_2 + a_{12}p_1p_1 - a_{12}p_2p_2 + a_{22}p_1p_2 = 0$

$(a_{22} - a_{11})p_1p_2 + a_{12}({p_1}^2 - {p_2}^2) = 0$

Это условие, из которого определяются главные направления.

Главные диаметры

Теорема. Относительно любой линии второго порядка, отличной от окружности, существуют два и только два главных направления. Относительно окружности любое направление плоскости является главным.

Доказательство. Пусть в R{O,$\vec{i}$, $\vec{j}$} линия задана уравнением:

$$a_{11}x^2+2\,a_{12}xy + a_{22}y^2+ 2a_1x+2\,a_2y+ a_0=0$$

$\vec{p}(p_1, p_2)$ – вектор главного направления;

$\vec{q}\ (q_1, q_2)$ – сопряженное направление.

Главные диаметры

- $a_{11}p_1q_1 + a_{12}p_1q_2 + a_{12}p_2q_1 + a_{22}p_2q_2 = 0$

-$a_{11}p_1p_2 + a_{12}p_1p_1 - a_{12}p_2p_2 + a_{22}p_1p_2 = 0$

$(a_{22} - a_{11})p_1p_2 + a_{12}({p_1}^2 - {p_2}^2) = 0$

Рассмотрим сколько главных направлений относительно линии второго порядка существует:

1) а) $a_{12} \neq 0$. Тогда $p_1 \neq 0$,

$$a_{22} - a_{11} \neq 0, \frac{p_2}{p_1} = k.$$

Главные диаметры

- Уравнение $a_{12}\left(1-\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^2\right)+(a_{22}-a_{11})\frac{p_2}{p_1}=0$

$$a_{12}(1-k^2)+(a_{22}-a_{11})k=0$$

$$a_{12}k^2-(a_{22}-a_{11})k-a_{12}=0$$

$\mathrm{D}=(a_{22}-a_{11})^2+4{a_{12}}^2>0$

Тогда

$$k_{1,2}=\frac{(a_{22}-a_{11})\pm\sqrt{(a_{22}-a_{11})^2+4{a_{12}}^2}}{2a_{12}}$$

Корни различны, значит направлений два, при этом

$$k_1*k_2=-1.$$

Главные диаметры

б) $a_{12} \neq 0, a_{22} - a_{11} = 0$, т.е. $a_{22} = a_{11}, p_1 = \pm p_2$.

т. е. $p^{\rightarrow}(1,1)$, $p^{\rightarrow}(1,-1)$.

2) $a_{12} = 0, \quad a_{22} - a_{11} \neq 0$. Уравнение

$(a_{22} - a_{11})p_1p_2 + a_{12}({p_1}^2 - {p_2}^2) = 0$, примет вид

$(a_{22} - a_{11})p_1p_2 = 0, p_1 * p_2 = 0$.

Тогда имеется два и только два главных направления:

$p^{\rightarrow}(0,1)$, $p^{\rightarrow}(1,0)$

Главные диаметры

3) $a_{12} = 0, a_{22} - a_{11} = 0.$ т. е. $a_{22} = a_{11} \neq 0$

Тогда уравнение

$$(a_{22} - a_{11})p_1p_2 + a_{12}({p_1}^2 - {p_2}^2) = 0$$

Где $p^{\rightarrow}(p_1, p_2)$ – любое направление.

$$0 * p_1p_2 + 0 * ({p_1}^2 - {p_2}^2) = 0.$$

В этом случае линия имеет уравнение:

$$a_{11}x^2 + a_{11}y^2 + 2a_1x + 2\,a_2y + a_0 = 0$$

$$x^2 + 2\frac{a_1}{a_{11}}x + y^2 + 2\frac{a_2}{a_{11}}y + \frac{a_0}{a_{11}} = 0.$$

Главные диаметры

- $(x+\frac{a_1}{a_{11}})^2+(y+\frac{a_2}{a_{11}})^2=\frac{a_1{}^2+a_2{}^2-a_0a_{11}}{a_{11}{}^2}$

В новом репере R'{O', $i^{\rightarrow}$, $j^{\rightarrow}$}

$x''^2+y''^2=a^2$, где $a^2=\frac{a_1{}^2+a_2{}^2-a_0a_{11}}{a_{11}{}^2}$

Это уравнение задает окружность.

У окружности любое направление является главным. ■