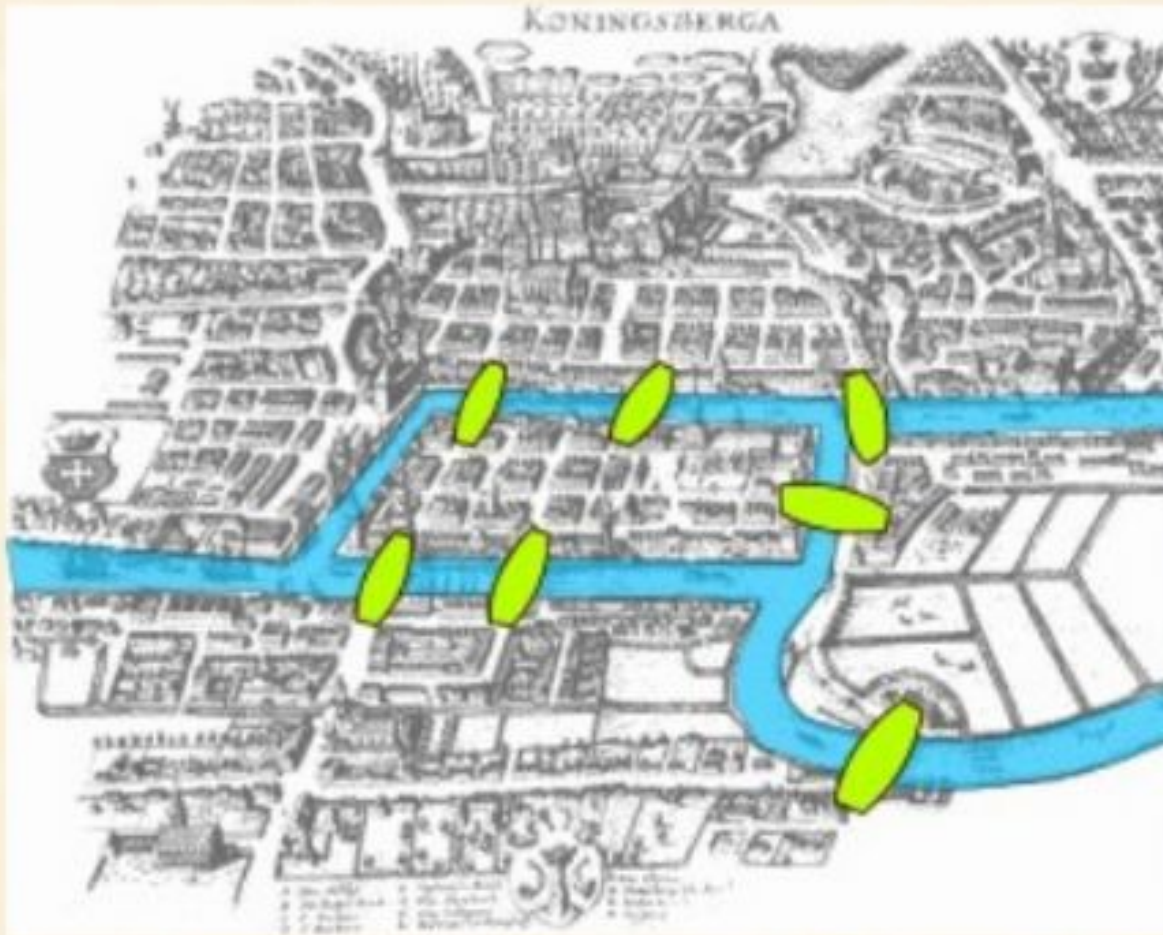


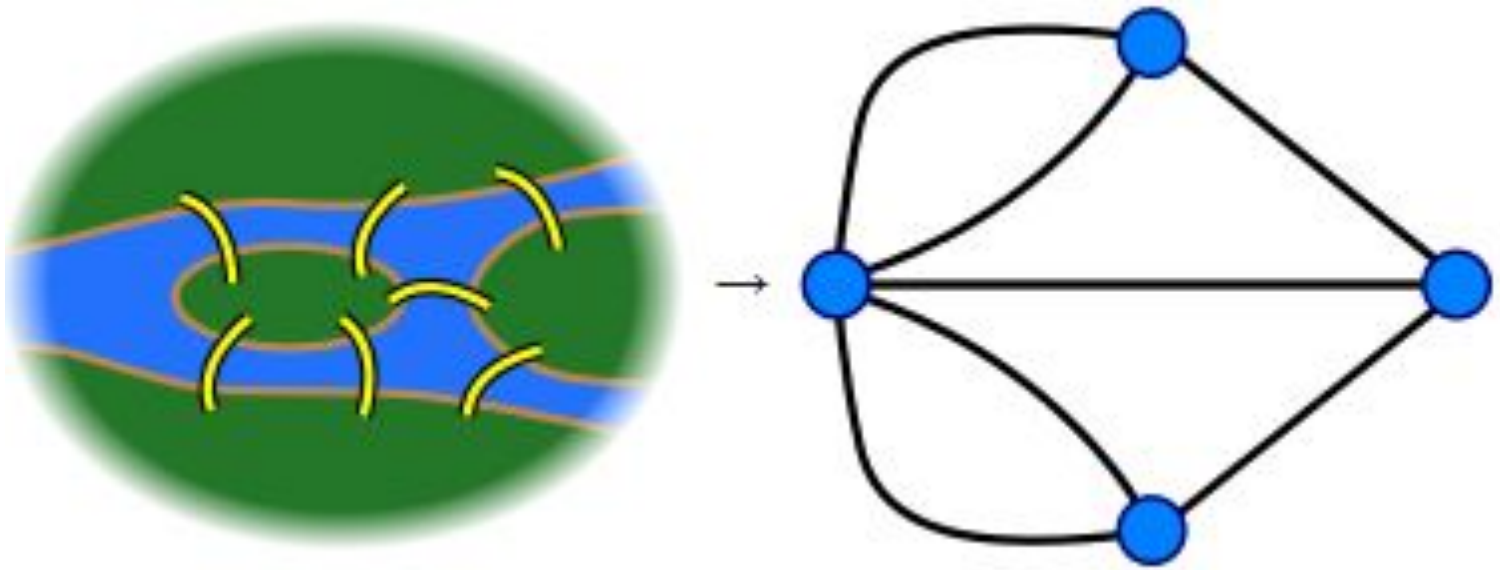


***Лекція 6.  
Графи.***

# Схема Кенігсберзьких мостів



Місто  
Кенігсберг  
(сьогодні  
Калінінград) в  
Пруссії  
розташоване  
на річці  
Преголя і  
включає два  
великі  
острови, які  
були  
пов'язані  
один з одним  
і з материком  
сімома  
мостами.



Необхідно було знайти такий маршрут через місто, щоб пройти всі сім мостів і кожним мостом пройти рівно один раз. На острів не можна було потрапити інакше як через міст, і кожен з мостів мав бути пройденим за один раз (тобто не можна було пройти на середину мосту і повернутися назад, а потім з іншого берега пройти другу половину). Ейлер довів, що розв'язку **не існує**.

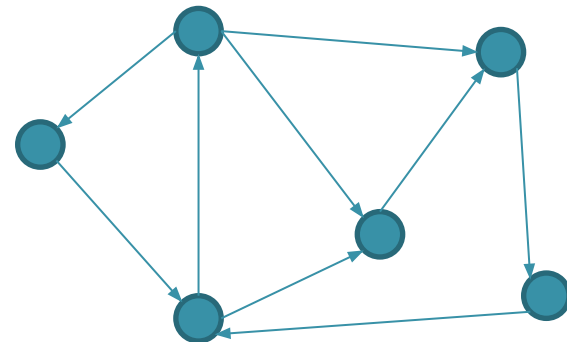
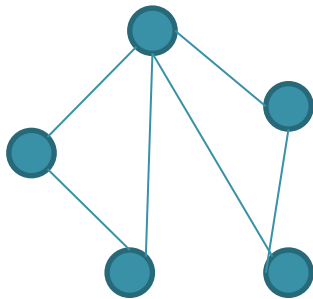
# §1. Графи. Основні поняття і визначення

**Граф**  $G=(V,E)$  – це сукупність непорожньої множини *вершин*  $V$  та множини *ребер*  $E$ .

$$|V| = n, |E| = m$$

**Орієнтований граф (орграф)** - це граф, ребра якого мають напрям.

Ребра орграфа називаються **дугами**.



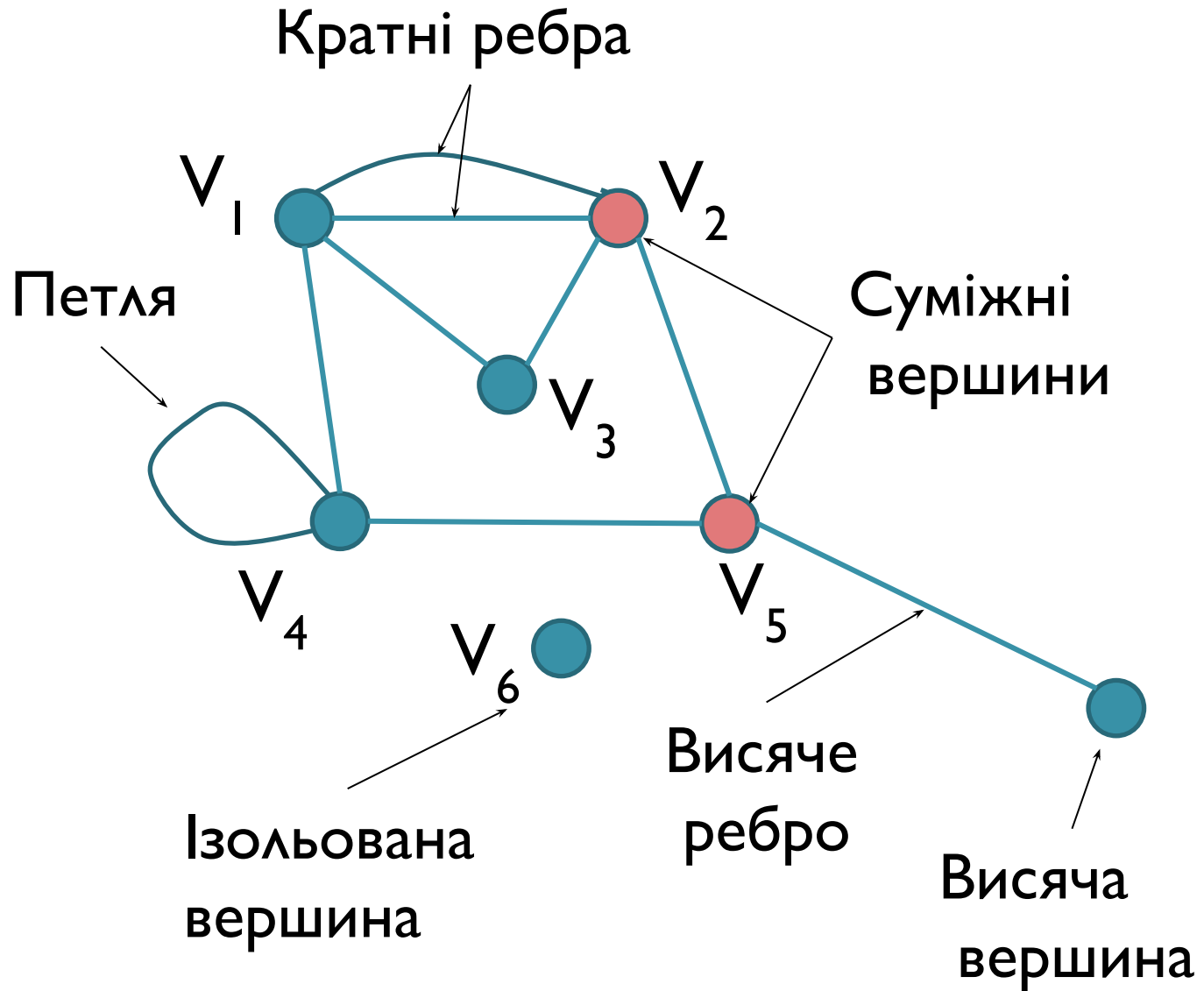
За наочного подавання графа вершини зображуються **точками**, ребра – **лініями**, які з'єднують точки.

Кількість ребер, інцидентних до певної вершини  $x$ , називається **степенем** цієї вершини і позначається  $d(x)$ .

Вершина, в якій степінь дорівнює 0, називається **ізолюваною**. Вершини, які мають степінь 1, називаються **висячими**, або **кінцевими**.

**Петлями** називають ребра, які мають збіжні кінці.

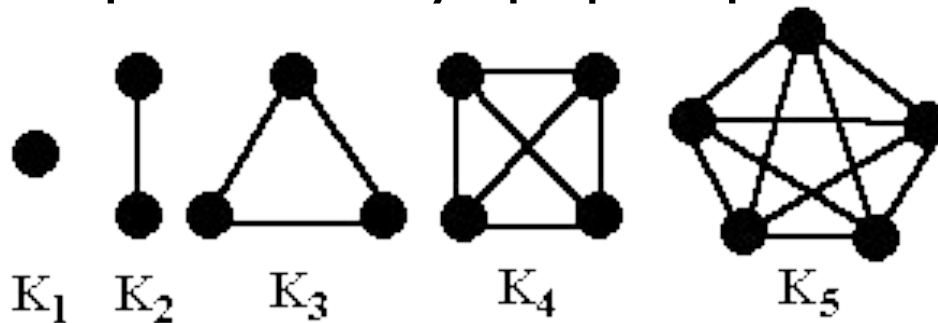
Граф, який не має ребер ( $U = \emptyset$ ), називається **порожнім**. Усі вершини порожнього графа є **ізолювані**.



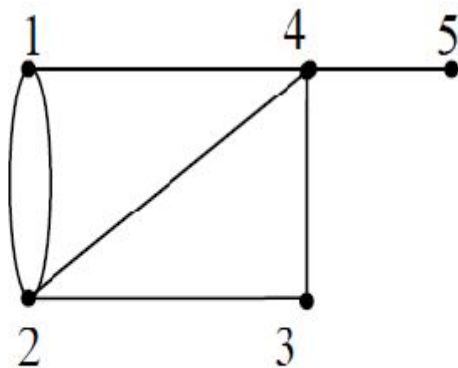


Звичайний граф з  $n$  вершинами, будь-яка пара вершин якого з'єднана ребром, називається **ПОВНИМ** і позначається  $K_n$ .

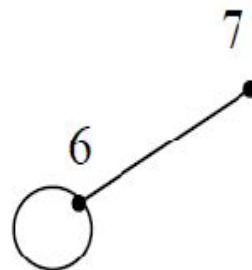
Кількість ребер в повному графі дорівнює  $m = \frac{n(n-1)}{2}$



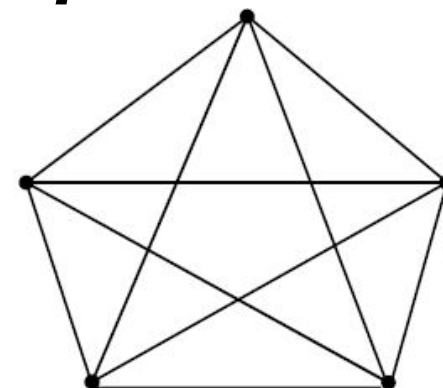
Граф, який може бути зображено на площині (без перетину ребер), називається **планарним**.



Планарний граф



8.



Непланарний граф

**Теорема 1.** Сума степенів усіх вершин графа дорівнює подвоєній кількості ребер.

**Доведення**

Кожне ребро двічі входить до суми, звідки й випливає твердження.

**Теорема 2.** У кожному графі число вершин, які мають непарний степінь, є парне.

**Доведення**

Нехай  $X_1 \subseteq X$  – множина вершин непарного степеня;  $X_2 \subseteq X$  – множина вершин парного степеня. Зазначимо, що  $X = X_1 \cup X_2$ ;  $X_1 \cap X_2 = \emptyset$ .

$$\sum_{x \in X} d(x) = \sum_{x \in X_1} d(x) + \sum_{x \in X_2} d(x) \rightarrow \sum_{x \in X_1} d(x) = \sum_{x \in X} d(x) - \sum_{x \in X_2} d(x)$$

Вочевидь, що  $\sum_{x \in X_2} d(x)$  є парна як сума парних чисел,  $\sum_{x \in X} d(x)$  – парна відповідно до теореми 1.

Отже,  $\sum_{x \in X_1} d(x)$  – парна.



● **Насиченість графа  $D$**  визначається:

$$D = \frac{2m}{n(n-1)}.$$

Для повного графа  $D=1$ .

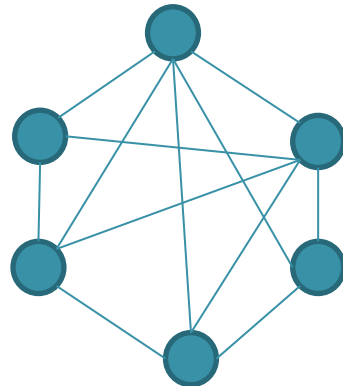
**Насичений граф** – це граф, в якому кількість ребер наближається до максимально можливої:

$$|E| = O(|V|^2).$$

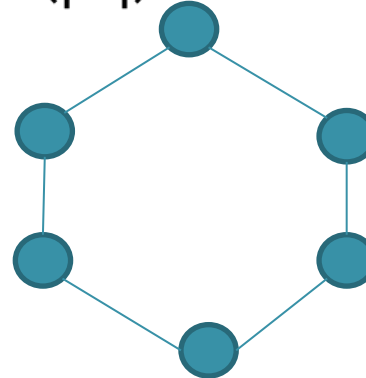
**Розріджений граф** – це граф, в якому кількість ребер наближається до кількості вершин:

$$|E| = O(|V|).$$

Насичений  
граф



$$D = \frac{2 * 12}{6 * 5} = 0,8 > 0,5$$



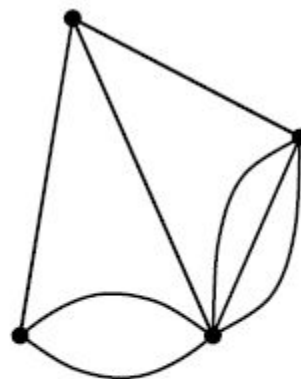
Розріджений  
граф

$$D = \frac{2 * 6}{6 * 5} = 0,4 < 0,5$$

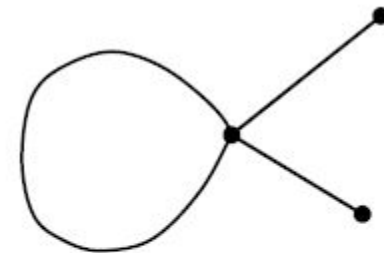
**Мультиграф** – це граф із кратними ребрами.

**Псевдограф** – це граф з петлями.

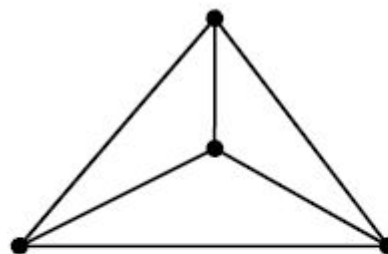
Граф, що не містить петель і кратних ребер, називається **звичайним**, або **простим графом**.



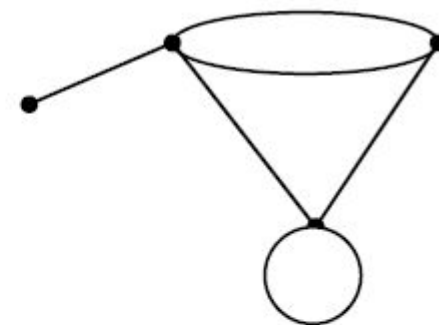
Мультиграф



Граф з петлею

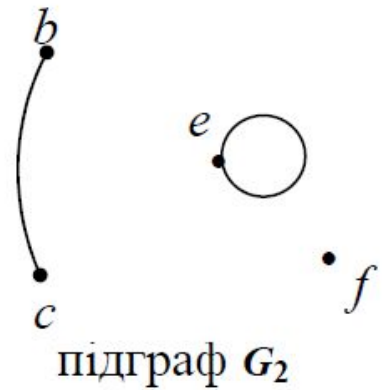
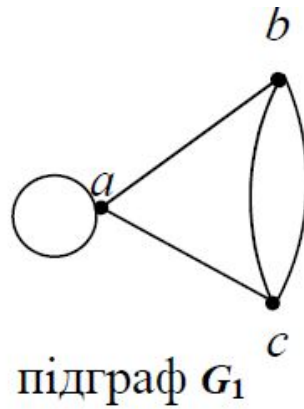
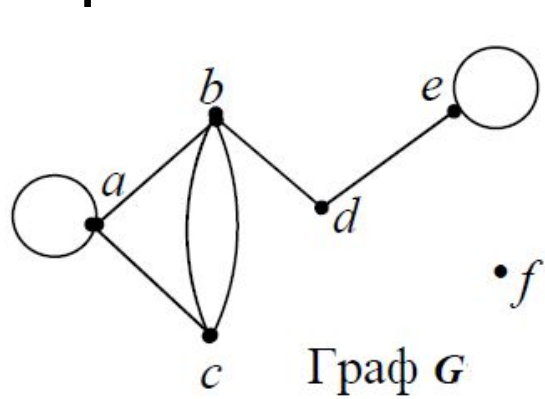


Простий граф

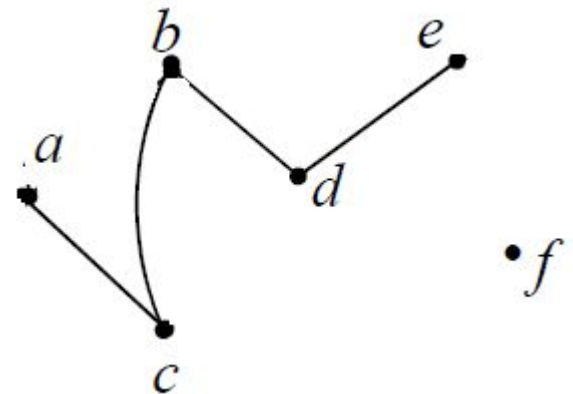
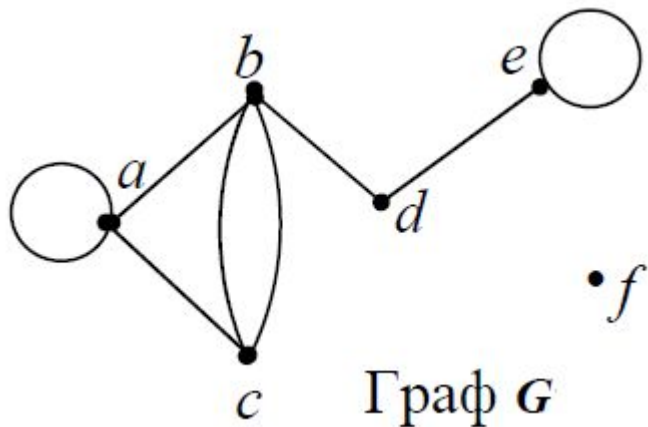


Псевдограф

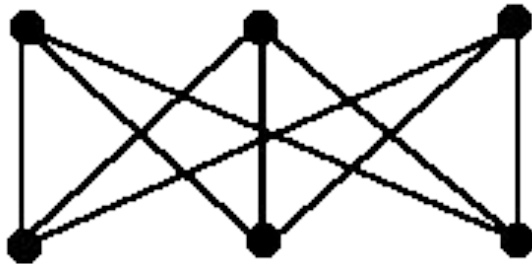
Підграфом графа  $G=(X, V)$  називають граф  $G'=(X_1, V_1)$ , для якого  $x_1 \subset X$ ,  $v_1 \subset V$ . Підграф називають **власним**, якщо він відмінний від самого



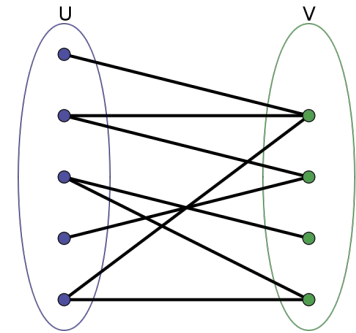
Граф  $G''=(X'', V'')$  називається **ОСТОВНИМ підграфом** графа  $G=(X, V)$ , якщо  $X'' = X$  та  $V'' \subseteq V$ .



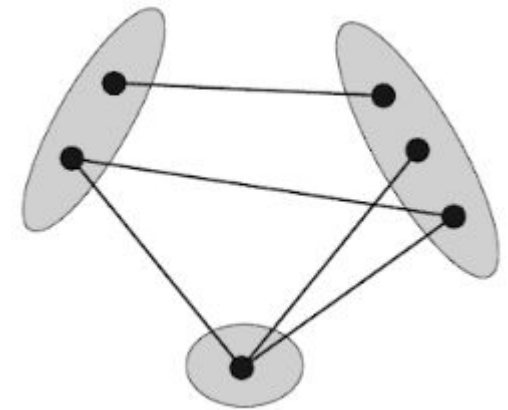
Граф, вершини якого можна розбити на непересічні підмножини  $V_1$  і  $V_2$  так, що ніякі дві вершини, що належать тій самій підмножині, не суміжні, називається **ДВОДОЛЬНИМ** (графом Кеніга) і позначається  $B_{mn}$  ( $m=|V_1|$ ,  $n=|V_2|$ ,  $m+n=|V|$ ).



$B_{33}$

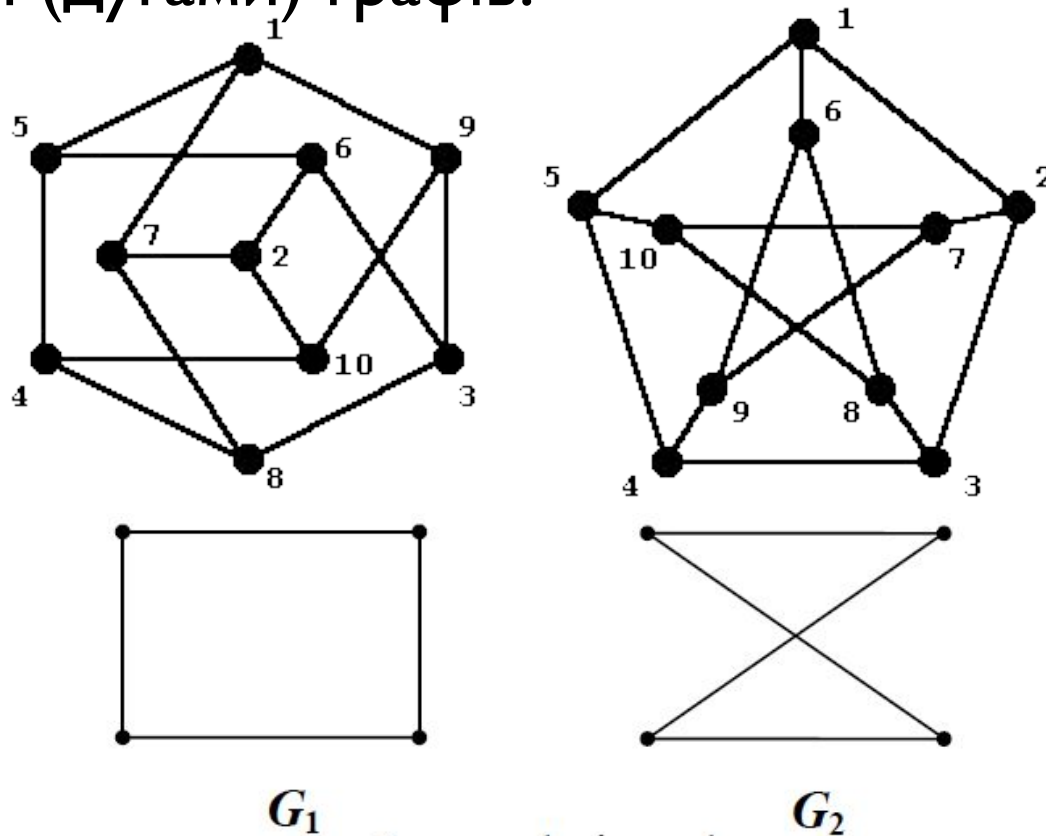


Граф, вершини якого можна розбити на  $n$  непересічних підмножини так, що ніякі дві вершини, що належать одній підмножині, не суміжні, називається  **$n$ -ДОЛЬНИМ**.



Тридольний граф

Графи  $G_1=(V_1,E_1)$  і  $G_2=(V_2,E_2)$  називаються **ізоморфними** (позначення:  $G_1 \sim G_2$ ), якщо між графами існує взаємо-однозначне відображення  $j: G_1 \rightarrow G_2$  ( $V_1 \rightarrow V_2, E_1 \rightarrow E_2$ ), що зберігає відповідність між ребрами (дугами) графів.

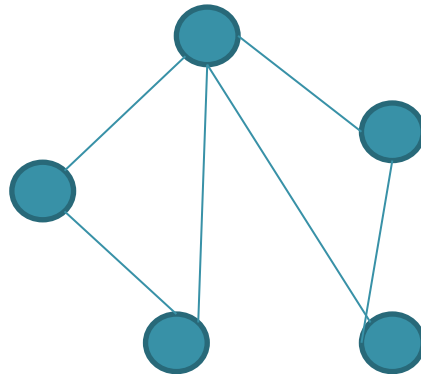


Ізоморфні графи

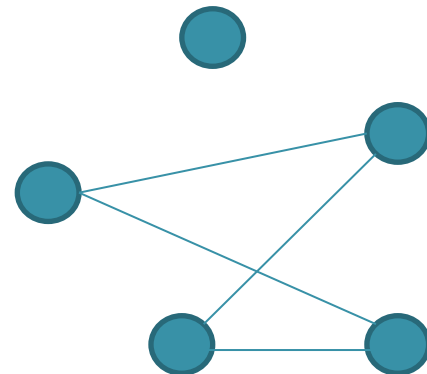
## §2 Унарні операції над графами

### I. Доповнення.

Доповненням графа  $G = (X, V)$  називають граф  $\bar{G} = (X, V')$ , якщо його ребро  $(x_i, x_j)$  входить в  $V'$  тоді і тільки тоді, коли воно не входить в  $V$ . Іншими словами, дві вершини  $x_i$  і  $x_j$  суміжні в  $\bar{G}$ , якщо вони не суміжні в  $G$ .



$G =$   
 $(X, V)$

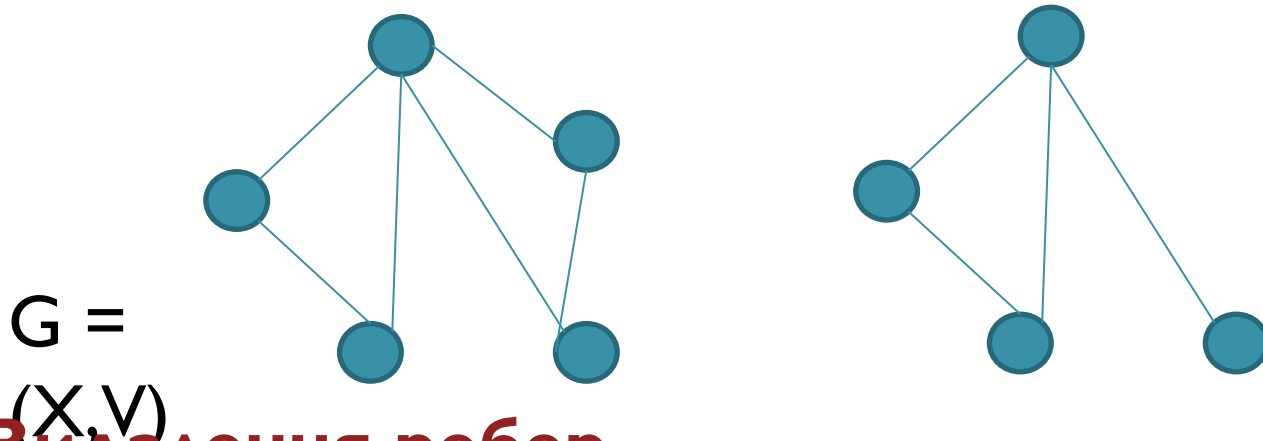


$\bar{G} = (X, V')$



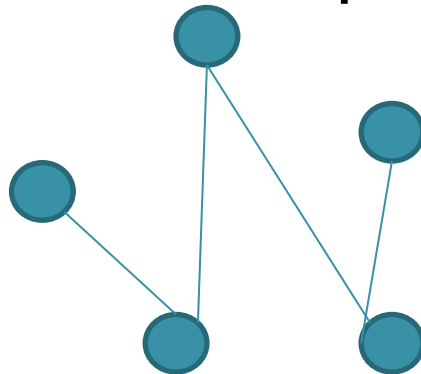
## 2. Видалення вершини.

Нехай  $x_i$  – вершина графа  $G = (X, V)$ .  $G - x_i$  – граф, що отриманий видаленням з графа  $G$  вершини  $x_i$  та ребер інцидентних цій вершині.



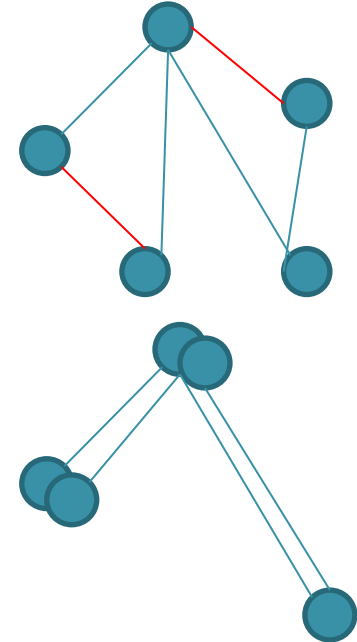
## 3. Видалення ребер.

Нехай  $li$  – ребро графу  $G = (X, V)$ . Тоді  $G - (li)$  – підграф графу  $G$ , який отримано після викидання ребра  $li$ .



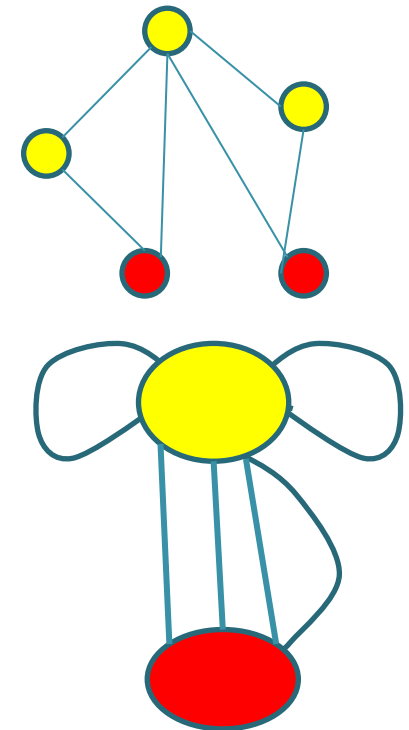
## 4. Стягування.

Стягування – операція видалення ребра  $l$  і ототожнювання його кінцевих вершин. Граф  $G$  називають стягненим до графу  $H$ , якщо  $H$  можна отримати з  $G$  послідовністю стягувань.



## 5. Замкнення або ототожнювання.

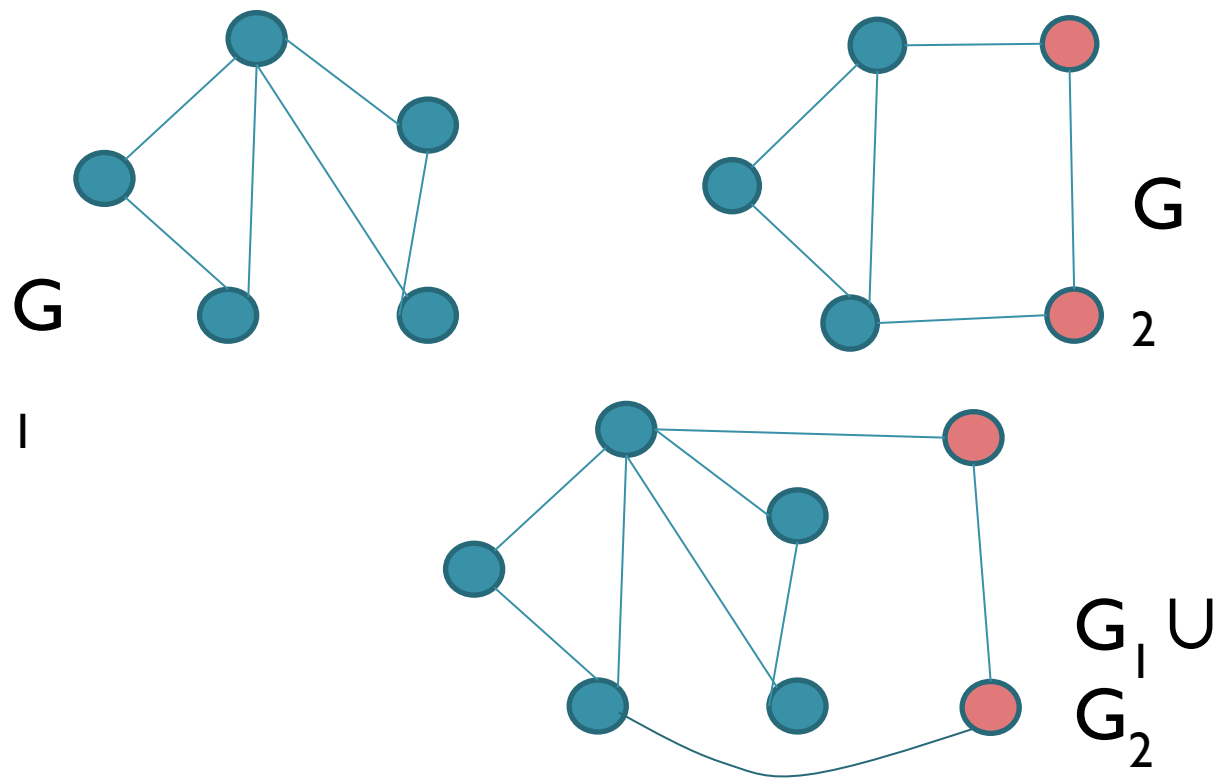
Кажуть, що пара вершин графу  $G$   $x_i$  та  $x_j$  замикаються (ототожнюються), якщо вони замінюються новою вершиною, всі ребра графу  $G$  інцидентні  $x_i$  та  $x_j$ , стають інцидентними новій вершині.



# §3 Бінарні операції над графами

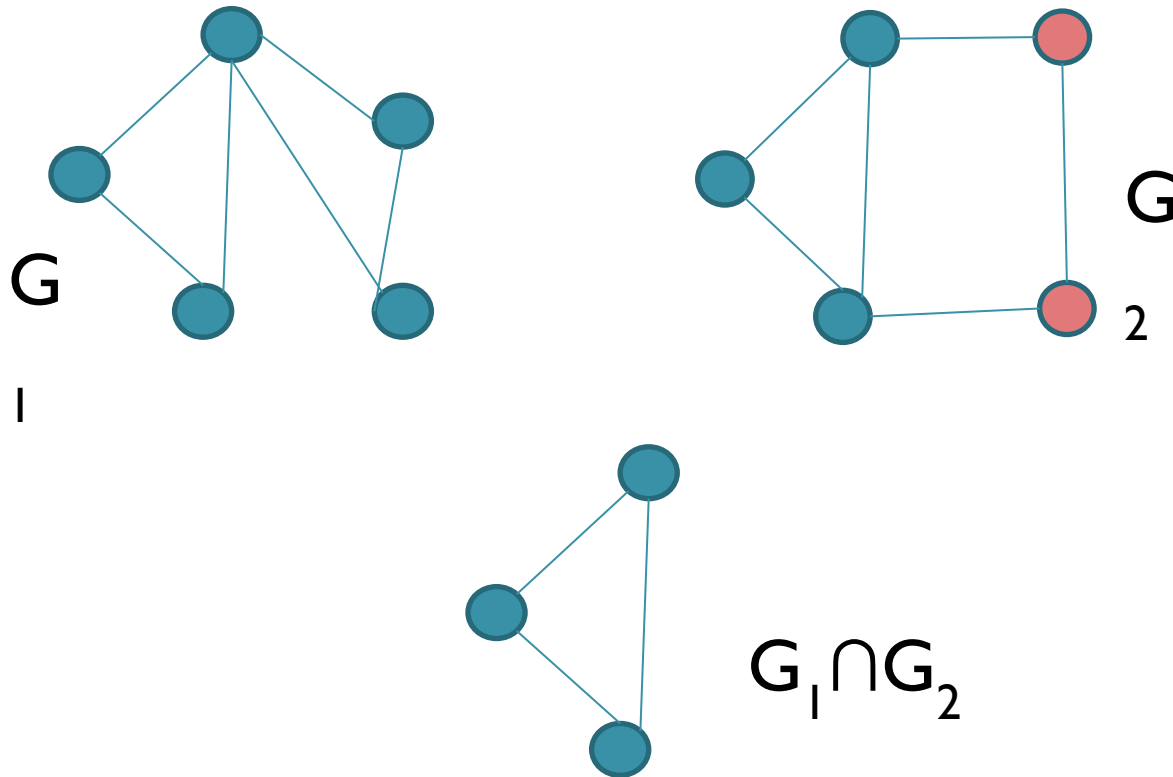
## I. Об'єднання графів.

Об'єднанням графів  $G_1$  та  $G_2$ , позначається  $G_1 \cup G_2$ , є граф  $G_3 = (X_1 \cup X_2, V_1 \cup V_2)$  множина його вершин є об'єднанням  $X_1$  та  $X_2$ , а множина його ребер є об'єднанням  $V_1$  та  $V_2$ .



## 2. Перетин

Перетином графів  $G_1$  та  $G_2$ , позначається  $G_1 \cap G_2$  є граф  $G_3 = (X_1 \cap X_2, V_1 \cap V_2)$ , тобто множина його вершин складається лише з тих вершин, які є одночасно в  $G_1$  та  $G_2$ , а множина ребер  $G_3$  складається з ребер, які одночасно присутні в  $G_1$  та  $G_2$ .



### 3. Кільцева сума

Кільцева сума двох графів  $G_1$  та  $G_2$  позначається  $G_1 \oplus G_2$ , являє собою граф  $G_3$ , який складається з ребер, що присутні або в  $G_1$ , або в  $G_2$ , але не в обох одночасно.

