Граф и его элементы

Основные определения

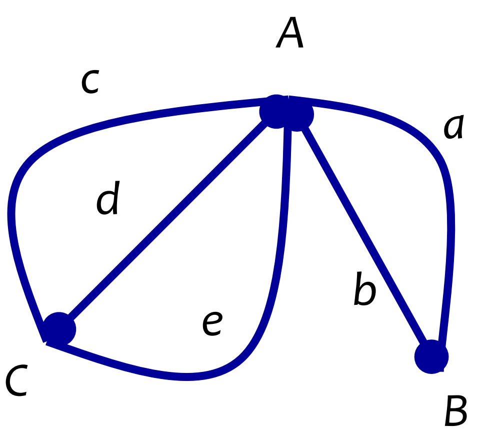
- Переход по слайдам осуществляется только по нажатию левой кнопки мыши клик мыши!!!
- Если есть мигающая стрелка, значит нужно нажатие левой кнопки мыши в любом месте слайд для продолжения презентации!!!!
- После прочтения удалить слайд!

ГРАФОМ G = (V, X) НАЗЫВАЕТСЯ ПАРА ДВУХ КОНЕЧНЫХ МНОЖЕСТВ: МНОЖЕСТВО ТОЧЕК И МНОЖЕСТВО ЛИНИЙ, СОЕДИНЯЮЩИХ НЕКОТОРЫЕ ПАРЫ ТОЧЕК.

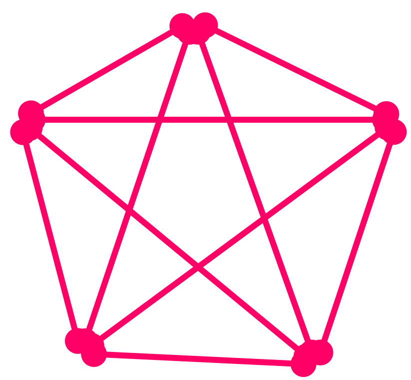
Впервые понятие «граф» ввел в 1936 г. венгерский математик Денни Кёниг. но первая работа по теории графов принадлежала перу великого Леонарда Эйлера и была написана еще в 1736 г.

ТОЧКИ НАЗЫВАЮТСЯ **ВЕРШИНАМИ**, ИЛИ **УЗЛАМИ**, ГРАФА, ЛИНИИ – **РЕБРАМИ** ГРАФА.

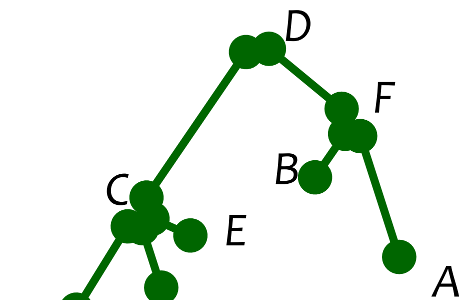
ПРИМЕРЫ ГРАФОВ



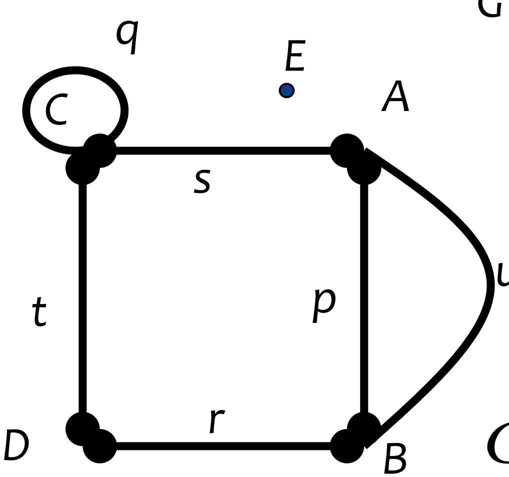
G_1



G_2

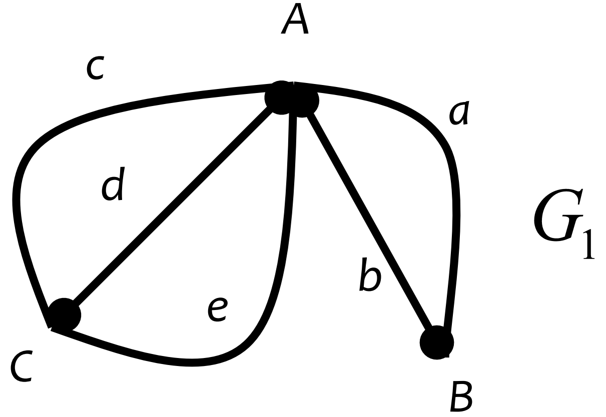


G_3

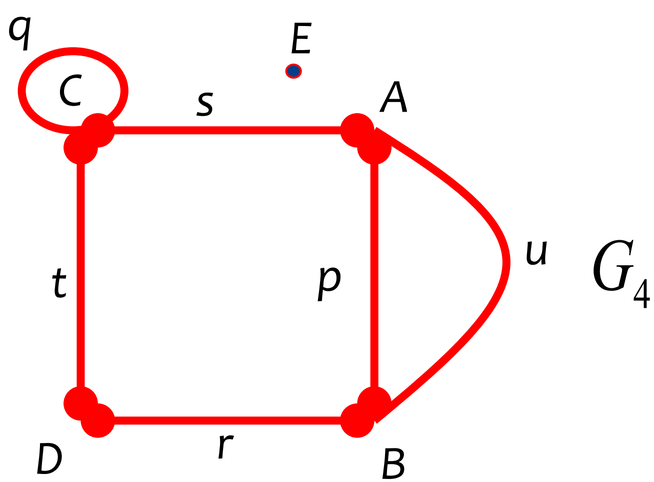


G_4

ЕСЛИ РЕБРО ГРАФА СОЕДИНЯЕТ ДВЕ ЕГО ВЕРШИНЫ, ТО ГОВОРЯТ, ЧТО ЭТО РЕБРО ИМ ИНЦИДЕНТНО. ДВЕ ВЕРШИНЫ ГРАФА НАЗЫВАЮТСЯ СМЕЖНЫМИ, ЕСЛИ СУЩЕСТВУЕТ ИНЦИДЕНТНОЕ ИМ РЕБРО.

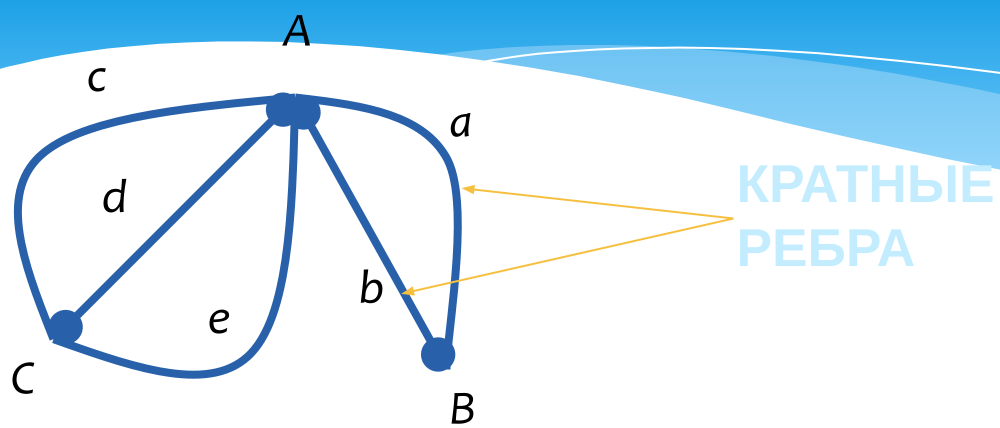


ЕСЛИ ГРАФ ИМЕЕТ РЕБРО, У КОТОРОГО НАЧАЛО И КОНЕЦ СОВПАДАЮТ, ТО ЭТО РЕБРО НАЗЫВАЕТСЯ **ПЕТЛЕЙ** (у графа петля – $q(C,C)$).

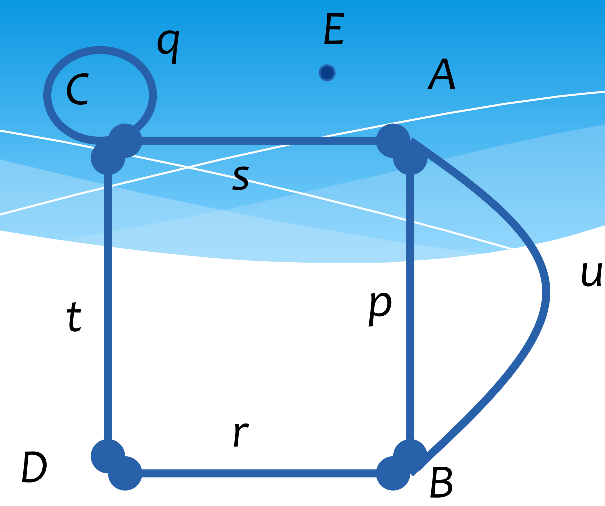


НА РИСУНКЕ СМЕЖНЫМИ ЯВЛЯЮТСЯ ВЕРШИНЫ *A* и *B*, *A* и *C*; СМЕЖНЫМИ ЯВЛЯЮТСЯ РЕБРА *c* и *d*, *a* и *b*.

ДВА РЕБРА НАЗЫВАЮТСЯ **СМЕЖНЫМИ**, ЕСЛИ ОНИ ИМЕЮТ ОБЩУЮ ВЕРШИНУ.



G_1

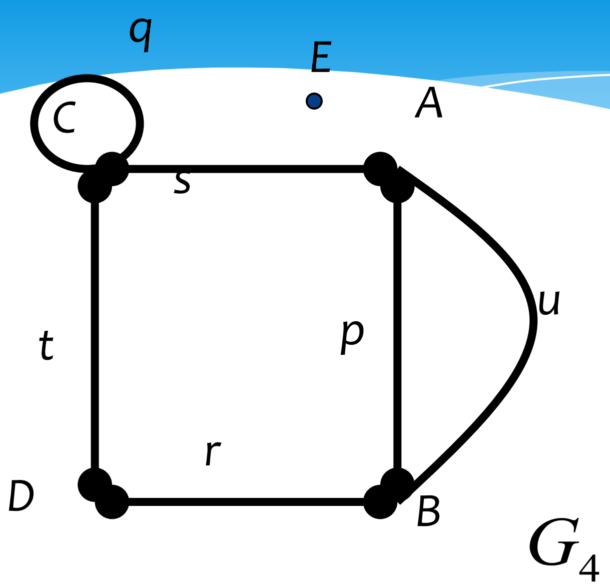


G_4

ЧИСЛО РЕБЕР, ИНЦИДЕНТНЫХ ВЕРШИНЕ *А* , НАЗЫВАЕТСЯ **СТЕПЕНЬЮ** ЭТОЙ ВЕРШИНЫ И ОБОЗНАЧАЕТСЯ *deg*(*A*).

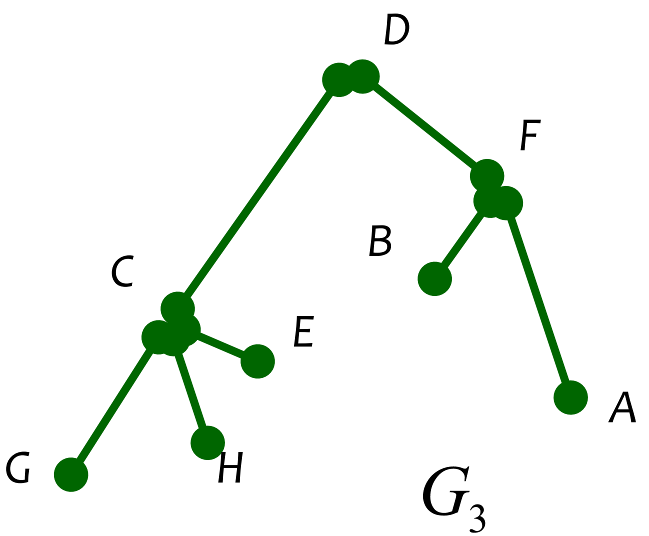
$deg(A) = 3$;
$deg(B) = 3$;
$deg(C) = 4$;
$deg(D) = 2$;
$deg(E) = 0$.

ЕСЛИ ВЕРШИНЕ ИНЦИДЕНТНА ПЕТЛЯ, ОНА ДАЕТ ВКЛАД В СТЕПЕНЬ, РАВНЫЙ ДВУМ, ТАК КАК ОБА КОНЦА ПРИХОДЯТ В ЭТУ ВЕРШИНУ.



$\mathbf{deg(E) = 0}$

E – **ИЗОЛИРОВАННАЯ** ВЕРШИНА



$\mathbf{deg(G) = 1}$

$\mathbf{deg(H) = 1}$

$\mathbf{deg(E) = 1}$

$\mathbf{deg(B) = 1}$

$\mathbf{deg(A) = 1}$

G, H, E, B, A - **ВИСЯЧИЕ** ВЕРШИНЫ

ТЕОРЕМА

В ГРАФЕ G(V, X) СУММА СТЕПЕНЕЙ ВСЕХ ЕГО ВЕРШИН – ЧИСЛО ЧЕТНОЕ, РАВНОЕ УДВОЕННОМУ ЧИСЛУ РЕБЕР ГРАФА:

$$\sum_{i=1}^{n} \deg(V_i) = 2m$$

*ВЕРШИНА НАЗЫВАЕТСЯ **ЧЕТНОЙ (НЕЧЕТНОЙ)**, ЕСЛИ ЕЕ СТЕПЕНЬ – ЧЕТНОЕ(НЕЧЕТНОЕ) ЧИСЛО.*

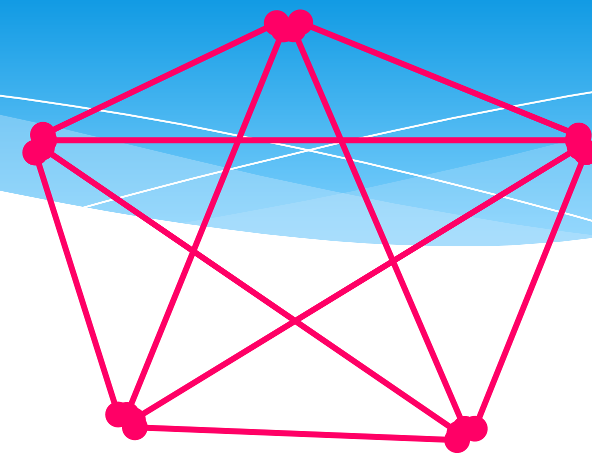
ТЕОРЕМА

ЧИСЛО НЕЧЕТНЫХ ВЕРШИН ЛЮБОГО ГРАФА – ЧЕТНО.

СЛЕДСТВИЕ

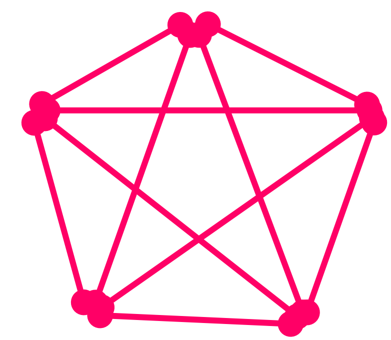
НЕВОЗМОЖНО НАЧЕРТИТЬ ГРАФ С НЕЧЕТНЫМ ЧИСЛОМ НЕЧЕТНЫХ ВЕРШИН.

ГРАФ НАЗЫВАЕТСЯ **ПОЛНЫМ**, ЕСЛИ ЛЮБЫЕ ДВЕ ЕГО РАЗЛИЧНЫЕ ВЕРШИНЫ СОЕДИНЕНЫ ОДНИМ И ТОЛЬКО ОДНИМ РЕБРОМ.



G_2

ДОПОЛНЕНИЕМ ГРАФА НАЗЫВАЕТСЯ ГРАФ С ТЕМИ ЖЕ ВЕРШИНАМИ И ИМЕЮЩИЙ ТЕ И ТОЛЬКО ТЕ РЕБРА, КОТОРЫЕ НЕОБХОДИМО ДОБАВИТЬ К ИСХОДНОМУ ГРАФУ, ЧТОБЫ ОН СТАЛ ПОЛНЫМ.



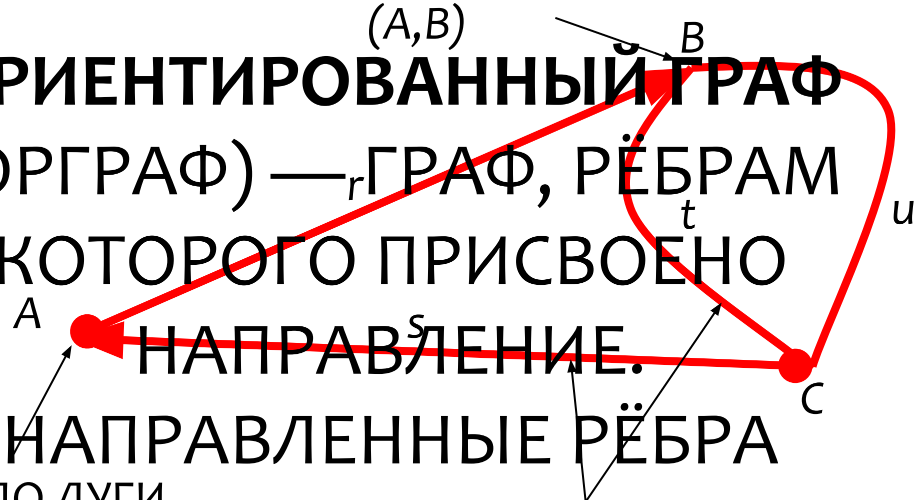
G_5

G_2

ДОПОЛНЕНИЕ

ОРГРАФ

ОРИЕНТИРОВАННЫЙ ГРАФ (ОРГРАФ) — ГРАФ, РЁБРАМ КОТОРОГО ПРИСВОЕНО НАПРАВЛЕНИЕ. НАПРАВЛЕННЫЕ РЁБРА ИМЕНУЮТСЯ **ДУГАМИ.**



СТЕПЕНЬЮ ВХОДА (ВЫХОДА) ВЕРШИНЫ ОРГРАФА НАЗЫВАЕТСЯ ЧИСЛО РЕБЕР, ДЛЯ КОТОРЫХ ЭТА ВЕРШИНА ЯВЛЯЕТСЯ КОНЦОМ (НАЧАЛОМ).

СТЕПЕНИ ВХОДА ВЕРШИН ГРАФА *(см. рис.)*:

$$\deg_+(A) = 1$$

$$\deg_+(B) = 1$$

$$\deg_+(C) = 2$$

СТЕПЕНИ ВЫХОДА ВЕРШИН:

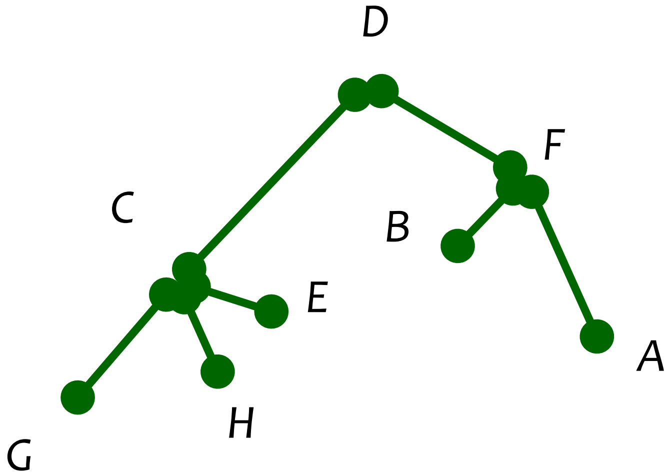
$$\deg_-(A) = 1$$

$$\deg_-(B) = 2$$

$$\deg_-(C) = 1$$

Последовательность ребер неориентированного графа, в которой вторая вершина предыдущего ребра совпадает с первой вершиной следующего, называется **маршрутом.**

Число ребер маршрута называется **длиной** маршрута.



HCDFD – МАРШРУТ ДЛИНОЙ 4.

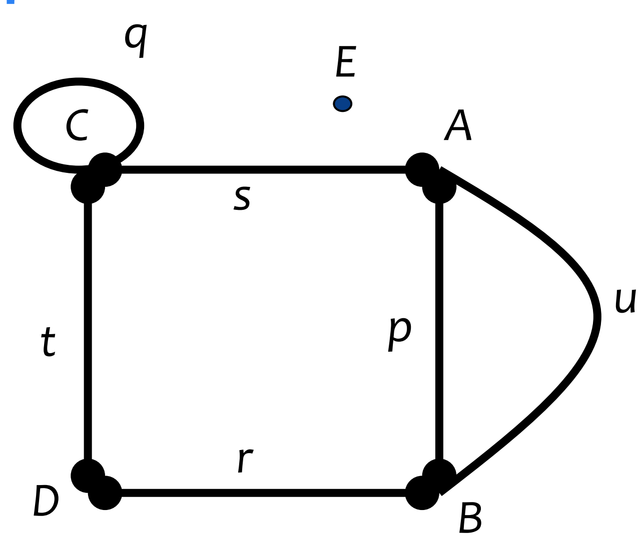
Если начальная вершина маршрута совпадает с конечной, то такой маршрут называется **замкнутым** или **циклом.**

Если ребро встретилось только один раз, то маршрут называется **цепью.**

(*t*, *s*, *p*, *r*) – 4-ЦИКЛ

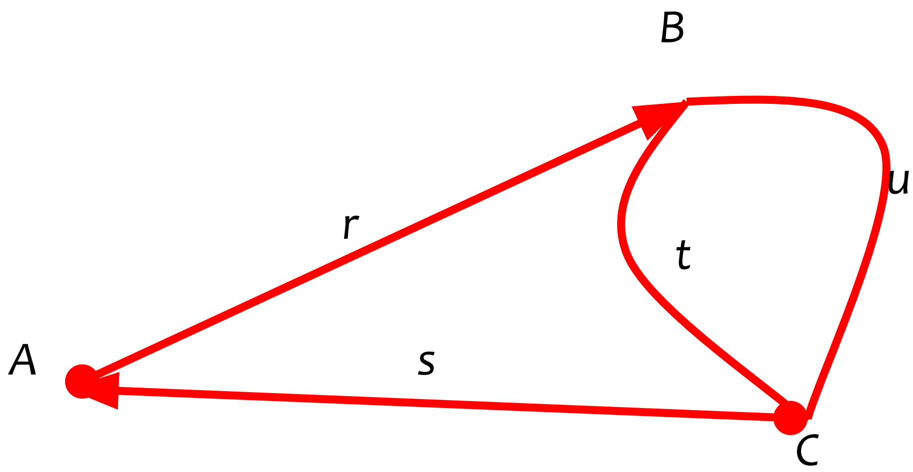
(*t*, *s*, *u*, *r*, *t*, *s*, *p*, *r*) – 8-ЦИКЛ

петля (*q*) – 1-ЦИКЛ



(*t*, *s*, *p*) – 3-ЦЕПЬ

Путь – упорядоченная последовательность ребер ориентированного графа, в которой конец предыдущего ребра
совпадает с началом следующего
и все ребра единственны.



(u, s, r, t) – 4-путь

(r, u) – 2-путь

(s, r, t) и *(u, s, r)* – 3-циклы

ЦИКЛ В ОРГРАФЕ – ПУТЬ, У КОТОРОГО СОВПАДАЮТ НАЧАЛО И КОНЕЦ.

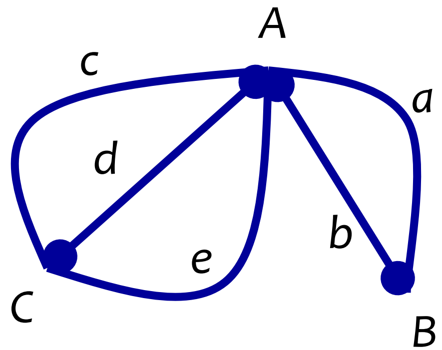
ЦЕПЬ, ПУТЬ И ЦИКЛ В ГРАФЕ НАЗЫВАЮТСЯ **ПРОСТЫМИ**, ЕСЛИ ОНИ ПРОХОДЯТ ЧЕРЕЗ ЛЮБУЮ ИЗ ВЕРШИН НЕ БОЛЕЕ ОДНОГО РАЗА.

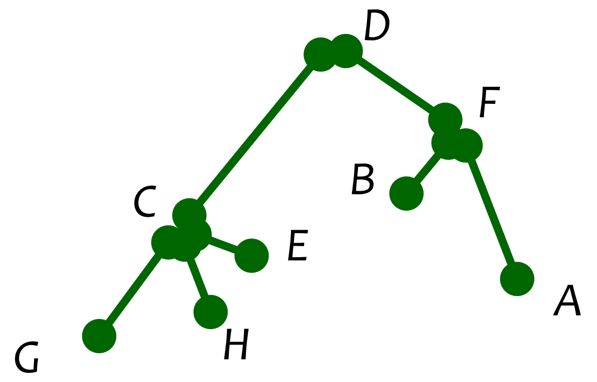
НЕОРИЕНТИРОВАННЫЙ ГРАФ НАЗЫВАЕТСЯ **СВЯЗНЫМ**, ЕСЛИ МЕЖДУ ЛЮБЫМИ ДВУМЯ ЕГО ВЕРШИНАМИ ЕСТЬ МАРШРУТ.

ТЕОРЕМА

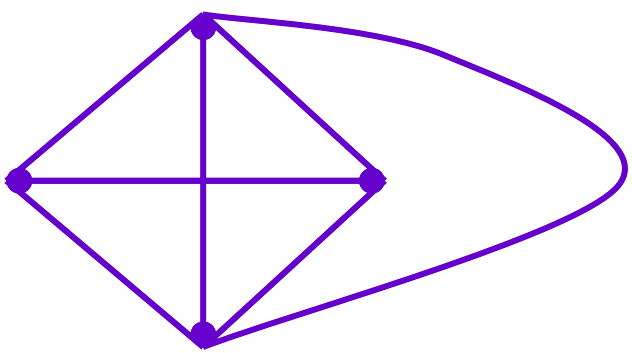
ДЛЯ ТОГО, ЧТОБЫ СВЯЗНЫЙ ГРАФ ЯВЛЯЛСЯ ПРОСТЫМ ЦИКЛОМ, НЕОБХОДИМО И ДОСТАТОЧНО, ЧТОБЫ КАЖДАЯ ЕГО ВЕРШИНА ИМЕЛА СТЕПЕНЬ, РАВНУЮ 2.

ГРАФ G НАЗЫВАЕТСЯ **ПЛАНАРНЫМ (ПЛОСКИМ),** ЕСЛИ СУЩЕСТВУЕТ ТАКОЙ ГРАФ G' , В ИЗОБРАЖЕНИИ КОТОРОГО НА ПЛОСКОСТИ РЕБРА ПЕРЕСЕКАЮТСЯ ТОЛЬКО В ВЕРШИНАХ.





ПЛАНАРНЫЕ ГРАФЫ

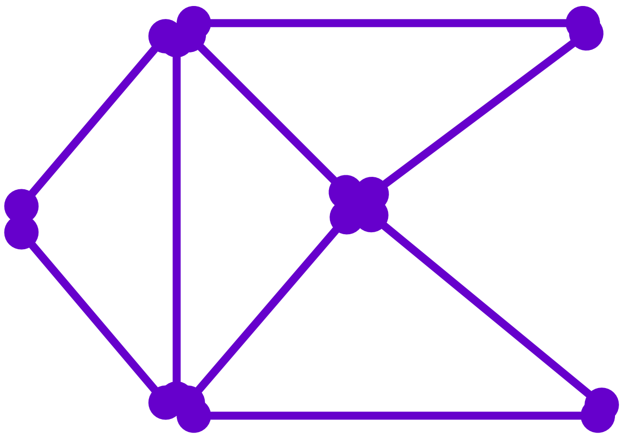


ЭЙЛЕРОВЫМ ПУТЕМ (ЦИКЛОМ) ГРАФА НАЗЫВАЕТСЯ ПУТЬ (ЦИКЛ), КОТОРЫЙ СОДЕРЖИТ ВСЕ РЕБРА ГРАФА ТОЛЬКО ОДИН РАЗ.

ГРАФ, ОБЛАДАЮЩИЙ ЭЙЛЕРОВЫМ ЦИКЛОМ, НАЗЫВАЕТСЯ **ЭЙЛЕРОВЫМ**.

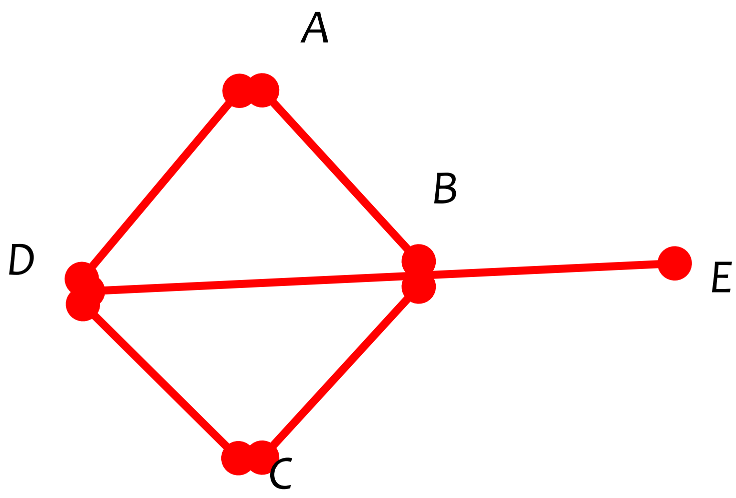
ТЕОРЕМА

ГРАФ ЯВЛЯЕТСЯ ЭЙЛЕРОВЫМ ТОГДА И ТОЛЬКО ТОГДА, КОГДА ОН – СВЯЗНЫЙ ГРАФ, ИМЕЮЩИЙ ВСЕ ЧЕТНЫЕ ВЕРШИНЫ.



ГАМИЛЬТОНОВЫМ ПУТЕМ(ЦИКЛОМ) ГРАФА НАЗЫВАЕТСЯ ПУТЬ(ЦИКЛ), ПРОХОДЯЩИЙ ЧЕРЕЗ КАЖДУЮ ЕГО ВЕРШИНУ ТОЛЬКО ОДИН РАЗ.

ГРАФ, СОДЕРЖАЩИЙ ГАМИЛЬТОНОВ ЦИКЛ, НАЗЫВАЕТСЯ **ГАМИЛЬТОНОВЫМ**.



(C, D, A, B, E) – гамильтонов путь

МАТРИЦЕЙ ИНЦИДЕНТНОСТИ ГРАФА G НАЗЫВАЮТ ТАБЛИЦУ *B*, СОСТОЯЩУЮ ИЗ *n* СТРОК(ВЕРШИНЫ) И *m* СТОЛБЦОВ(РЕБРА), В КОТОРОЙ:

- ДЛЯ НЕОРИЕНТИРОВАННОГО ГРАФА:

$b_{ij} = 1$, ЕСЛИ ВЕРШИНА V_j ИНЦИДЕНТНА РЕБРУ X_j

$b_{ij} = 0$, ЕСЛИ ВЕРШИНА V_i ИНЦИДЕНТНА РЕБРУ X_i

- ДЛЯ ОРИЕНТИРОВАННОГО ГРАФА:

$b_{ij} = 1$, ЕСЛИ ВЕРШИНА V_i ЯВЛЯЕТСЯ НАЧАЛОМ ДУГИ X_j

$b_{ij} = 1$, ЕСЛИ ВЕРШИНА V_j НЕ ИНЦИДЕНТНА ДУГЕ X_j

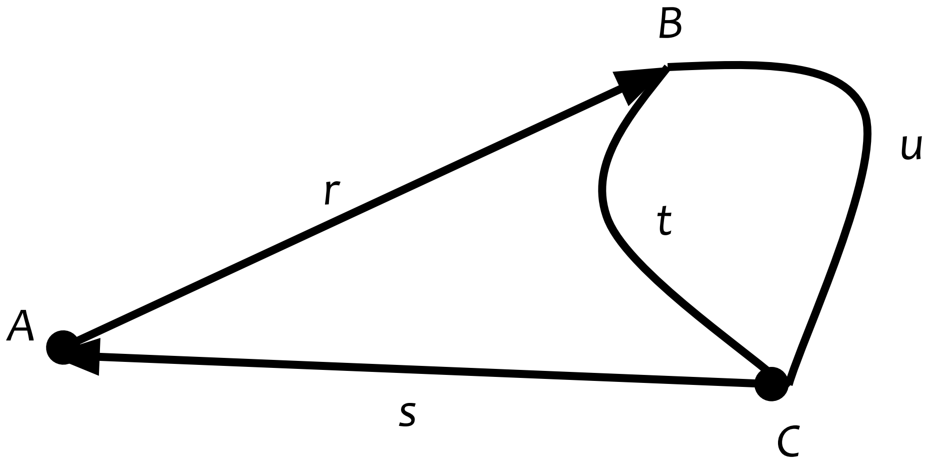
$b_{ij} = -1$, ЕСЛИ ВЕРШИНА V_i ЯВЛЯЕТСЯ КОНЦОМ ДУГИ X_j

МАТРИЦЕЙ СМЕЖНОСТИ ГРАФА $G(V,X)$ БЕЗ КРАТНЫХ РЕБЕР НАЗЫВАЮТ КВАДРАТНУЮ МАТРИЦУ A ПОРЯДКА n, В КОТОРОЙ:

$a_{ij} = 1$, ЕСЛИ $(V_i, V_j) \in X$

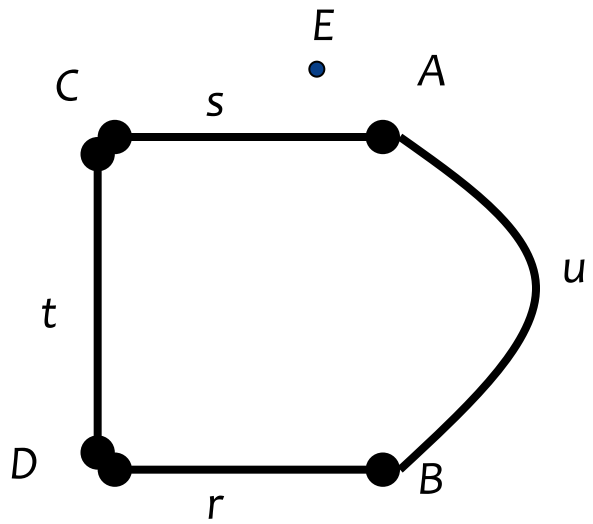
$a_{ij} = 0$, ЕСЛИ $(V_i, V_j) \notin X$

СЛЕДУЮЩИЙ ОРГРАФ ЗАДАЕТСЯ ТАБЛИЦЕЙ ИНЦИДЕНТНОСТИ:



	r	s	t	u
A	1	-1	0	0
B	-1	0	1	1
C	0	1	-1	-1

СЛЕДУЮЩИЙ ГРАФ ЗАДАЕТСЯ ТАБЛИЦЕЙ ИНЦИДЕНТНОСТИ:



	A	B	C	D	E
A	0	1	1	0	0
B	1	0	0	1	0
C	1	0	0	1	0
D	0	1	1	0	0
E	0	0	0	0	0