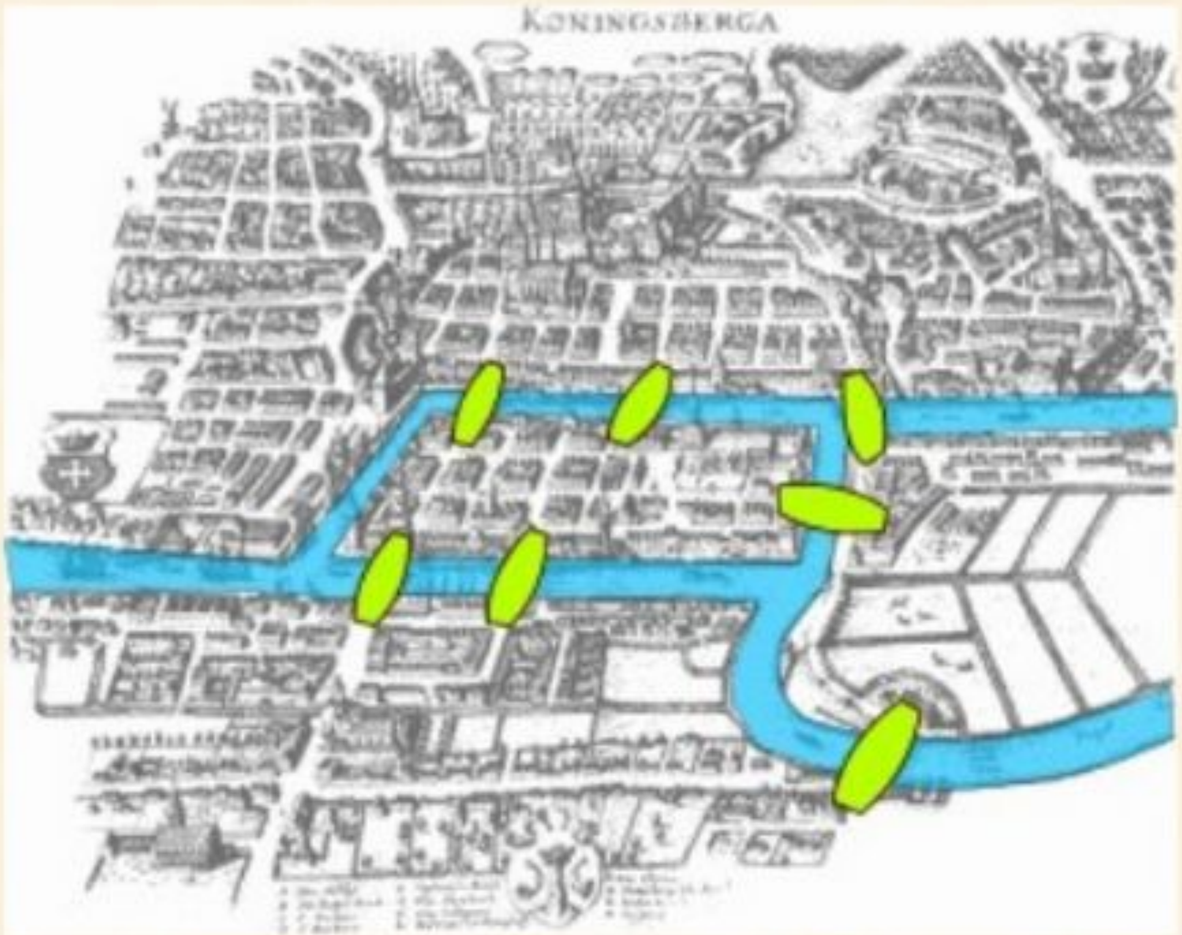
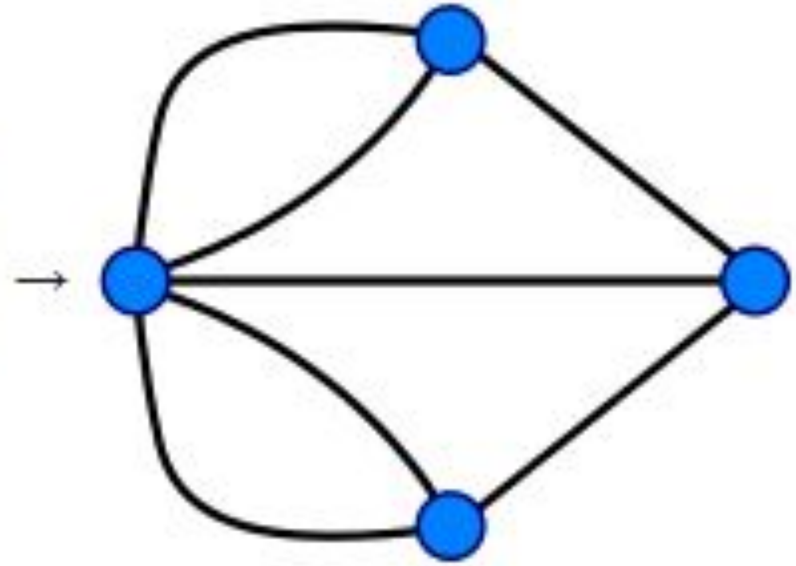
Лекція 6. Графи.

Схема Кенігсберзьких мостів



Місто
Кенігсберг
(сьогодні Калінінград) в Пруссії розташоване на річці Преголя і включає два великі острови, які були пов'язані один з одним і з материком сімома мостами.



Необхідно було знайти такий маршрут через місто, щоб пройти всі сім мостів і кожним мостом пройти рівно один раз. На острів не можна було потрапити інакше як через міст, і кожен з мостів мав бути пройденим за один раз (тобто не можна було пройти на середину мосту і повернутися назад, а потім з іншого берега пройти другу половину). Ейлер довів, що розв'язку **не** існує.

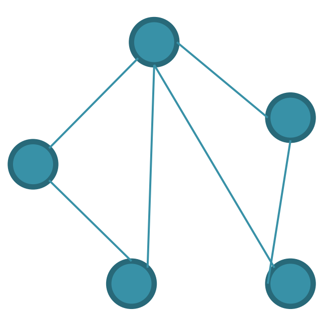
§1. Графи. Основні поняття і визначення

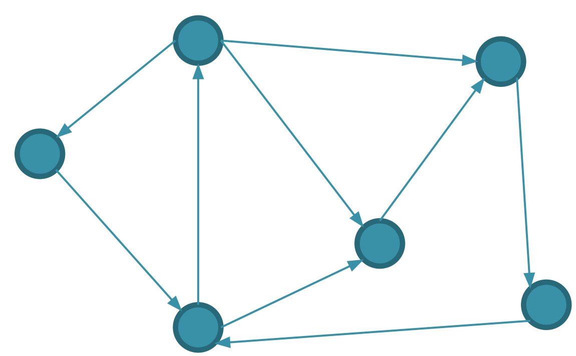
Граф G=(V,E) – це сукупність непорожньої множини *вершин* V та множини *ребер* E.

$$|V| = n, |E| = m$$

Орієнтований граф (орграф) - це граф, ребра якого мають напрям.

Ребра орграфа називаються ***дугами***.





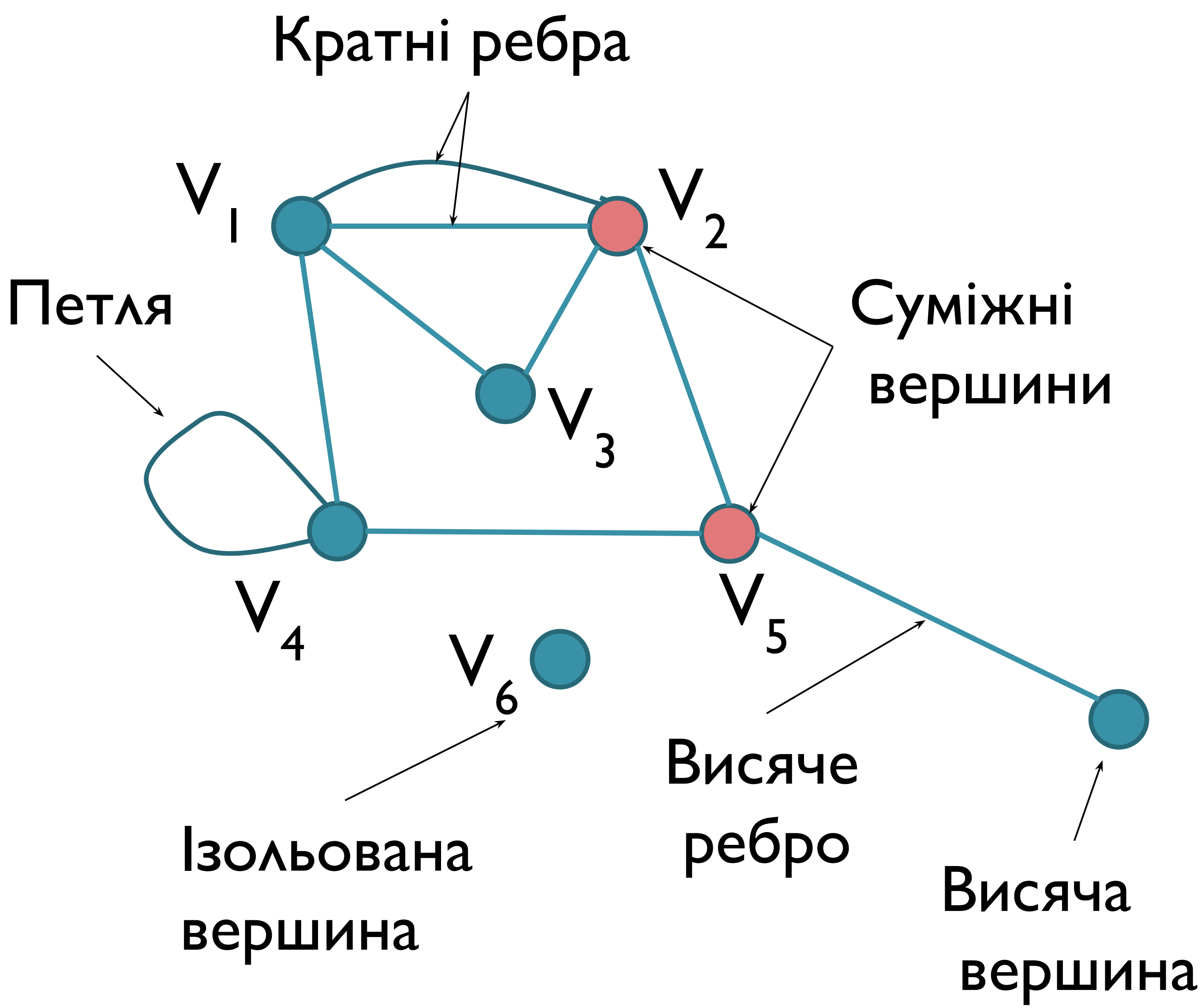
За наочного подавання графа вершини зображуються ***точками***, ребра **–** ***лініями***, які з'єднують точки.

Кількість ребер, інцидентних до певної вершини ***x***, називається ***степенем*** цієї вершини і позначається **d(*x*)**.

Вершина, в якої степінь дорівнює 0, називається ***ізольованою***. Вершини, які мають степінь 1, називаються ***висячими***, або ***кінцевими*** .

Петлями називають ребра, які мають збіжні кінці.

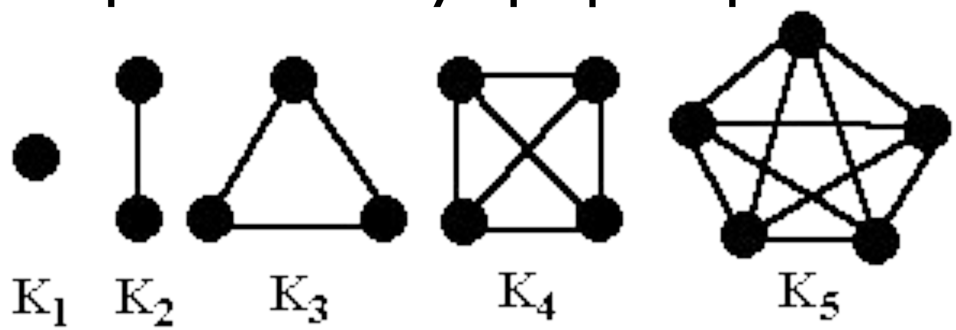
Граф, який не має ребер (***U*** **=** $\varnothing$), називається ***порожнім***. Усі вершинипорожнього графа є ***ізольовані***.



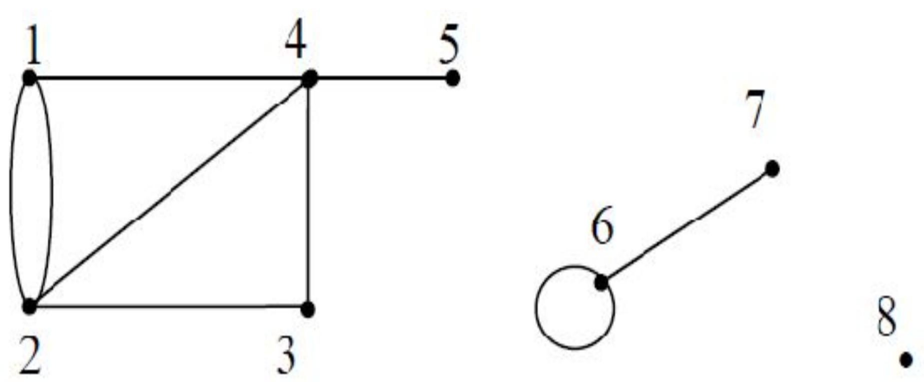
Кратні ребра
V1
V2
Петля
Суміжні вершини
V3
V4
V5
V6
Висяче ребро
Ізольована вершина
Висяча вершина

Звичайний граф з *n* вершинами, будь-яка пара вершин якого з'єднана ребром, називається ***повним*** і позначається K_n.

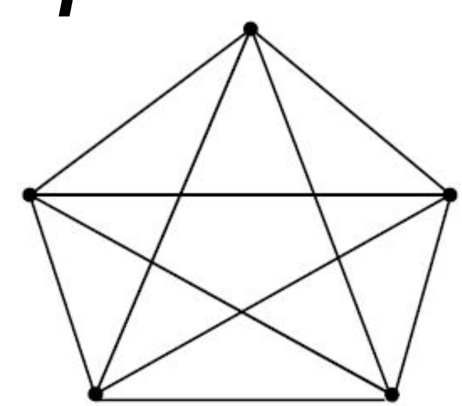
Кількість ребер в повному графі дорівнює $$m = \frac{n(n-1)}{2}$$



Граф, який може бути зображено на площині (без перетину ребер), називається ***планарним.***



Планарний граф



Непланарний граф

Теорема 1. Сума степенів усіх вершин графа дорівнює подвоєній кількості ребер.

Д о в е д е н н я

Кожне ребро двічі входить до суми, звідки й випливає твердження.

Теорема 2. У кожному графі число вершин, які мають непарний степінь, є парне.

Д о в е д е н н я

Нехай $\boldsymbol{X1} \subseteq \boldsymbol{X}$ – множина вершин непарного степеня; $\boldsymbol{X2} \subseteq \boldsymbol{X}$ – множина вершин парного степеня. Зазначимо, що $\boldsymbol{X = X_1 \cup X_2}$; $\boldsymbol{X_1 \cap X_2 = \varnothing}$.

$$\sum_{x \epsilon X} d(x) = \sum_{x \epsilon X_1} d(x) + \sum_{x \epsilon X_2} d(x) \rightarrow \sum_{x \epsilon X_1} d(x) = \sum_{x \epsilon X} d(x) - \sum_{x \epsilon X_2} d(x)$$

Вочевидь, що$\sum_{x \in X_2} d(x)$ є парна як сума парних чисел, $\sum_{x \epsilon X} d(x)$ – парна відповідно до теореми 1. Отже, $\sum_{x \epsilon X_1} d(x)$– парна.

Насиченість графа D визначається:

$$\boldsymbol{D = \frac{2m}{n(n-1)}}.$$

Для повного графа D=1.

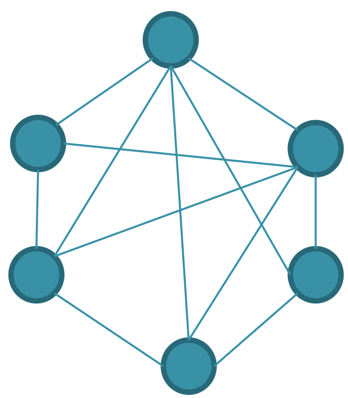
Насичений граф – це граф, в якому кількість ребер наближається до максимально можливої:

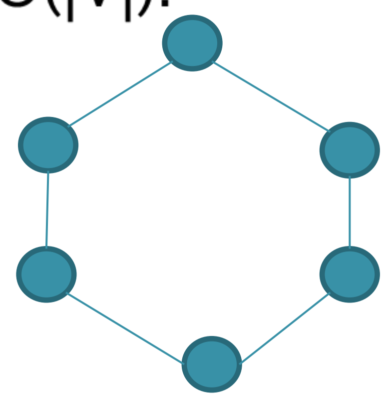
$$|E| = O(|V^2|).$$

Розріджений граф – це граф, в якому кількість ребер наближається до кількості вершин:

$$|E| = O(|V|).$$

Насичений граф





Розріджений граф

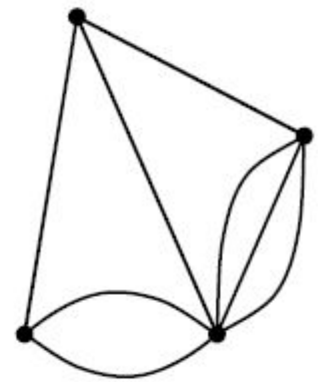
$$D = \frac{2 * 12}{6 * 5} = 0{,}8 > 0{,}5$$

$$D = \frac{2 * 6}{6 * 5} = 0{,}4 < 0{,}5$$

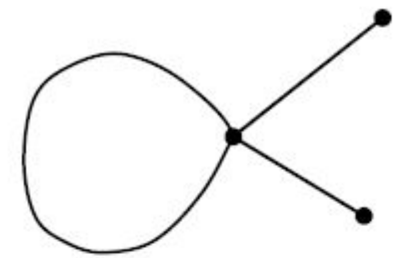
Мультиграф – це граф із кратними ребрами.

Псевдограф – це граф з петлями.

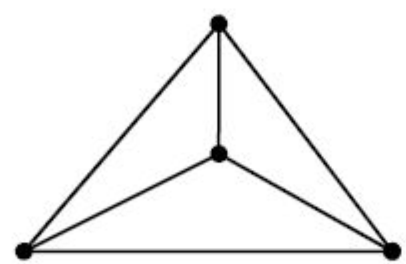
Граф, що не містить петель і кратних ребер, називається ***звичайним***, або ***простим графом***.



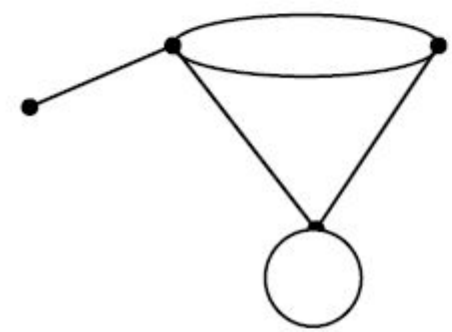
Мультиграф



Граф з петлею

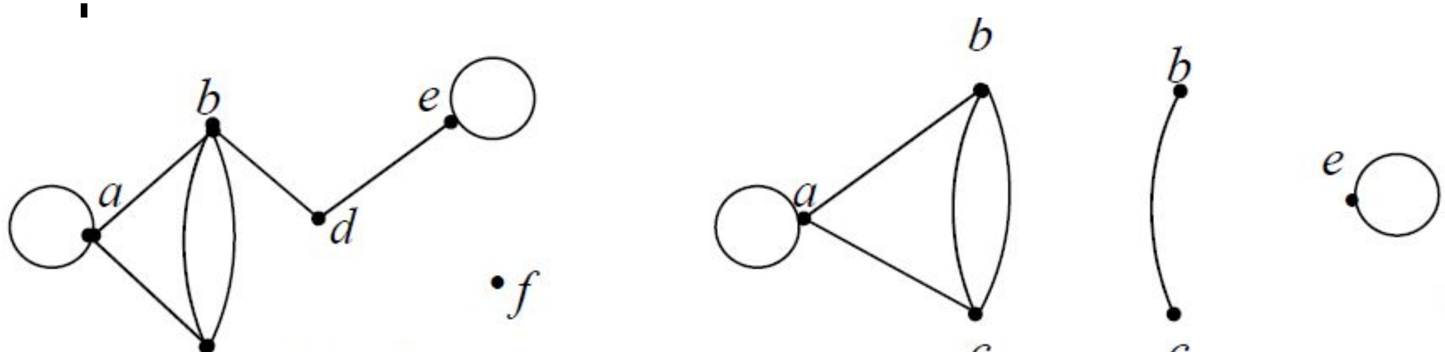


Простий граф



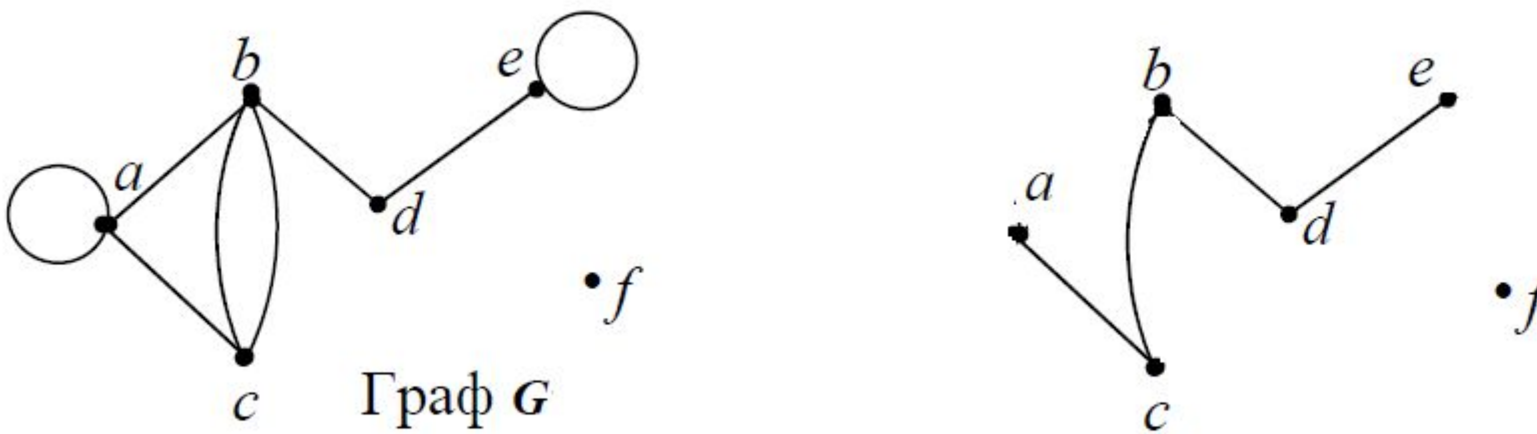
Псевдограф

Підграфом графа G=(X,V) називають граф G'=(X_1,V_1), для якого $x_1 \subset X$, $v_1 \subset V$. Підграф називають ***власним***, якщо він відмінний від самого



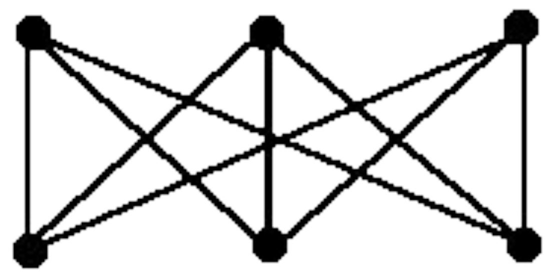
Граф *G* підграф *G*₁ підграф *G*₂

Граф *G''*=(*X''*,*V''*) називається ***остовним підграфом*** *графа G*=(*X,V*),якщо *X'' =X* та $V'' \subseteq V$.

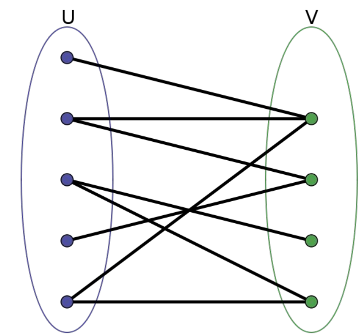


Граф *G*

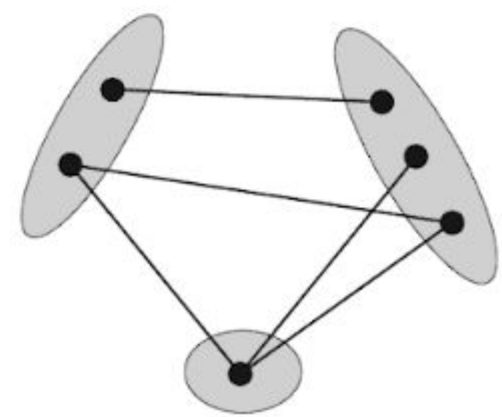
Граф, вершини якого можна розбити на непересічні підмножини V_1 і V_2 так, що ніякі дві вершини, що належать тій самій підмножині, не суміжні, називається ***дводольним*** (графом Кеніга) і позначається B_{mn} $(m=|V_1|, n=|V_2|, m+n=|V|)$.



$\mathbf{B_{33}}$

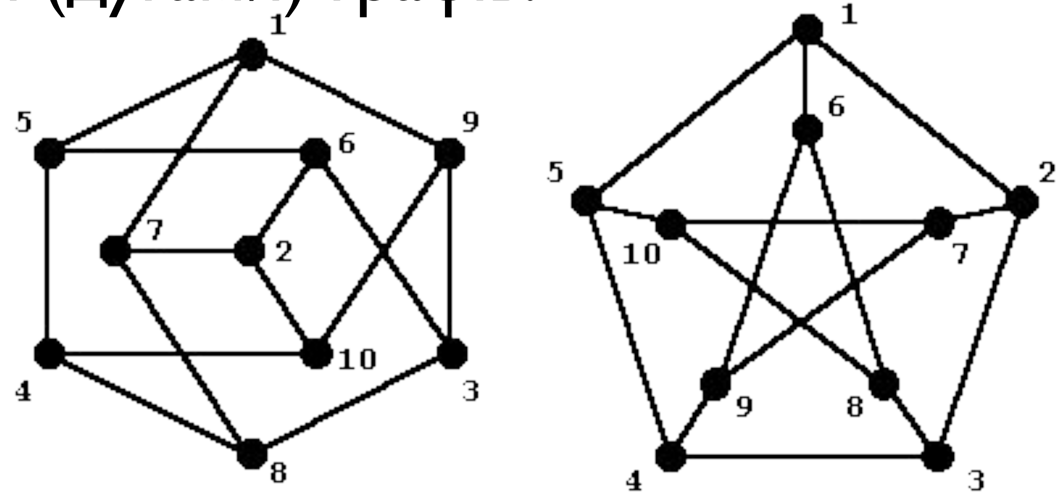


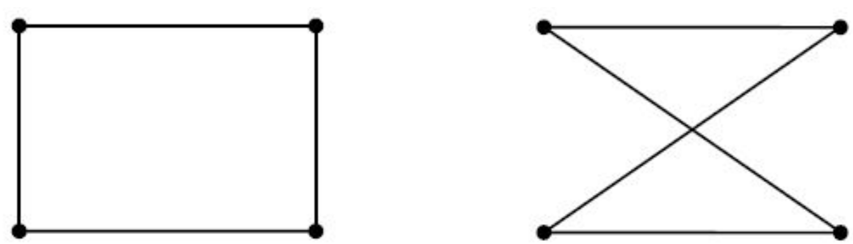
Граф, вершини якого можна розбити на n непересічних підмножини так, що ніякі дві вершини, що належать одній підмножині, не суміжні, називається ***n-дольним***.



Тридольний граф

Графи $G_1=(V_1,E_1)$ і $G_2=(V_2,E_2)$ називаються ***ізоморфними*** (позначення: $G_1 \sim G_2$), якщо між графами існує взаємо-однозначне відображення j: $G_1 < G_2$ ($V_1 < V_2$, $E_1 < E_2$), що зберігає відповідність між ребрами (дугами) графів.





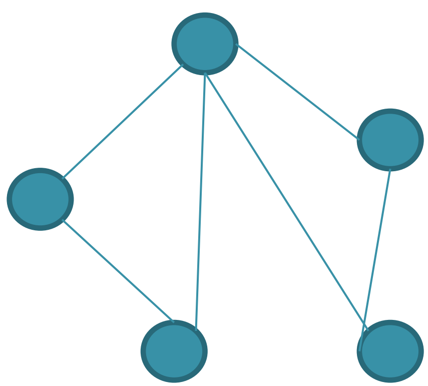
G_1 G_2

Ізоморфні графи

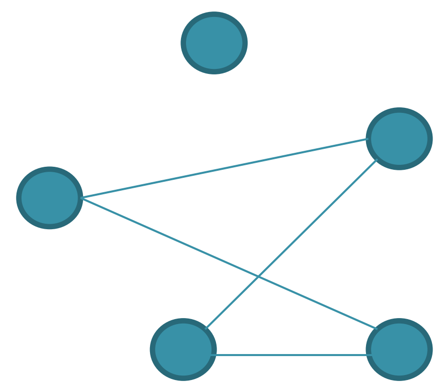
§2 Унарні операції над графами

1. Доповнення.

Доповненням графа G = (X,V) називають граф □G=(X,V′), якщо його ребро (x_i,x_j) входить в V′ тоді і тільки тоді, коли воно не входить в V. Іншими словами, дві вершини x_i і x_j суміжні в □G, якщо вони не суміжні в G.



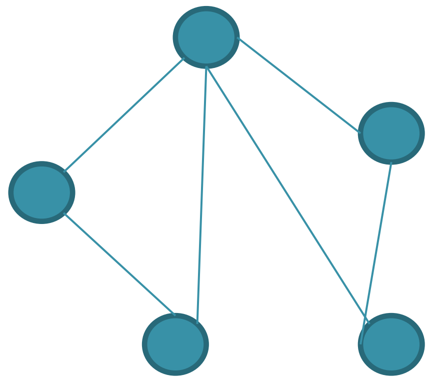
G = (X,V)



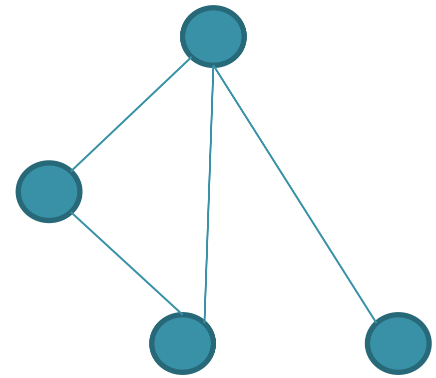
$\bar{G}$=(X,V′)

2.Видалення вершини.

Нехай x_i – вершина графа G = (X,V). G-x_i – граф, що отриманий видаленням з графа G вершини x_i та ребер інциндентних цій вершині.

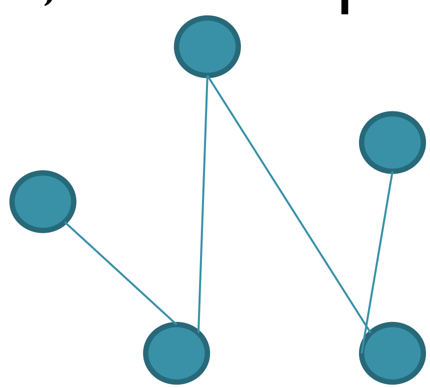


G = (X,V)



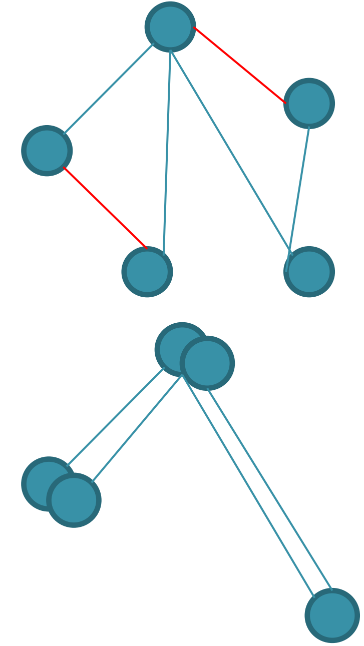
3. Видалення ребер.

Нехай li – ребро графу G = (X,V). Тоді G-(li) – підграф графу G, який отримано після викидання ребра li.



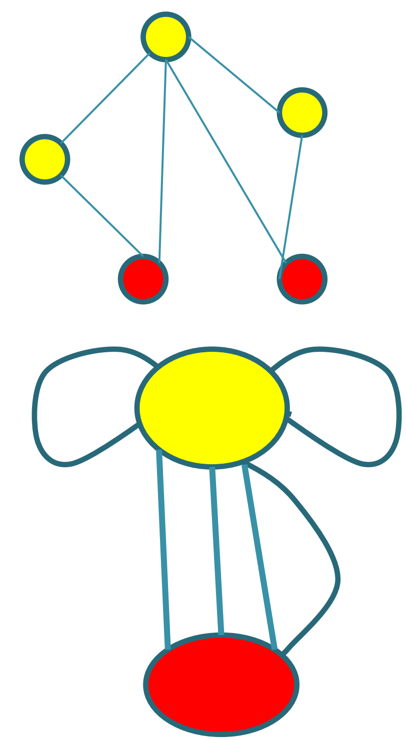
4. Стягування.

Стягування – операція видалення ребра l і ототожнювання його кінцевих вершин. Граф G називають стягненим до графу H, якщо H можна отримати з G послідовністю стягувань .



5. Замкнення або ототожнювання.

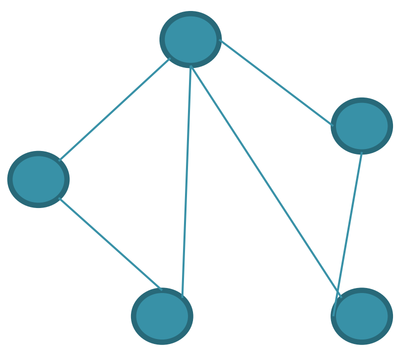
Кажуть, що пара вершин графу G x_i та x_j замикаються (ототожнюються), якщо вони замінюються новою вершиною, всі ребра графу G інциндентні x_i та x_j, стають інциндентними новій вершині.



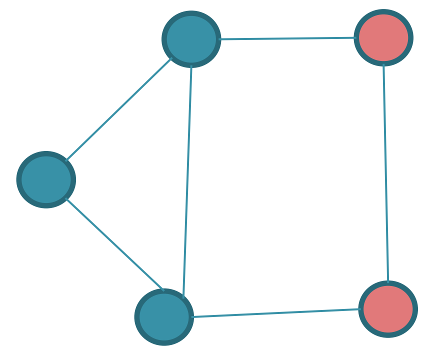
§3 Бінарні операції над графами

1. Об’єднання графів.

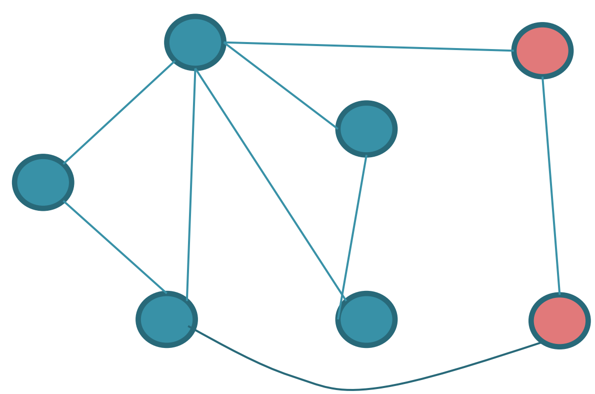
Об’єднанням графів G_1 та G_2, позначається $G_1 \cup G_2$, є граф $G_3 = (X_1 \cup X_2, V_1 \cup V_2)$ множина його вершин є об’єднанням X_1 та X_2, а множина його ребер є об’єднанням V_1 та V_2 .



G_1



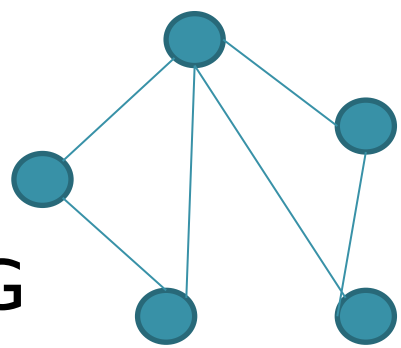
G_2



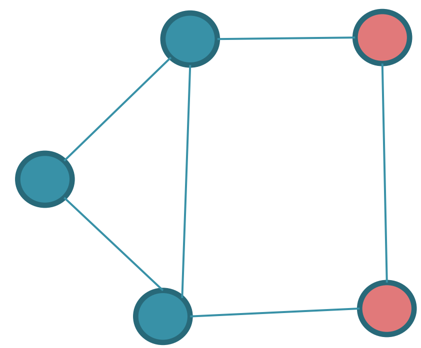
$G_1 \cup G_2$

2. Перетин

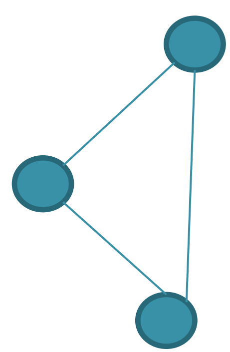
Перетином графів G_1 та G_2, позначається $G_1 \cap G_2$ є граф $G_3 = (X_1 \cap X_2, V_1 \cap V_2)$, тобто множина його вершин складається лише з тих вершин, які є одночасно в G_1 та G_2, а множина ребер G_3 складається з ребер, які одночасно присутні в G_1 та G_2 .



G_1



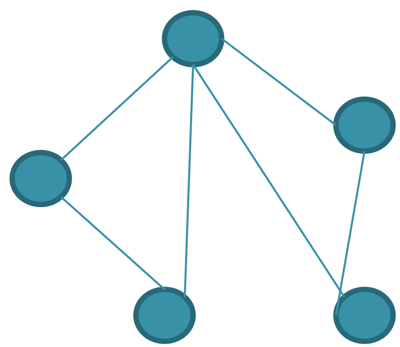
G_2



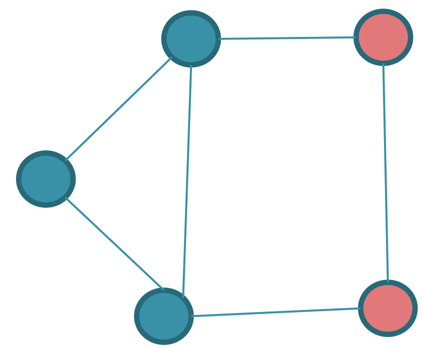
$G_1 \cap G_2$

3. Кільцева сума

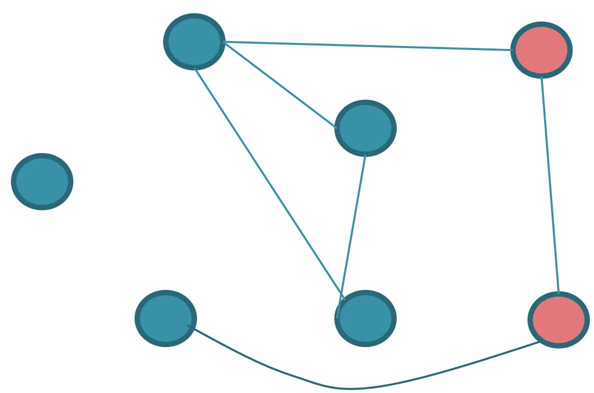
Кільцева сума двох графів G_1 та G_2 позначається $G_1 \oplus G_2$, являє собою граф G_3, який складається з ребер, що присутні або в G_1, або в G_2, але не в обох одночасно.



G_1



G_2



$G_1 \oplus G_2$