

## Лекция 17.

**Тема:** Графический метод и симплекс-метод задачи линейного программирования.

**Цель:** Научиться решать графическим и симплекс-методами задачу ЛП.

# Графический метод решения ЗЛП.

Графический метод основан на геометрической интерпретации задачи линейного программирования.

Найти минимальное решение функции

$$Z = C_1 X_1 + C_2 X_2 \text{ при } \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \leq b_2 \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{mn}x_n \leq b_m \end{cases}$$

Найти минимальное решение функции

$$Z = C_1 X_1 + C_2 X_2 \text{ при } \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \leq b_2 \\ \dots \quad \dots \quad \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{mn}x_n \leq b_m \end{cases}$$

Предположим, что эта система совместна (имеет хотя бы одно решение) и ее многоугольник решений ограничен. Линейная функция  $Z$  при фиксированных значениях является уравнением прямой  $c_1x_1 + c_2x_2 = h$ .

Построим многоугольник решений системы ограничений и график линейной функции  $c_1x_1 + c_2x_2 = 0$ . Тогда задачу линейного программирования можно сформулировать так: найти точку многоугольника решений, в которой прямая  $c_1x_1 + c_2x_2 = h$  опорная и функция  $Z$  при этом достигает минимума.

Значения  $z = c_1x_1 + c_2x_2$  в направлении  $N = (c_1, c_2)$ ,  
поэтому прямую  $c_1x_1 + c_2x_2 = 0$  передвигаем  
параллельно самой себе в направлении  $N$

## ***Неединственность оптимального решения.***

Для некоторых задач линейного программирования может существовать несколько допустимых решений со значением целевой функции равной оптимальному значению задачи. В таких случаях все эти допустимые решения оптимальны и говорят, что задача линейного программирования имеет альтернативные оптимальные решения.



# Симплексный метод решения ЗЛП.

Из свойств решений задачи ЛП следует, что существует такая угловая точка (вершина) многогранника решений, в которой целевая функция достигает своего наибольшего (наименьшего) значения.

Каждой угловой точке многогранника решений соответствует опорный план, а каждый опорный план определяется системой  $m$  линейно независимых векторов, содержащихся в данной системе из  $n$  векторов  $A_1, A_2, \dots, A_n$ .

Для отыскания оптимального плана необходимо исследовать только опорные планы. Количество опорных планов, содержащихся в данной задаче, определим через .

## ***Признак оптимальности опорного плана.***

После заполнения таблиц может иметь место один из случаев:

1. Все  $\Delta_j \geq 0$  для любой  $x_j$ , то работает признак оптимальности, и исходный опорный план является оптимальным.

2. Если  $\Delta_j \leq 0$  для некоторой  $x_j$ , но при этом все  $a_{ij} \geq 0$ , тогда целевая функция неограниченна на множестве ее планов.

3. Если  $\Delta_j < 0$  для некоторых  $j$ , и при этом  $a_{ij} < 0$ , то можно перейти от исходного плана к новому опорному, при котором значение целевой функции будет больше, чем предыдущее. Этот переход осуществляется исключением из исходного базиса какого-нибудь вектора и введением в базис нового.

## Неединственность оптимума.

Если в оптимальной таблице небазисный вектор имеет нулевую оценку, то ЗЛП будет иметь неединственное решение. Можно перейти к другой оптимальной таблице с другим решением, но значение целевой функции будет оставаться прежним. График целевой функции параллелен той прямой, на которой лежит точка  $\min$  или  $\max$ .



## ***Неограниченность оптимума.***

Говорят, что задача ЛП имеет неограниченный оптимум, если у нее нет конечного оптимального решения. А планом случая  $Z \rightarrow +\infty$  (для задачи максимизации),  $Z \rightarrow -\infty$  (для задачи минимизации).

## Вырожденность и зацикливание

При рассмотрении симплекс-метода предполагаем, что все  $b_i > 0$ . Если какое-то  $b_i = 0$ , то такой план задачи в качестве базисной переменной содержит нулевое значения, т.к. план называется **вырожденным**.

Правило для устранения зацикливания

Если на каком-либо этапе расчета возникает неопределенность в выборе разрешающей строки, т.е. 2 и более  $\min$  одинаковых отношения, то следует выбрать ту строку, для которой отношение элементов следующего столбца к разрешающему является наименьшим. Если снова оказываются равными минимальные отношения, то выбирают следующий столбец и так до тех пор, пока разрешающая строка не определится однозначно.

## Вопросы:

- 1) При каких условиях задача ЛП, решая графическим методом, имеет решение?
- 2) Симплекс метод – это аналитический метод решения задачи ЛП или нет?