


Графическое решение задач линейного программирования





Задача линейного программирования с **двумя неизвестными** может быть решена графически

Замечание:

К такой форме может быть сведена и каноническая задача (с ограничениями в виде уравнений), когда число переменных n больше числа уравнений m на 2

Пусть задача линейного программирования задана в виде:

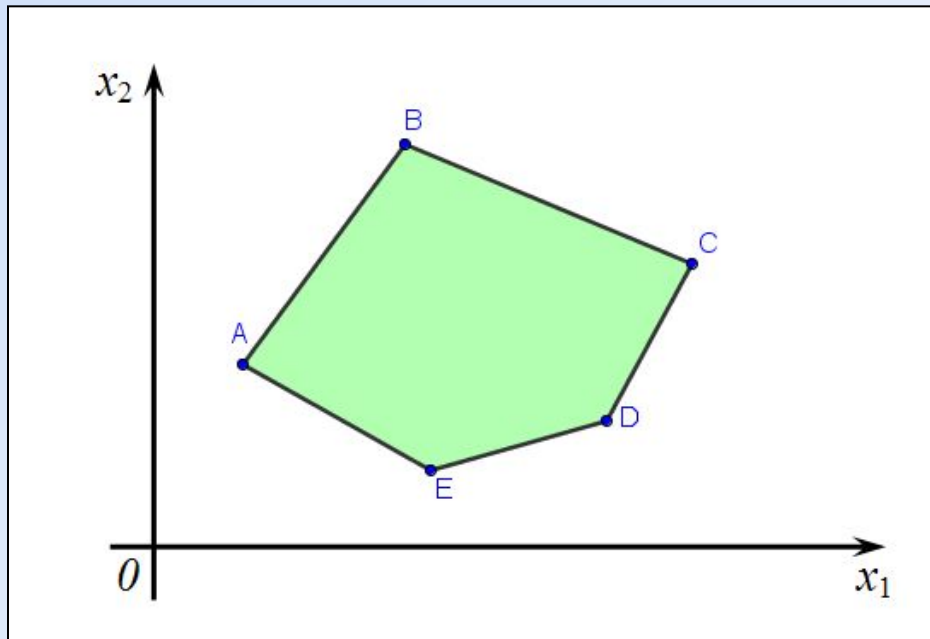
$$\begin{cases} a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 \leq b_i, i = \overline{1, m} \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$
$$F = c_1x_1 + c_2x_2 \rightarrow \max \text{ (min)}$$



Алгоритм графического решения ЗЛП

1. Построить **область допустимых решений** (ОДР) в системе координат, заданную системой ограничений

$$\begin{cases} a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 \leq b_i, i = \overline{1, m} \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$



Алгоритм графического решения ЗЛП

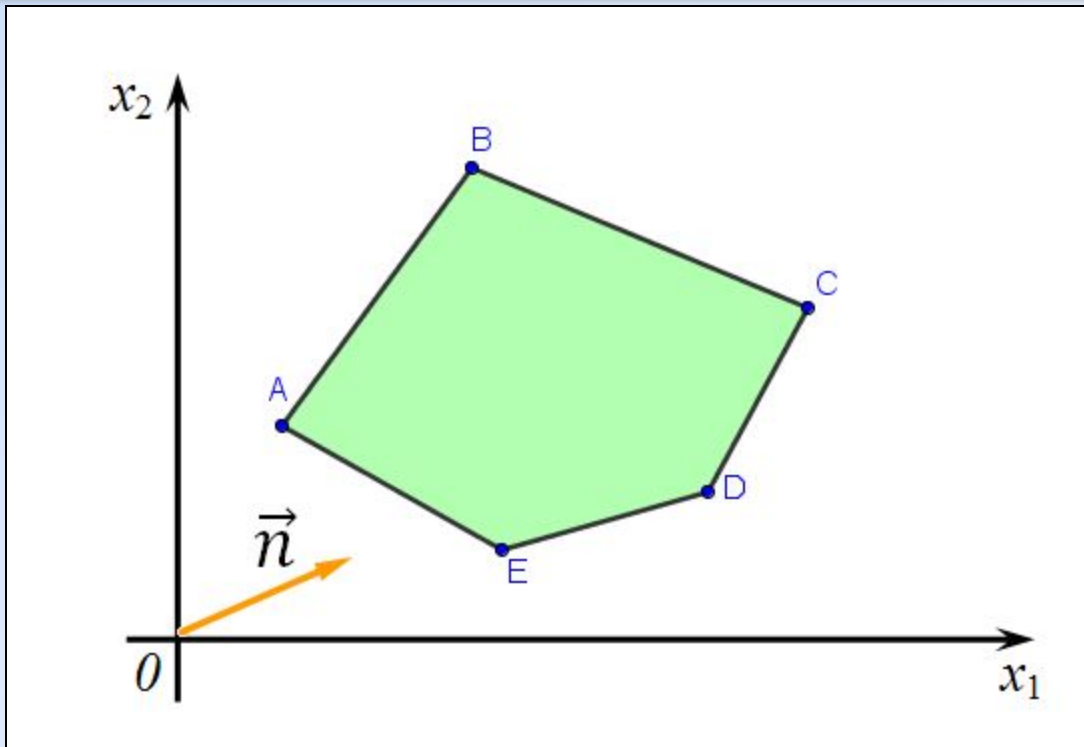
2. Построить градиент целевой функции

$$F = c_1x_1 + c_2x_2$$

(вектор нормали к прямой $c_1x_1 + c_2x_2 = F$)

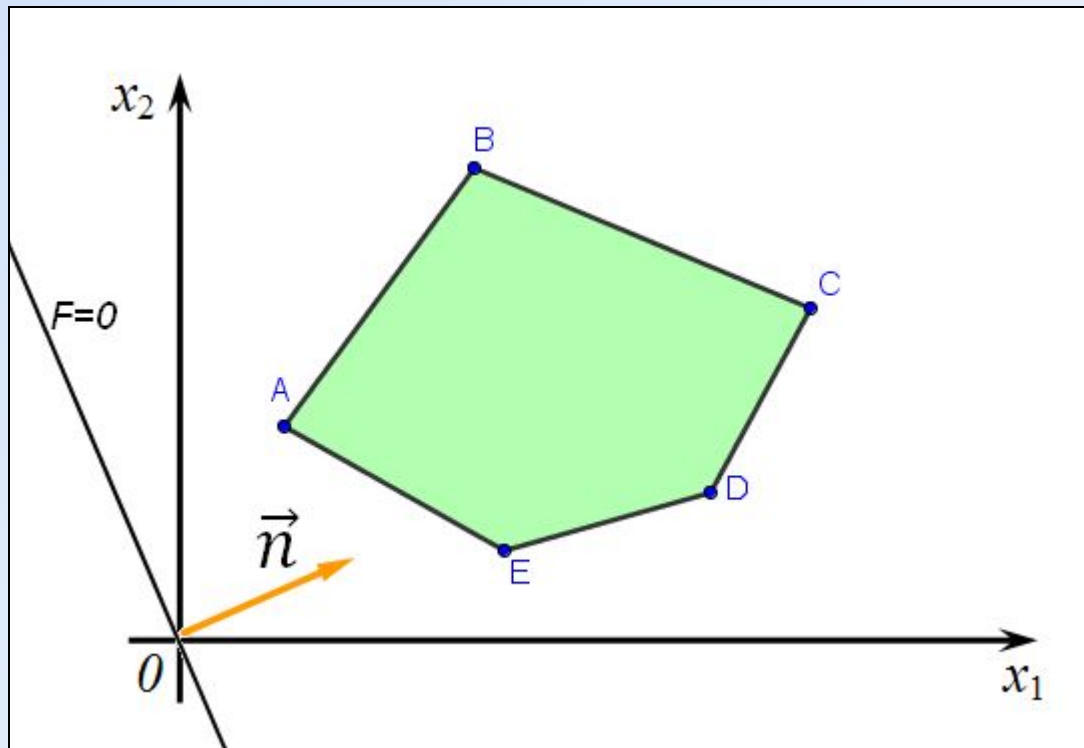


$$\vec{n}(c_1; c_2)$$



Алгоритм графического решения ЗЛП

3. Построить опорную прямую, перпендикулярную вектору нормали – линию уровня целевой функции



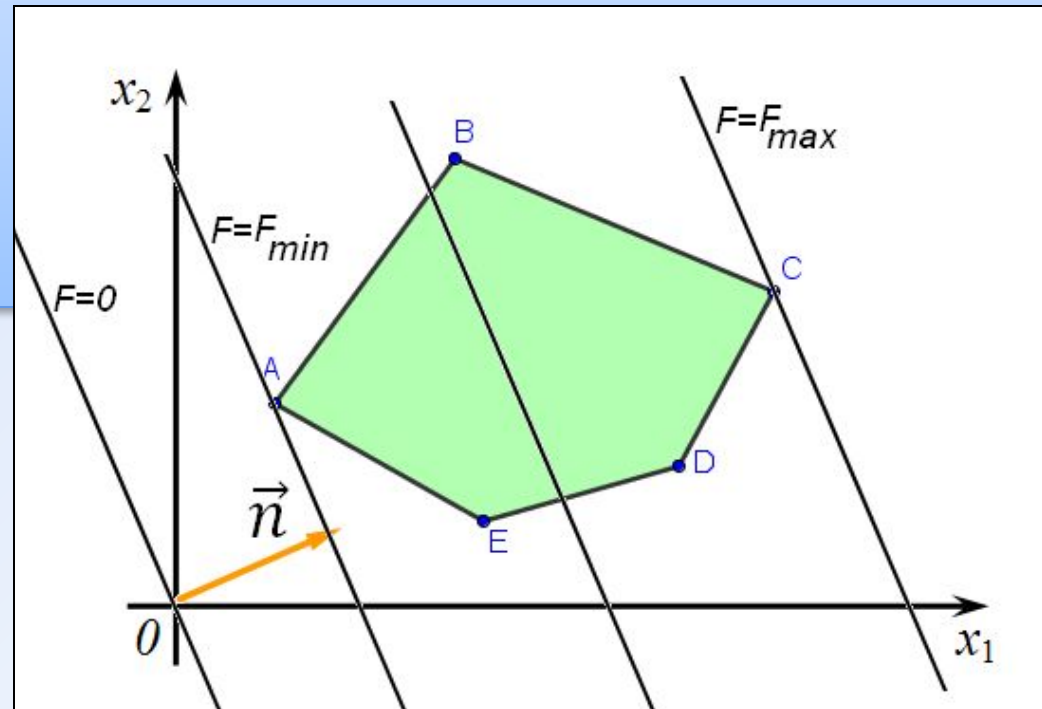
Алгоритм графического решения ЗЛП

4. Перемещая опорную прямую в направлении вектора нормали, определить «**точку входа**» и «**точку выхода**» (первая встретившаяся опорной прямой точка из ОДР и последняя встретившаяся опорной прямой точка из ОДР соответственно)




В точке входа: $F \rightarrow \min$

В точке выхода: $F \rightarrow \max$

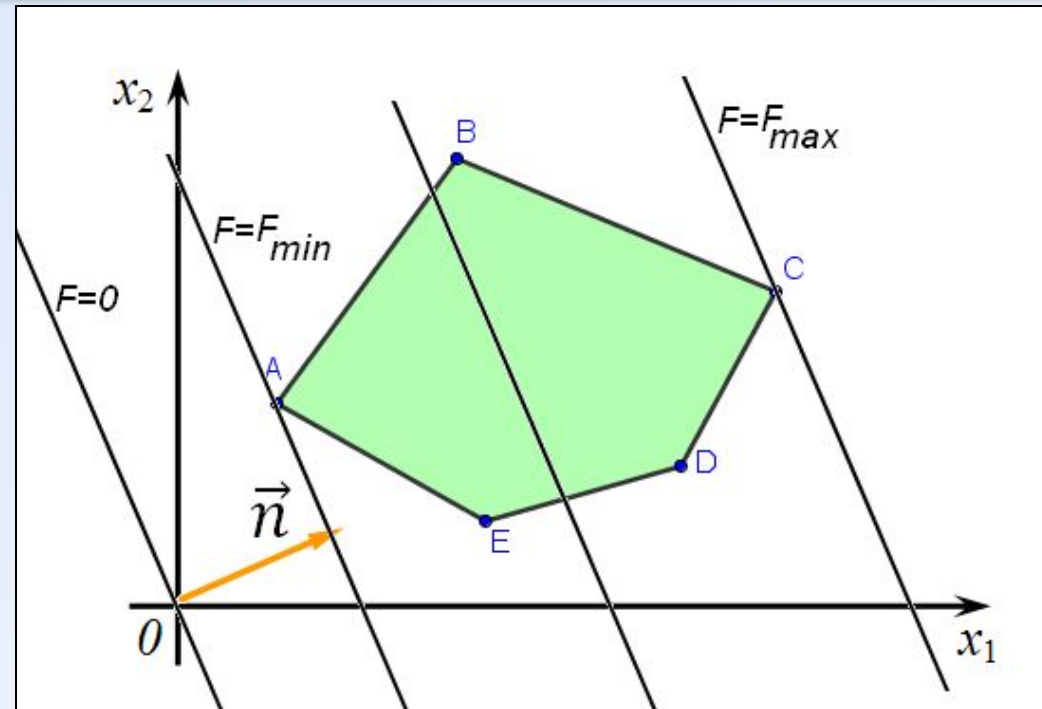


Алгоритм графического решения ЗЛП

5. Определить координаты оптимальной точки (точки входа или точки выхода) и найти значение целевой функции в ней 

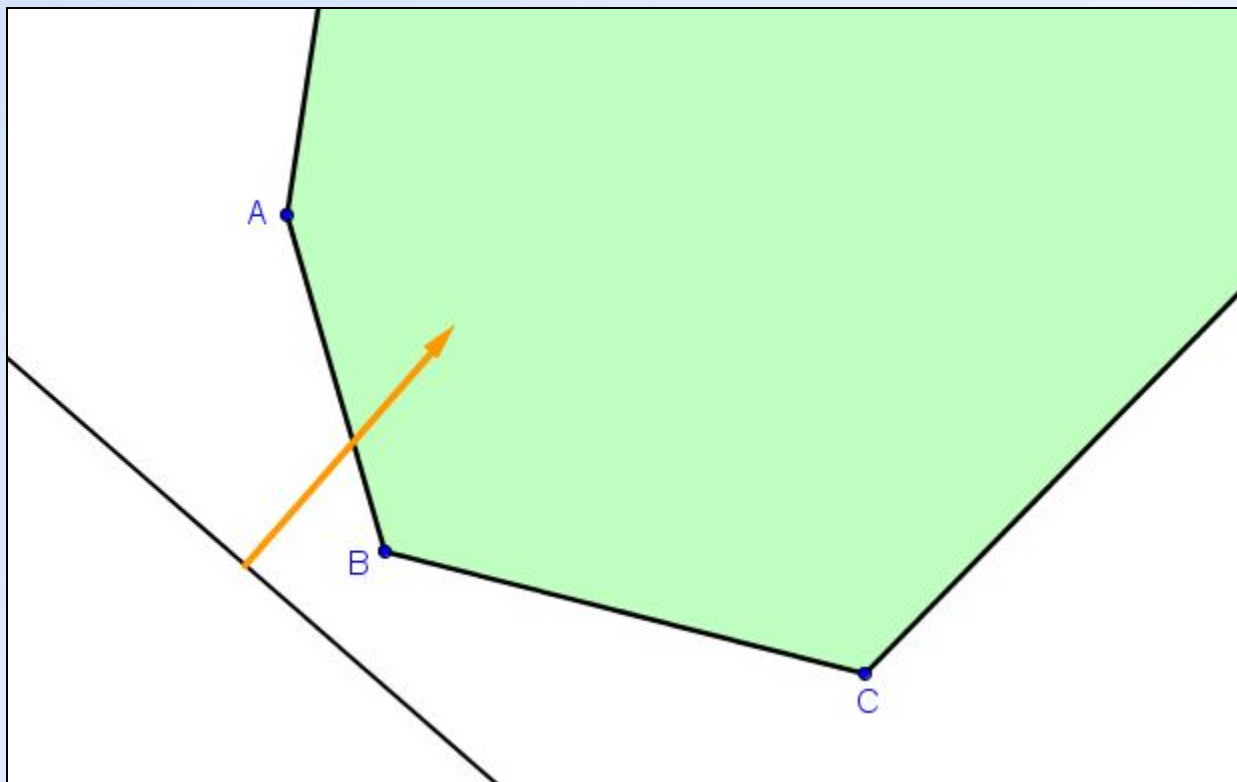
Замечание:

Оптимальная точка является угловой точкой выпуклой области допустимых решений



Частные случаи

Минимальное значение целевая функция достигает в точке **B**: $F_{\min} = F(B)$
Максимальное значение: $F_{\max} = \infty$

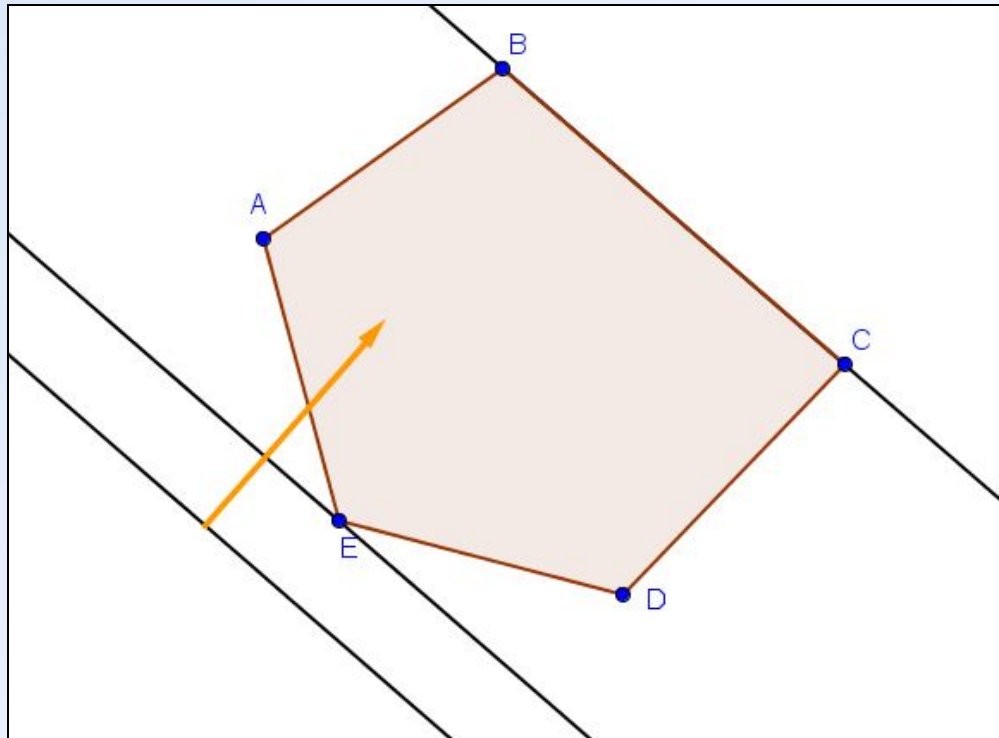


Частные случаи

Минимальное значение целевая функция достигает в точке **E**: $F_{\min} = F(E)$

Максимальное значение целевая функция достигает во всех точках отрезка **BC** :

$$F_{\min} = F(B) = F(C)$$





Р Решить графически ЗЛП

$$\begin{cases} x_2 - x_1 \leq 2, \\ 4x_1 + x_2 \geq 4, \\ x_1 + x_2 \leq 6, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

$$F = 3x_1 + 4x_2 \rightarrow \max$$

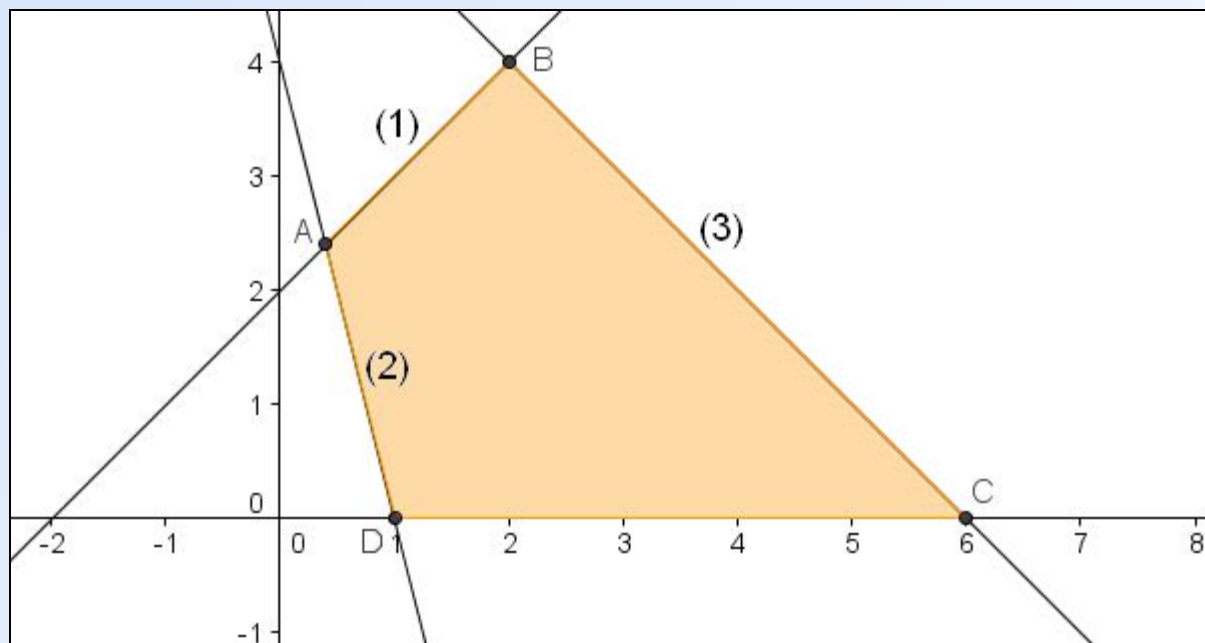


Решить графически ЗЛП

$$\begin{cases} x_2 - x_1 \leq 2, \\ 4x_1 + x_2 \geq 4, \\ x_1 + x_2 \leq 6, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$
$$F = 3x_1 + 4x_2 \rightarrow \max$$

1. Построим область допустимых решений, заданную системой неравенств

(см. презентацию **Геометрический смысл линейного неравенства**)

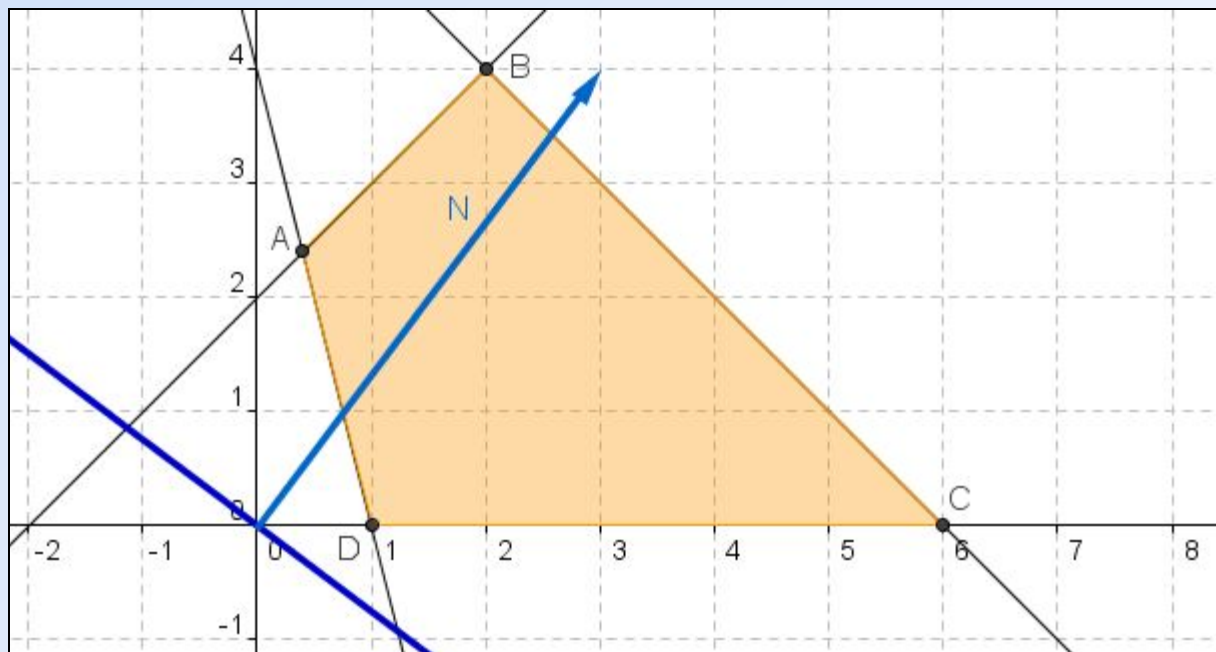




Решить графически ЗЛП

$$\begin{cases} x_2 - x_1 \leq 2, \\ 4x_1 + x_2 \geq 4, \\ x_1 + x_2 \leq 6, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$
$$F = 3x_1 + 4x_2 \rightarrow \max$$

2. Построим вектор нормали $N(3;4)$ и перпендикулярную ему опорную прямую



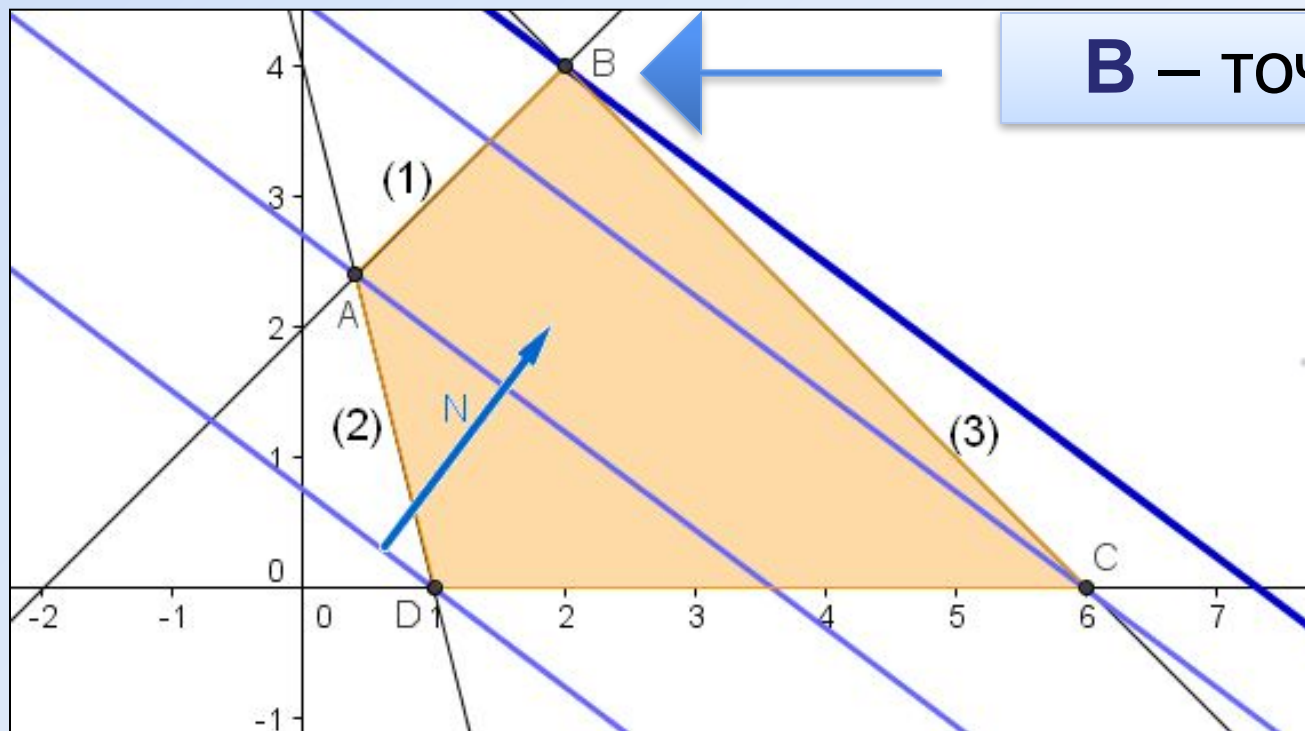


Решить графически ЗЛП

$$\begin{cases} x_2 - x_1 \leq 2, \\ 4x_1 + x_2 \geq 4, \\ x_1 + x_2 \leq 6, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$
$$F = 3x_1 + 4x_2 \rightarrow \max$$

Файл 04_model_01.ggb

3. Перемещаем опорную прямую в направлении вектора нормали и определяем «точку выхода»



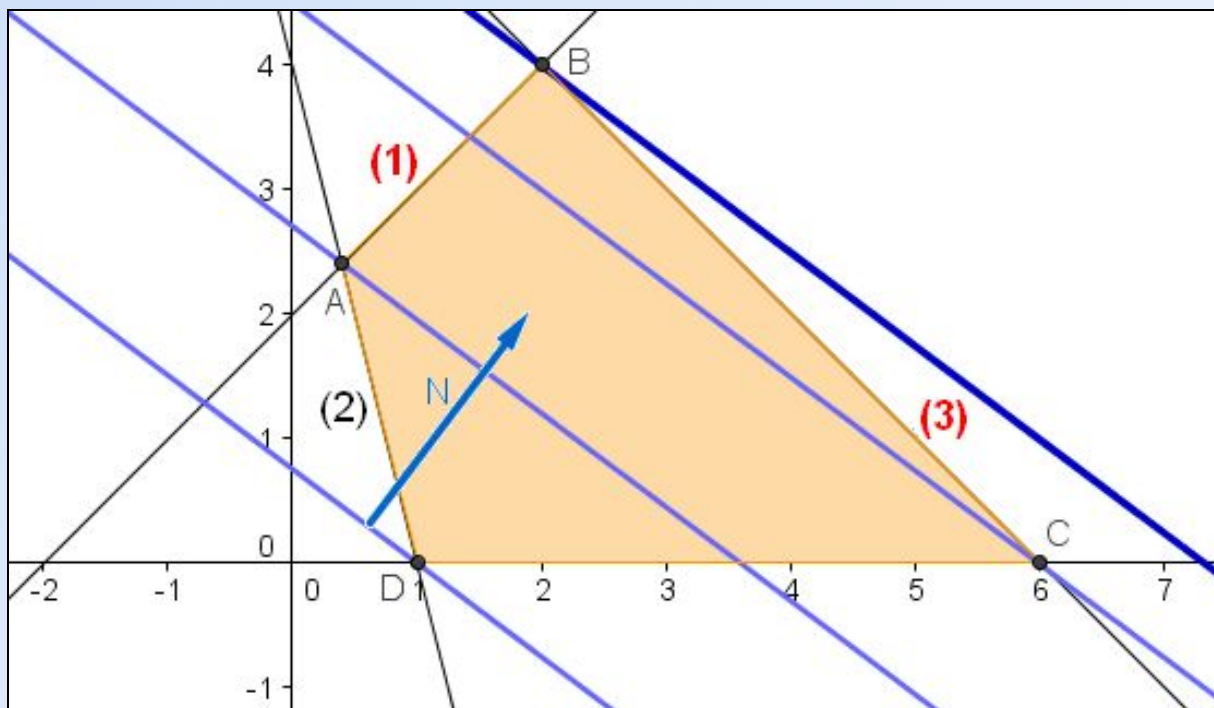
B – точка выхода



Решить графически ЗЛП

$$\begin{cases} x_2 - x_1 \leq 2, \\ 4x_1 + x_2 \geq 4, \\ x_1 + x_2 \leq 6, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$
$$F = 3x_1 + 4x_2 \rightarrow \max$$

4. Найдем координаты точки В, как точки пересечения прямых (1) и (3)





Решить графически ЗЛП

$$\begin{cases} x_2 - x_1 \leq 2, \\ 4x_1 + x_2 \geq 4, \\ x_1 + x_2 \leq 6, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$
$$F = 3x_1 + 4x_2 \rightarrow \max$$

4. Найдем координаты точки В, как точки пересечения прямых (1) и (3):

$$B = (1) \cap (3)$$

$$B: \begin{cases} x_2 - x_1 = 2, \\ x_1 + x_2 = 6. \end{cases} \quad \begin{cases} 2x_2 = 8, \\ x_1 + x_2 = 6. \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = 4, \\ x_1 = 2. \end{cases}$$

$$B(2; 4)$$



Решить графически ЗЛП

$$\begin{cases} x_2 - x_1 \leq 2, \\ 4x_1 + x_2 \geq 4, \\ x_1 + x_2 \leq 6, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$
$$F = 3x_1 + 4x_2 \rightarrow \max$$

5. Найдем значение целевой функции в точке В

$$F_{\max}(B) = F(2; 4) = 3 \cdot 2 + 4 \cdot 4 = 22$$



Р Решить графически ЗЛП

$$\begin{cases} x_2 - x_1 \leq 2, \\ 4x_1 + x_2 \geq 4, \\ x_1 + x_2 \leq 6, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$
$$F = 3x_1 + 4x_2 \rightarrow \max$$

Ответ:

$$F_{\max}(2; 4) = 22$$



Литература

1. Кремер Н.Ш., Путко Б.А. Исследование операций в экономике. - М.: ЮНИТИ, 2003. - 407 с.
2. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. Часть 1. - М.: Высшая школа, 1986. – С.271-274