

Лекция 17.

Тема: Графический метод и симплекс-метод задачи линейного программирования.

Цель: Научиться решать графическим и симплекс-методами задачу ЛП.

Графический метод решения ЗЛП.

Графический метод основан на геометрической интерпретации задачи линейного программирования.

Найти минимальное решение функции

$$Z = C_1 X_1 + C_2 X_2 \text{ при } \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \leq b_2 \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{mn}x_n \leq b_m \end{cases}$$

Найти минимальное решение функции

$$Z = C_1 X_1 + C_2 X_2 \text{ при } \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \leq b_2 \\ \dots \quad \dots \quad \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{mn}x_n \leq b_m \end{cases}$$

Предположим, что эта система совместна (имеет хотя бы одно решение) и ее многоугольник решений ограничен. Линейная функция Z при фиксированных значениях является уравнением прямой $c_1x_1 + c_2x_2 = h$.

Построим многоугольник решений системы ограничений и график линейной функции $c_1x_1 + c_2x_2 = 0$. Тогда задачу линейного программирования можно сформулировать так: найти точку многоугольника решений, в которой прямая $c_1x_1 + c_2x_2 = h$ опорная и функция Z при этом достигает минимума.

Значения $z = c_1x_1 + c_2x_2$ в направлении $N = (c_1, c_2)$,
поэтому прямую $c_1x_1 + c_2x_2 = 0$ передвигаем
параллельно самой себе в направлении N

Неединственность оптимального решения.

Для некоторых задач линейного программирования может существовать несколько допустимых решений со значением целевой функции равной оптимальному значению задачи. В таких случаях все эти допустимые решения оптимальны и говорят, что задача линейного программирования имеет альтернативные оптимальные решения.

Симплексный метод решения ЗЛП.

Из свойств решений задачи ЛП следует, что существует такая угловая точка (вершина) многогранника решений, в которой целевая функция достигает своего наибольшего (наименьшего) значения.

Каждой угловой точке многогранника решений соответствует опорный план, а каждый опорный план определяется системой m линейно независимых векторов, содержащихся в данной системе из n векторов A_1, A_2, \dots, A_n .

Для отыскания оптимального плана необходимо исследовать только опорные планы. Количество опорных планов, содержащихся в данной задаче, определим через .

Признак оптимальности опорного плана.

После заполнения таблиц может иметь место один из случаев:

1. Все $\Delta_j \geq 0$ для любой x_j , то работает признак оптимальности, и исходный опорный план является оптимальным.

2. Если $\Delta_j \leq 0$ для некоторой x_j , но при этом все $a_{ij} \geq 0$, тогда целевая функция неограниченна на множестве ее планов.

3. Если $\Delta_j < 0$ для некоторых j , и при этом $a_{ij} < 0$, то можно перейти от исходного плана к новому опорному, при котором значение целевой функции будет больше, чем предыдущее. Этот переход осуществляется исключением из исходного базиса какого-нибудь вектора и введением в базис нового.

Неединственность оптимума.

Если в оптимальной таблице небазисный вектор имеет нулевую оценку, то ЗЛП будет иметь неединственное решение. Можно перейти к другой оптимальной таблице с другим решением, но значение целевой функции будет оставаться прежним. График целевой функции параллелен той прямой, на которой лежит точка \min или \max .

Неограниченность оптимума.

Говорят, что задача ЛП имеет неограниченный оптимум, если у нее нет конечного оптимального решения. А в планом случае $Z \rightarrow +\infty$ (для задачи максимизации), $Z \rightarrow -\infty$ (для задачи минимизации).

Вырожденность и зацикливание

При рассмотрении симплекс-метода предполагаем, что все $b_i > 0$. Если какое-то $b_i = 0$, то такой план задачи в качестве базисной переменной содержит нулевое значения, т.к. план называется **вырожденным**.

Правило для устранения зацикливания

Если на каком-либо этапе расчета возникает неопределенность в выборе разрешающей строки, т.е. 2 и более \min одинаковых отношения, то следует выбрать ту строку, для которой отношение элементов следующего столбца к разрешающему является наименьшим. Если снова оказываются равными минимальные отношения, то выбирают следующий столбец и так до тех пор, пока разрешающая строка не определится однозначно.

Вопросы:

- 1) При каких условиях задача ЛП, решая графическим методом, имеет решение?
- 2) Симплекс метод – это аналитический метод решения задачи ЛП или нет?