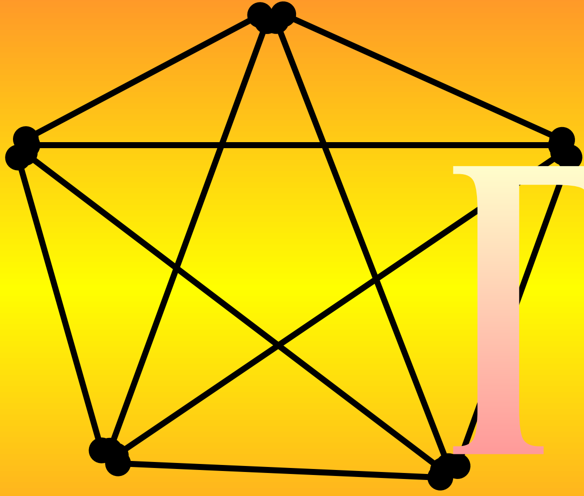
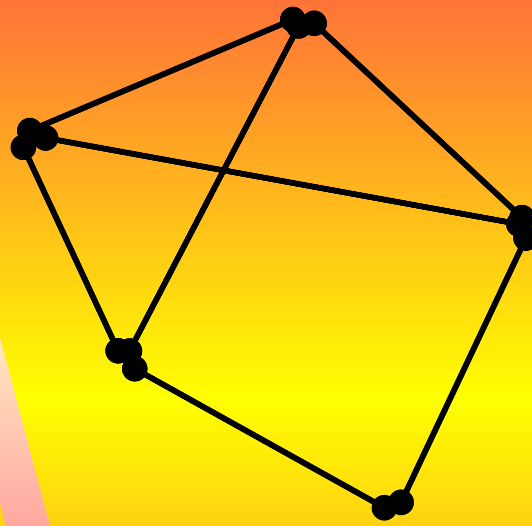
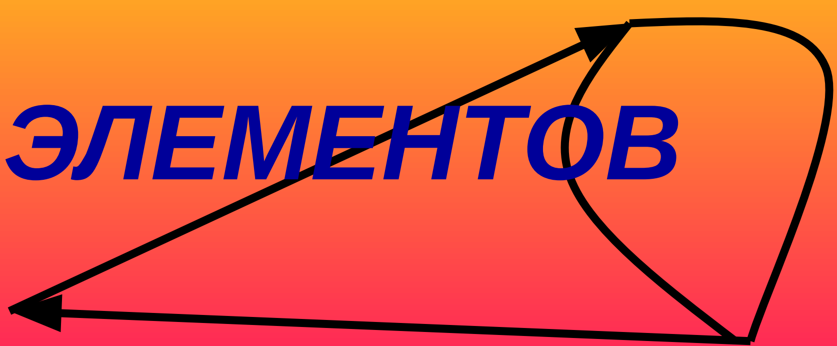
ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ



ГРАФА



И ЕГО ЭЛЕМЕНТОВ

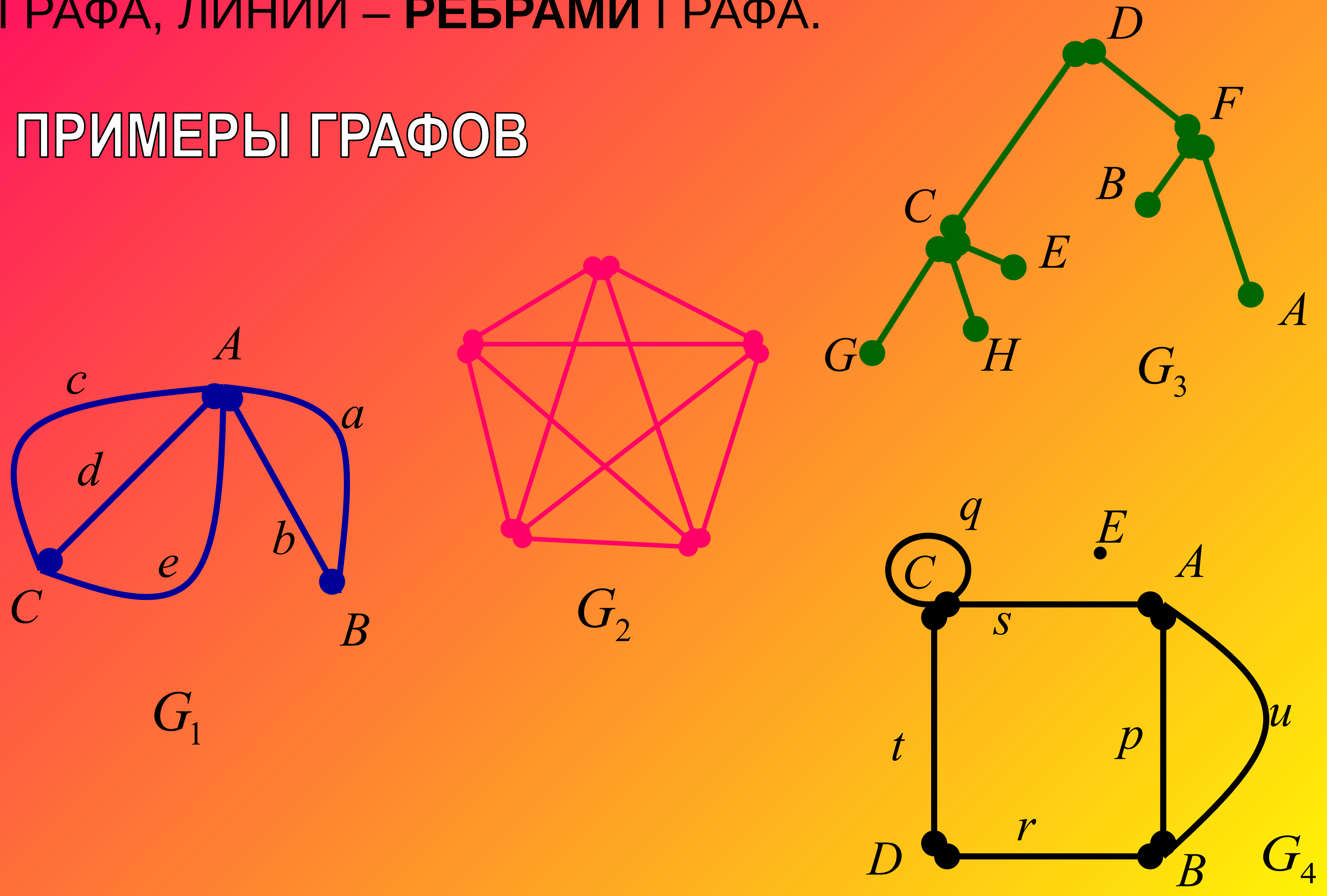


ГРАФОМ G = (V, X) НАЗЫВАЕТСЯ ПАРА ДВУХ КОНЕЧНЫХ МНОЖЕСТВ: МНОЖЕСТВО ТОЧЕК И МНОЖЕСТВО ЛИНИЙ, СОЕДИНЯЮЩИХ НЕКОТОРЫЕ ПАРЫ ТОЧЕК.

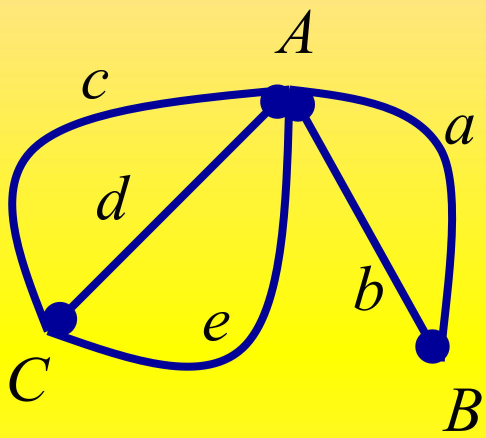
ВПЕРВЫЕ ПОНЯТИЕ «ГРАФ» ВВЕЛ В 1936 г. ВЕНГЕРСКИЙ МАТЕМАТИК ДЕННИ КЁНИГ. НО ПЕРВАЯ РАБОТА ПО ТЕОРИИ ГРАФОВ ПРИНАДЛЕЖАЛА ПЕРУ ВЕЛИКОГО ЛЕОНАРДА ЭЙЛЕРА И БЫЛА НАПИСАНА ЕЩЕ В 1736 г.

ТОЧКИ НАЗЫВАЮТСЯ **ВЕРШИНАМИ**, ИЛИ **УЗЛАМИ**, ГРАФА, ЛИНИИ – **РЕБРАМИ** ГРАФА.

ПРИМЕРЫ ГРАФОВ

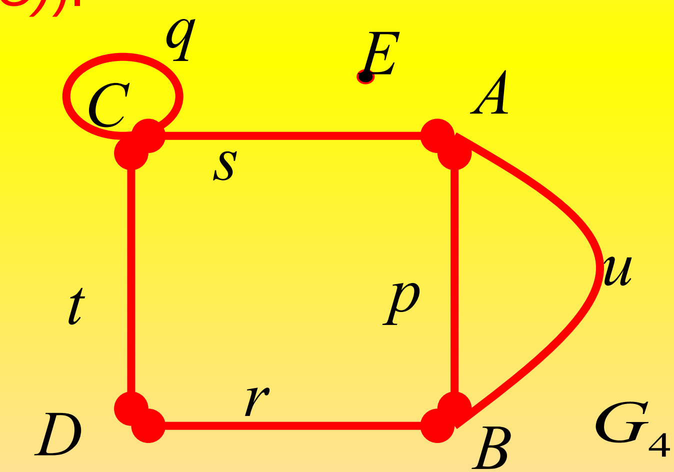


ЕСЛИ РЕБРО ГРАФА СОЕДИНЯЕТ ДВЕ ЕГО ВЕРШИНЫ, ТО ГОВОРЯТ, ЧТО ЭТО РЕБРО ИМ **ИНЦИДЕНТНО**. ДВЕ ВЕРШИНЫ ГРАФА НАЗЫВАЮТСЯ **СМЕЖНЫМИ**, ЕСЛИ СУЩЕСТВУЕТ ИНЦИДЕНТНОЕ ИМ РЕБРО.



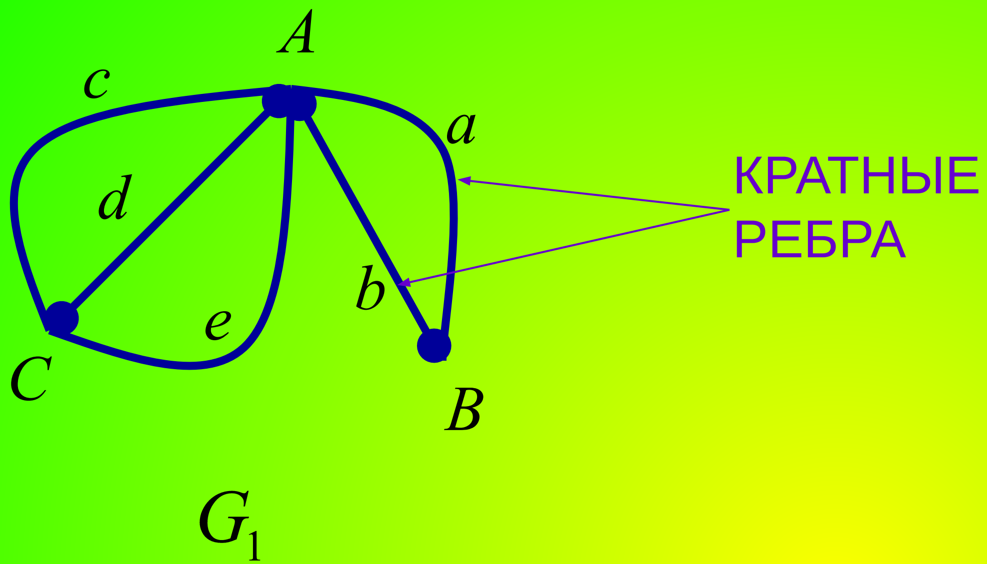
G_1

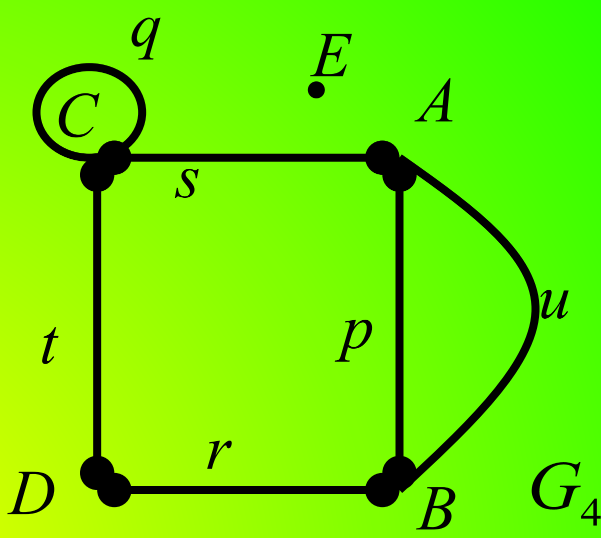
ЕСЛИ ГРАФ ИМЕЕТ РЕБРО, У КОТОРОГО НАЧАЛО И КОНЕЦ СОВПАДАЮТ, ТО ЭТО РЕБРО НАЗЫВАЕТСЯ **ПЕТЛЕЙ**(у графа G_4 петля – *q*(*C*,*C*)).



НА РИСУНКЕ СМЕЖНЫМИ ЯВЛЯЮТСЯ ВЕРШИНЫ *A* и *B*, *A* и *C* ; СМЕЖНЫМИ ЯВЛЯЮТСЯ РЕБРА *c* и *d*, *a* и *b*.

ДВА РЕБРА НАЗЫВАЮТСЯ **СМЕЖНЫМИ**, ЕСЛИ ОНИ ИМЕЮТ ОБЩУЮ ВЕРШИНУ.





ЧИСЛО РЕБЕР, ИНЦИДЕНТНЫХ ВЕРШИНЕ *A*, НАЗЫВАЕТСЯ **СТЕПЕНЬЮ** ЭТОЙ ВЕРШИНЫ И ОБОЗНАЧАЕТСЯ *deg*(*A*).

ЕСЛИ ВЕРШИНЕ ИНЦИДЕНТНА ПЕТЛЯ, ОНА ДАЕТ ВКЛАД В СТЕПЕНЬ, РАВНЫЙ ДВУМ, ТАК КАК ОБА КОНЦА ПРИХОДЯТ В ЭТУ ВЕРШИНУ.

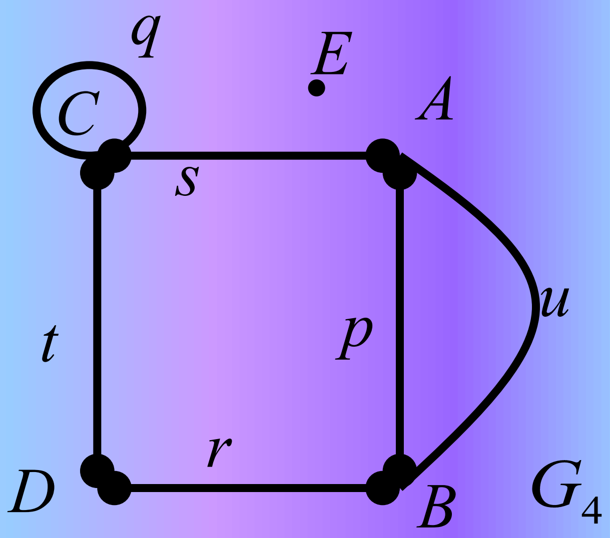
$deg(A) = 3;$

$deg(B) = 3;$

$deg(C) = 4;$

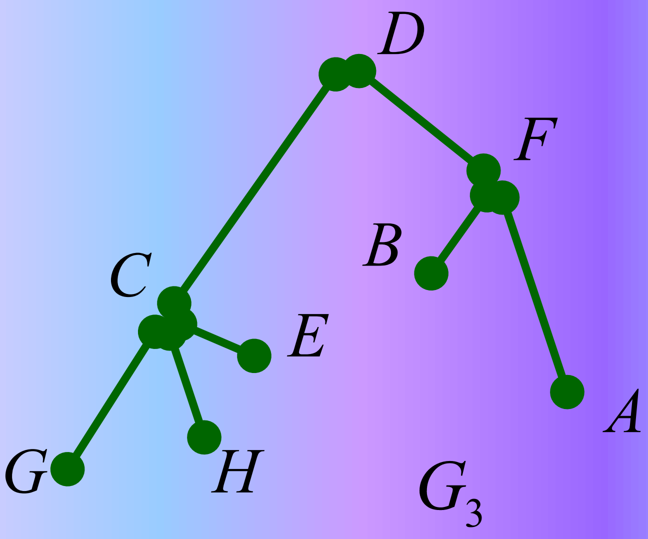
$deg(D) = 2;$

$deg(E) = 0.$



$deg(E) = 0$ ⇒

E –
ИЗОЛИРОВАННАЯ
ВЕРШИНА



$deg(G) = 1$
$deg(H) = 1$
$deg(E) = 1$
$deg(B) = 1$
$deg(A) = 1$

⇒ *G, H, E, B, A*
\- ***ВИСЯЧИЕ***
ВЕРШИНЫ

ТЕОРЕМА

В ГРАФЕ G(V, X) СУММА СТЕПЕНЕЙ ВСЕХ ЕГО ВЕРШИН – ЧИСЛО ЧЕТНОЕ, РАВНОЕ УДВОЕННОМУ ЧИСЛУ РЕБЕР ГРАФА:

$$\sum_{i=1}^{n} \deg(V_i) = 2m$$

ВЕРШИНА НАЗЫВАЕТСЯ **ЧЕТНОЙ (НЕЧЕТНОЙ)**, ЕСЛИ ЕЕ СТЕПЕНЬ – ЧЕТНОЕ(НЕЧЕТНОЕ) ЧИСЛО.

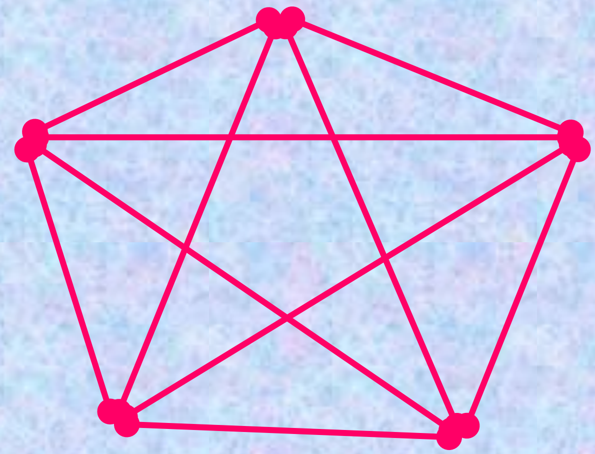
ТЕОРЕМА

ЧИСЛО НЕЧЕТНЫХ ВЕРШИН ЛЮБОГО ГРАФА – ЧЕТНО.

СЛЕДСТВИЕ

НЕВОЗМОЖНО НАЧЕРТИТЬ ГРАФ С НЕЧЕТНЫМ ЧИСЛОМ НЕЧЕТНЫХ ВЕРШИН.

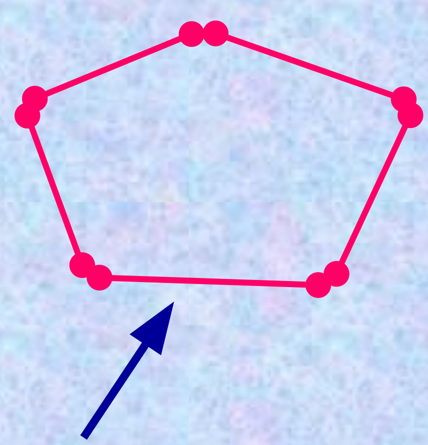
ГРАФ НАЗЫВАЕТСЯ **ПОЛНЫМ**, ЕСЛИ ЛЮБЫЕ ДВЕ ЕГО РАЗЛИЧНЫЕ ВЕРШИНЫ СОЕДИНЕНЫ ОДНИМ И ТОЛЬКО ОДНИМ РЕБРОМ.



G_2

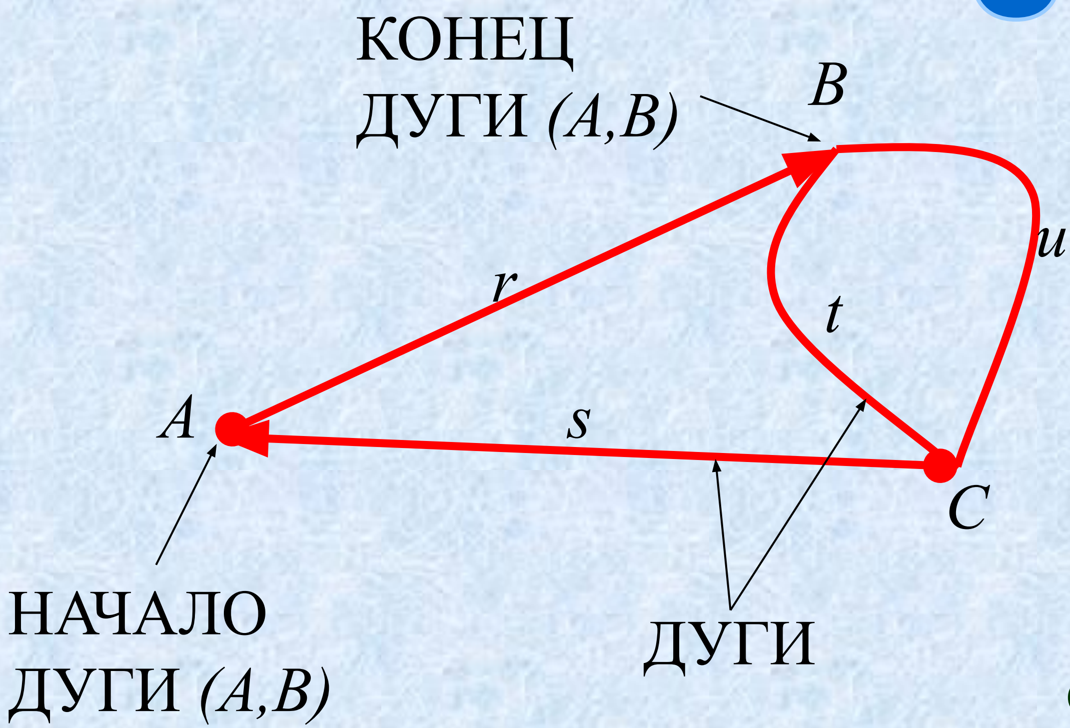
ДОПОЛНЕНИЕМ ГРАФА НАЗЫВАЕТСЯ ГРАФ С ТЕМИ ЖЕ ВЕРШИНАМИ И ИМЕЮЩИЙ ТЕ И ТОЛЬКО ТЕ РЕБРА, КОТОРЫЕ НЕОБХОДИМО ДОБАВИТЬ К ИСХОДНОМУ ГРАФУ, ЧТОБЫ ОН СТАЛ ПОЛНЫМ.

G_5



ДОПОЛНЕНИЕ ГРАФА G_5 ДО ГРАФА G_2

ОРГРАФ



СТЕПЕНИ ВХОДА ВЕРШИН ГРАФА (*см. рис.*):

$$\deg_{+}(A) = 1$$

$$\deg_{+}(B) = 1$$

$$\deg_{+}(C) = 2$$

СТЕПЕНИ ВЫХОДА ВЕРШИН:

$$\deg_{-}(A) = 1$$

$$\deg_{-}(B) = 2$$

$$\deg_{-}(C) = 1$$

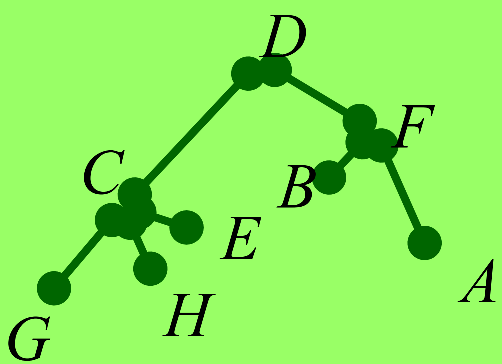
СТЕПЕНЬЮ ВХОДА (ВЫХОДА) ВЕРШИНЫ ОРГРАФА НАЗЫВАЕТСЯ ЧИСЛО РЕБЕР, ДЛЯ КОТОРЫХ ЭТА ВЕРШИНА ЯВЛЯЕТСЯ КОНЦОМ (НАЧАЛОМ).

ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ РЕБЕР НЕОРИЕНТИРОВАННОГО ГРАФА, В КОТОРОЙ ВТОРАЯ ВЕРШИНА ПРЕДЫДУЩЕГО РЕБРА СОВПАДАЕТ С ПЕРВОЙ ВЕРШИНОЙ СЛЕДУЮЩЕГО, НАЗЫВАЕТСЯ **МАРШРУТОМ**.

ЧИСЛО РЕБЕР МАРШРУТА НАЗЫВАЕТСЯ **ДЛИНОЙ** МАРШРУТА.

ЕСЛИ НАЧАЛЬНАЯ ВЕРШИНА МАРШРУИА СОВПАДАЕТ С КОНЕЧНОЙ, ТО ТАКОЙ МАРШРУТ НАЗЫВАЕТСЯ **ЗАМКНУТЫМ** ИЛИ **ЦИКЛОМ**.

ЕСЛИ РЕБРО ВСТРЕТИЛОСЬ ТОЛЬКО ОДИН РАЗ, ТО МАРШРУТ НАЗЫВАЕТСЯ **ЦЕПЬЮ**.

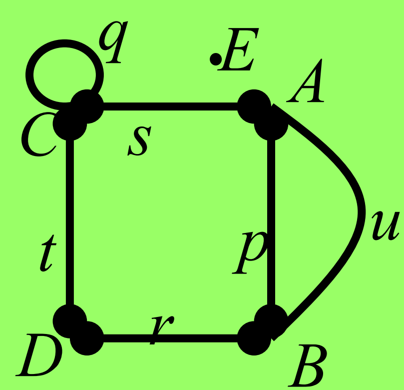


HCDFD – МАРШРУТ ДЛИНОЙ 4.

(t, s, p, r) – 4-цикл

(t, s, u, r, t, s, p, r) – 8-цикл

петля *(q)* – 1-цикл



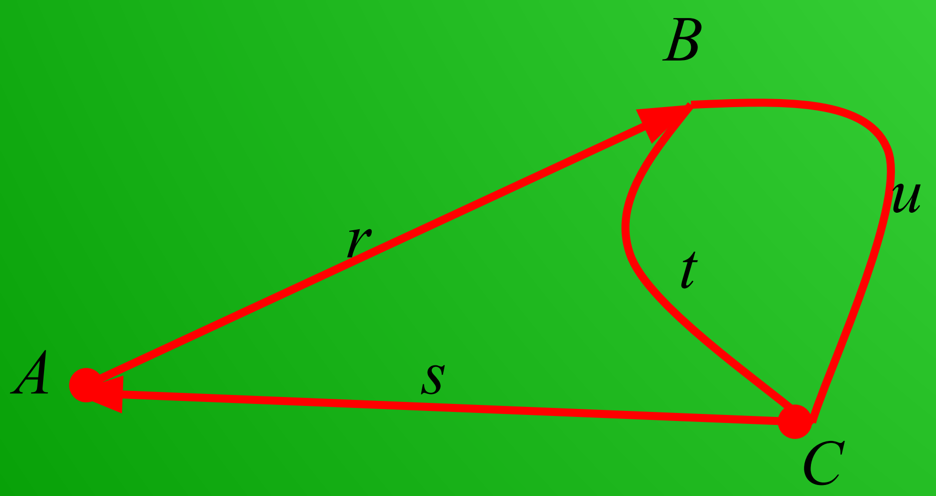
(t, s, p) – 3-цепь

ПУТЬ – УПОРЯДОЧЕННАЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ РЕБЕР ОРИЕНТИРОВАННОГО ГРАФА, В КОТОРОЙ КОНЕЦ ПРЕДЫДУЩЕГО РЕБРА СОВПАДАЕТ С НАЧАЛОМ СЛЕДУЮЩЕГО И ВСЕ РЕБРА ЕДИНСТВЕННЫ.

(*u*, *s*, *r*, *t*) – 4-путь

(*r*, *u*) – 2-путь

(*s*, *r*, *t*) и (*u*, *s*, *r*) – 3-циклы



ЦИКЛ В ОРГРАФЕ – ПУТЬ, У КОТОРОГО СОВПАДАЮТ НАЧАЛО И КОНЕЦ.

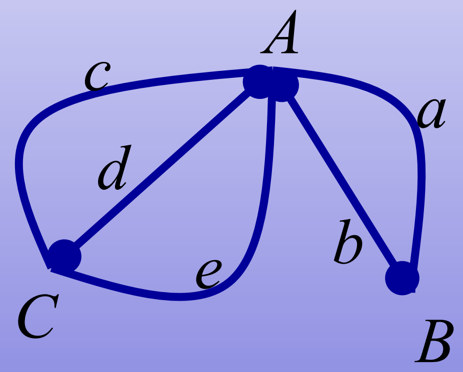
ЦЕПЬ, ПУТЬ И ЦИКЛ В ГРАФЕ НАЗЫВАЮТСЯ **ПРОСТЫМИ**, ЕСЛИ ОНИ ПРОХОДЯТ ЧЕРЕЗ ЛЮБУЮ ИЗ ВЕРШИН НЕ БОЛЕЕ ОДНОГО РАЗА.

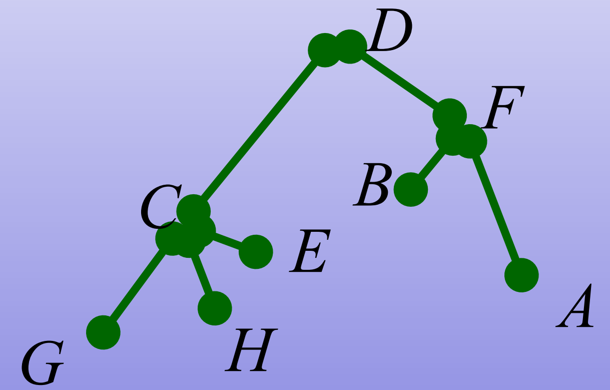
НЕОРИЕНТИРОВАННЫЙ ГРАФ НАЗЫВАЕТСЯ **СВЯЗНЫМ**, ЕСЛИ МЕЖДУ ЛЮБЫМИ ДВУМЯ ЕГО ВЕРШИНАМИ ЕСТЬ МАРШРУТ.

ТЕОРЕМА

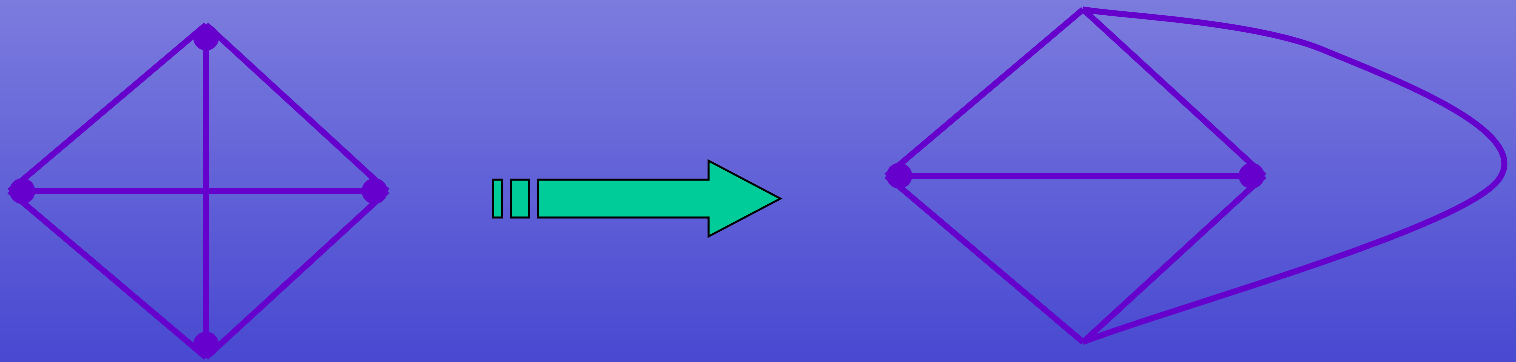
ДЛЯ ТОГО, ЧТОБЫ СВЯЗНЫЙ ГРАФ ЯВЛЯЛСЯ ПРОСТЫМ ЦИКЛОМ, НЕОБХОДИМО И ДОСТАТОЧНО, ЧТОБЫ КАЖДАЯ ЕГО ВЕРШИНА ИМЕЛА СТЕПЕНЬ, РАВНУЮ 2.

ГРАФ G НАЗЫВАЕТСЯ **ПЛАНАРНЫМ(ПЛОСКИМ),** ЕСЛИ СУЩЕСТВУЕТ ТАКОЙ ГРАФ G' , В ИЗОБРАЖЕНИИ КОТОРОГО НА ПЛОСКОСТИ РЕБРА ПЕРЕСЕКАЮТСЯ ТОЛЬКО В ВЕРШИНАХ.





ПЛАНАРНЫЕ ГРАФЫ



ПЕРВОНАЧАЛЬНЫЙ

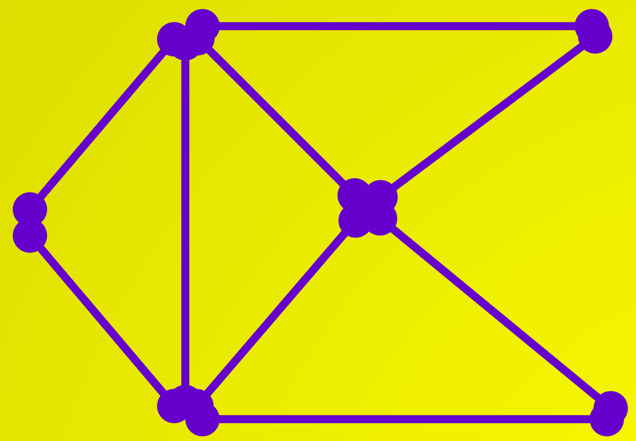
ИЗОБРАЖЕННЫЙ ИНАЧЕ

ЭЙЛЕРОВЫМ ПУТЕМ(ЦИКЛОМ) ГРАФА НАЗЫВАЕТСЯ ПУТЬ(ЦИКЛ), КОТОРЫЙ СОДЕРЖИТ ВСЕ РЕБРА ГРАФА ТОЛЬКО ОДИН РАЗ.

ГРАФ, ОБЛАДАЮЩИЙ ЭЙЛЕРОВЫМ ЦИКЛОМ, НАЗЫВАЕТСЯ **ЭЙЛЕРОВЫМ**.

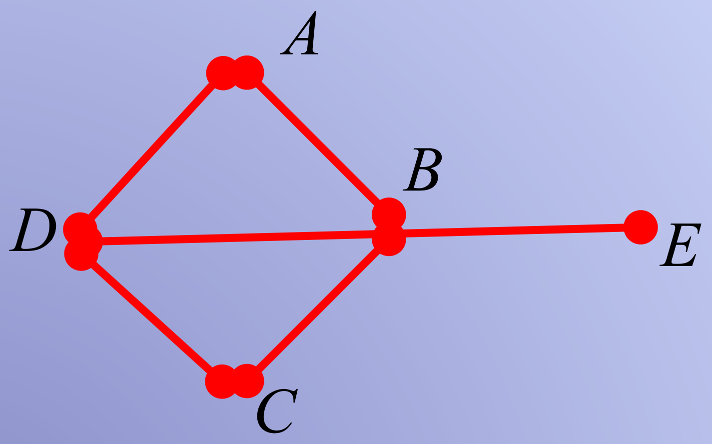
ТЕОРЕМА

ГРАФ ЯВЛЯЕТСЯ ЭЙЛЕРОВЫМ ТОГДА И ТОЛЬКО ТОГДА, КОГДА ОН – СВЯЗНЫЙ ГРАФ, ИМЕЮЩИЙ ВСЕ ЧЕТНЫЕ ВЕРШИНЫ.



ГАМИЛЬТОНОВЫМ ПУТЕМ (ЦИКЛОМ) ГРАФА НАЗЫВАЕТСЯ ПУТЬ(ЦИКЛ), ПРОХОДЯЩИЙ ЧЕРЕЗ КАЖДУЮ ЕГО ВЕРШИНУ ТОЛЬКО ОДИН РАЗ.

ГРАФ, СОДЕРЖАЩИЙ ГАМИЛЬТОНОВ ЦИКЛ, НАЗЫВАЕТСЯ **ГАМИЛЬТОНОВЫМ**.



(C, D, A, B, E) – гамильтонов путь

МАТРИЦЕЙ ИНЦИДЕНТНОСТИ ГРАФА *G* НАЗЫВАЮТ ТАБЛИЦУ *B*, СОСТОЯЩУЮ ИЗ *n* СТРОК(ВЕРШИНЫ) И *m* СТОЛБЦОВ(РЕБРА), В КОТОРОЙ:

- ДЛЯ НЕОРИЕНТИРОВАННОГО ГРАФА:

$b_{ij} = 1$, ЕСЛИ ВЕРШИНА V_i ИНЦИДЕНТНА РЕБРУ X_j

$b_{ij} = 0$, ЕСЛИ ВЕРШИНА V_i ИНЦИДЕНТНА РЕБРУ X_j

- ДЛЯ ОРИЕНТИРОВАННОГО ГРАФА:

$b_{ij} = 1$, ЕСЛИ ВЕРШИНА V_i ЯВЛЯЕТСЯ НАЧАЛОМ ДУГИ X_j

$b_{ij} = 0$, ЕСЛИ ВЕРШИНА V_i НЕ ИНЦИДЕНТНА ДУГЕ X_j

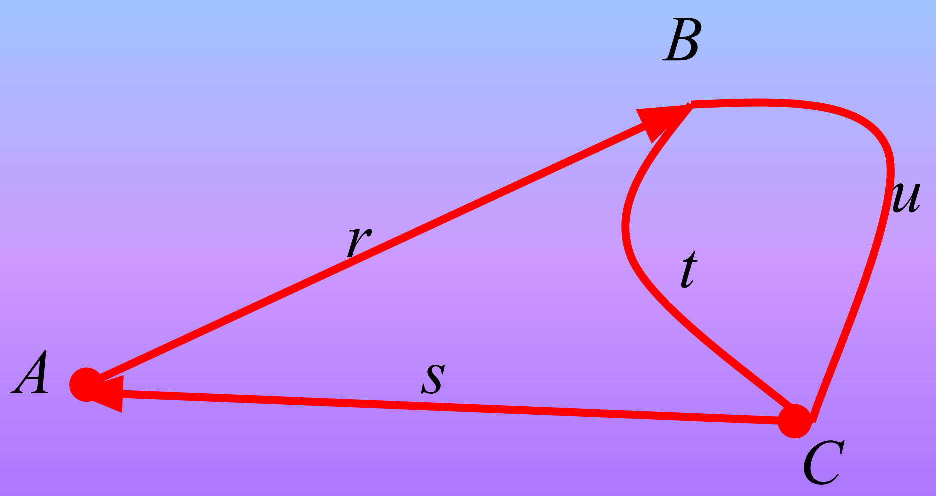
$b_{ij} = -1$, ЕСЛИ ВЕРШИНА V_i ЯВЛЯЕТСЯ КОНЦОМ ДУГИ X_j

МАТРИЦЕЙ СМЕЖНОСТИ ГРАФА *G(V,X)* БЕЗ КРАТНЫХ РЕБЕР НАЗЫВАЮТ КВАДРАТНУЮ МАТРИЦУ *A* ПОРЯДКА *n*, В КОТОРОЙ:

$a_{ij} = 1$, ЕСЛИ $(V_i, V_j) \in X$

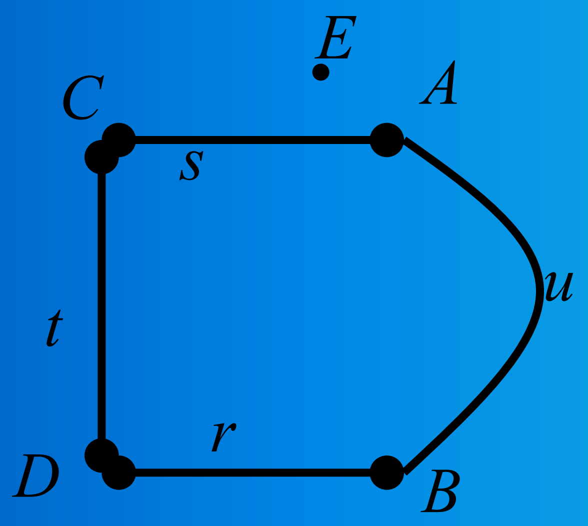
$a_{ij} = 0$, ЕСЛИ $(V_i, V_j) \notin X$

ЗАДАЙТЕ СЛЕДУЮЩИЙ ОРГРАФ ТАБЛИЦЕЙ ИНЦИДЕНТНОСТИ



	r	*s*	*t*	*u*
A	1	-1	0	0
B	-1	0	1	1
C	0	1	-1	-1

ЗАДАЙТЕ СЛЕДУЮЩИЙ ГРАФ ТАБЛИЦЕЙ СМЕЖНОСТИ



	A	*B*	*C*	*D*	*E*
A	0	1	1	0	0
B	1	0	0	1	0
C	1	0	0	1	0
D	0	1	1	0	0
E	0	0	0	0	0

Автор: Оркина Марина Александровна,
преподаватель ГОУ СПО
«Зубово-Полянский педагогический колледж»
Республика Мордовия