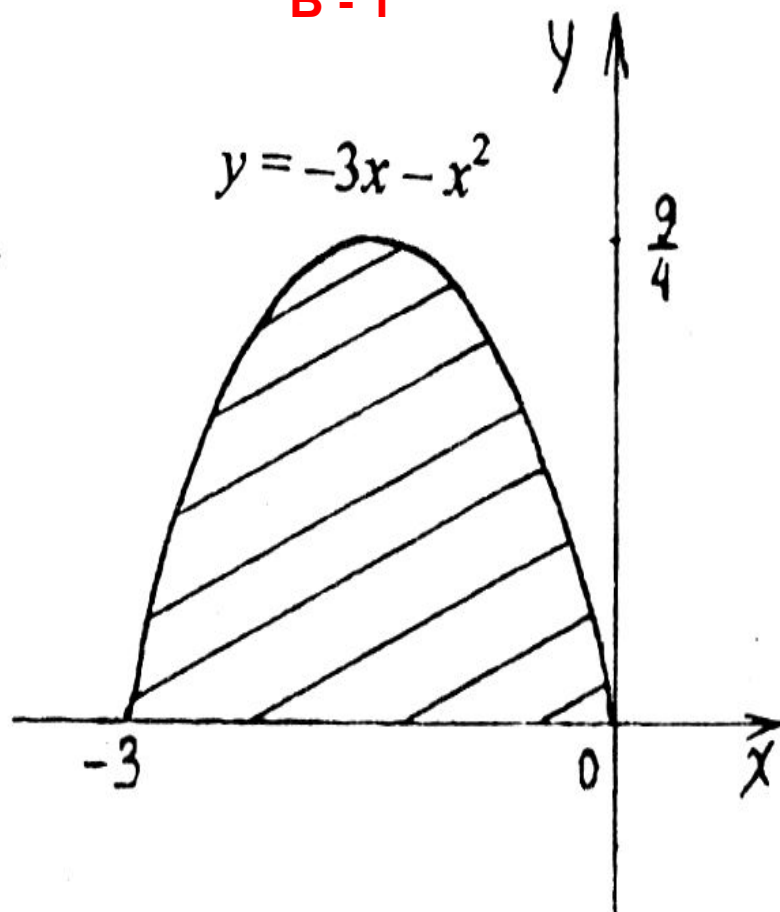


Интервал

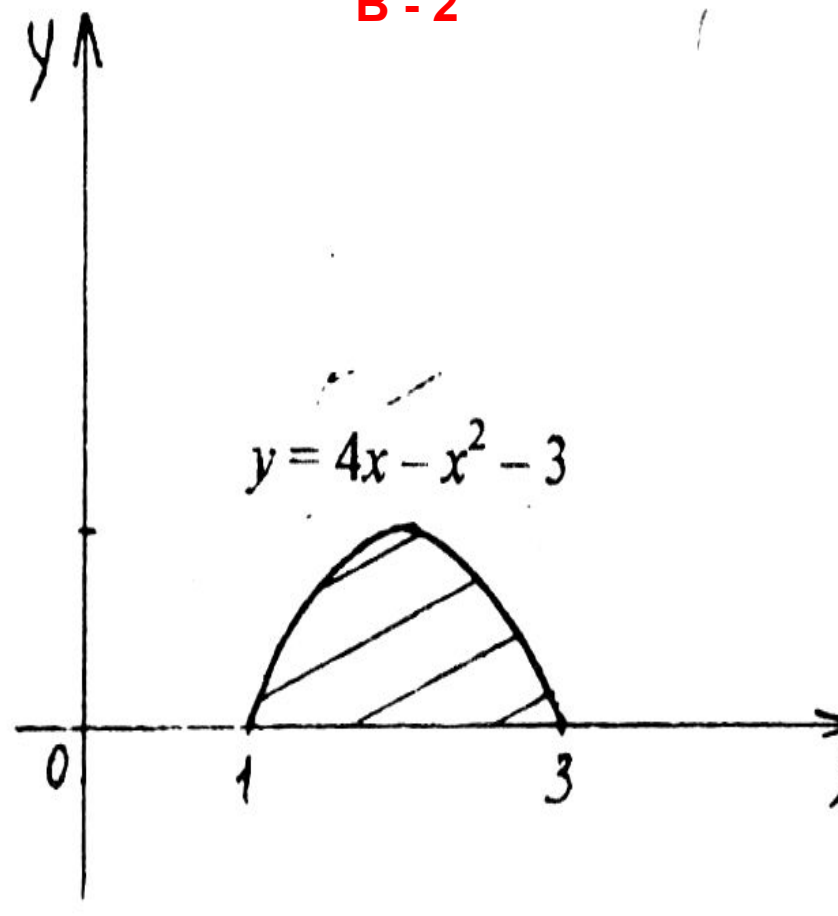
Повторение

Вычислите площадь заштрихованной фигуры самостоятельно

В - 1



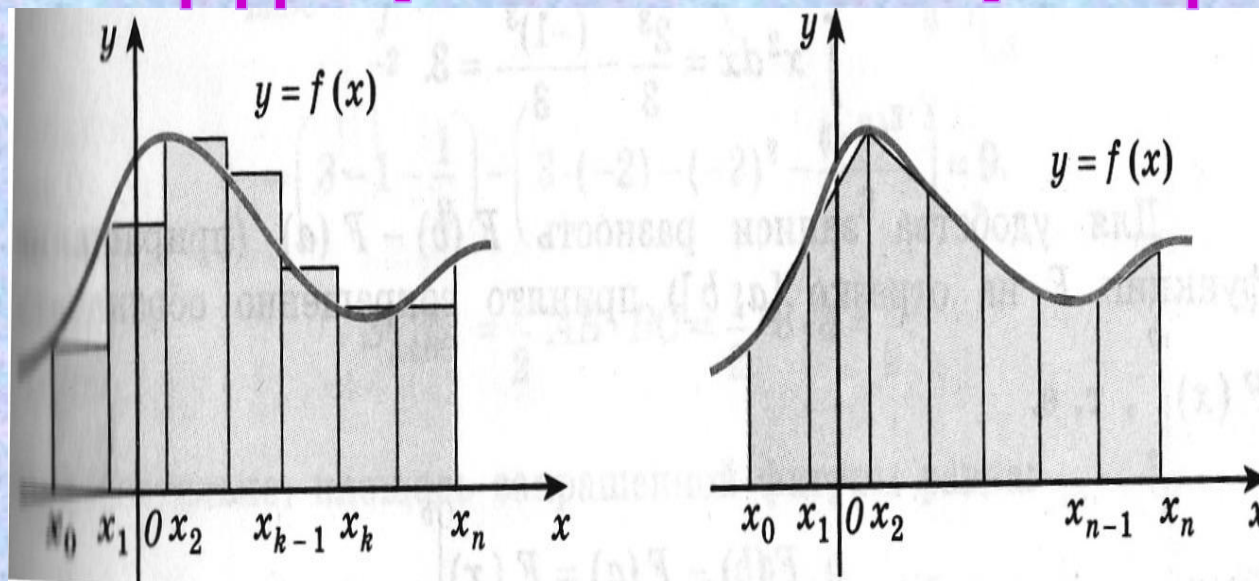
В - 2



Ответы: $S = 4, 5$

$S = 1\frac{1}{3}$

Другой подход к вычислению площади криволинейной трапеции



В силу непрерывности f объединение построенных прямоугольников при большом n «почти совпадает» с криволинейной трапецией.

$$S_n \rightarrow S \text{ при } n \rightarrow \infty.$$

Отрезок $[a; b]$ разбит на n отрезков одинаковой длины точками $x_1; x_2; \dots; x_{n-1}; x_n$.

$$\Delta x = (b - a)/n$$

На каждом отрезке как на основании построим прямоугольник высотой $f(x_{k-1})$.

$$S = f(x_{k-1}) \Delta x = (b - a)/n f(x_{k-1}).$$

S_n - сумма площадей всех прямоугольников

Определение интеграла

Для любой **непрерывной** на отрезке **[a; b]** функции **f**

(не обязательно неотрицательной)

S_n при $n \rightarrow \infty$ стремится к некоторому числу.

Это число называется **интегралом функции от a до b.**

Обозначение

$$\int_a^b f(x) dx$$

Т.е. $S_n \rightarrow \int_a^b f(x) dx$ при $n \rightarrow \infty$

a и b – пределы интегрирования: b – верхний предел; a – нижний предел. **Знак $\int$** - знак

интеграла. **Функция f** – подынтегральная функция. **Переменная x** – переменная интегрирования.

Из истории



Г.В.Лейбниц



Якоб Бернулли



Иоганн Бернулли

Символ интеграла введён **Лейбницем (1675г.)**. Этот знак является изменением латинской буквы **S** (первой буквы слова **summa**). Само слово интеграл придумал Я. Бернулли (1690 г.). Вероятно, оно происходит от латинского **integro**, которое переводится как **приводить в прежнее состояние, восстанавливать**.

(Действительно, операция интегрирования «восстанавливает» функцию, дифференцированием которой получена подынтегральная функция.) Возможно, происхождение слова интеграл иное: слово **integer** означает **целый**.

В ходе переписки **И. Бернулли** и **Г.Лейбниц** согласились с предложением **Я.Бернулли**. Тогда же, в **1696г.**, появилось и название **новой ветви математики** – **интегральное исчисление** (**calculus integralis**), которое ввел **И. Бернулли**.

Формула Ньютона - Лейбница

Сравнивая формулы для площади криволинейной трапеции

$$S = F(b) - F(a) \quad \text{и} \quad S = \int_a^b f(x) dx$$

Получаем

Если F – первообразная для f на $[a; b]$, то

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

*Формула верна для любой функции f ,
непрерывной на $[a; b]$*

Замечания

1. $\int_{-1}^2 1/x^2 dx$ – по определению не существует, т.к. на $[-1; 2]$ функция $f(x) = 1/x^2$ не является непрерывной, а значит функция $F(x) = -1/x$ не является первообразной для $f(x)$ на $[-1; 2]$. ($0 \in [-1; 2]$ не входит в $D(f)$).

2. При $a \geq b$
$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$$

При таком соглашении формула Ньютона – Лейбница оказывается верной при произвольных a и b . В частности,

$$\int_a^a f(x) dx = 0$$

СВОЙСТВА ИНТЕГРАЛА

Сформулируйте и докажите

$$1) \int_a^b (f(x) \pm g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx;$$

$$2) \int_a^b k f(x) dx = k \int_a^b f(x) dx. \quad 3) \int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx.$$

$$4) \text{ Если } a < c < b, \text{ то } \int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

(аддитивное свойство интеграла).

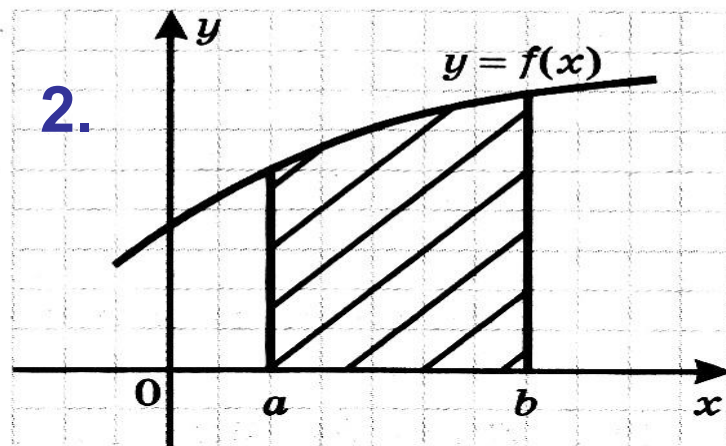
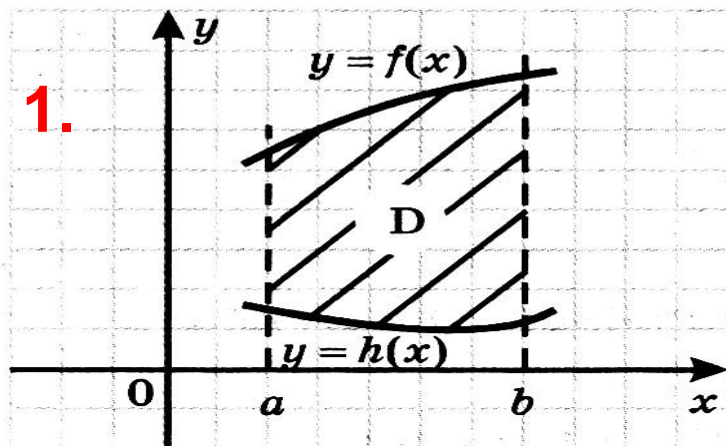
Вычисление площадей с помощью интеграла

Если фигура D представляет собой часть плоскости xOy , ограниченную прямыми $x = a$, $x = b$ ($a < b$) и графиками непрерывных на отрезке $[a; b]$ функций $y = f(x)$, $y = h(x)$ таких, что для любого x из $[a; b]$ выполняется неравенство $h(x) \leq f(x)$, то площадь S фигуры D (рис. 1) вычисляется по формуле

$$S = \int_a^b (f(x) - h(x)) dx.$$

Площадь праволинейной трапеции, представленной на рис. 2, вычисляется по формуле

$$S = \int_a^b f(x) dx.$$



Задания

1. Вычислить интеграл
от 0 до 2 функции $f(x) = x^3$
(от -1 до 1)

2. Вычислить интеграл от $-\pi/4$ до π
функции $f(x) = 3 \cos 2x$.

3. Вычислить площадь фигуры,
ограниченной линиями $f_1(x) = x^2$; $f_2(x) = 2x$

4. Вычислить площадь фигуры,
ограниченной линиями: $x = 0$; $y = x^2 - 4x + 5$ и
касательной к этому графику в точке $x_0 = 2$.

Задания уровня С

Найдите *площадь фигуры* ограниченной линиями

$$y = x^2 - 6x + 5 \text{ и } y = 5 - 2x - x^2$$

двумя способами:

- 1) с помощью площадей криволинейных трапеций;
- 2) с помощью интеграла и его свойств.

Работа в группах

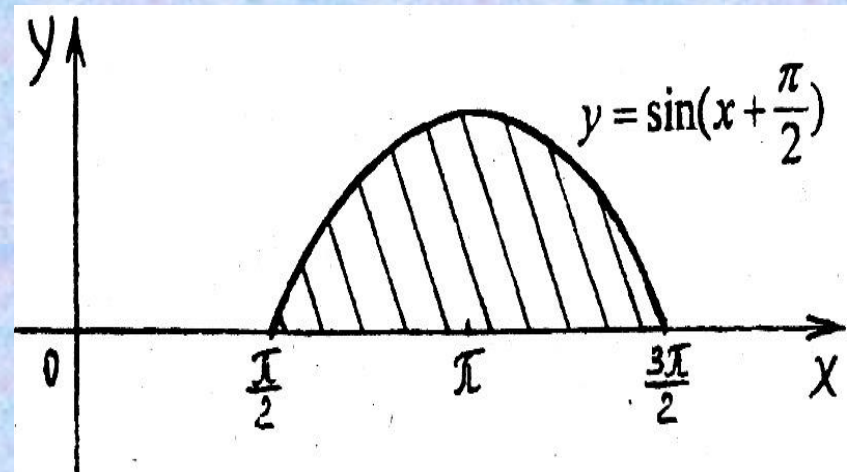
Группа 1: № 361 (а; г); 364 (б; в).

Группа 2: № 361 (б; в); 364 (а; г).

Группа 3:

- 1) Вычислите площадь
заштрихованной фигуры

Ответ: 2



- 2) Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями
 $y = x^2$; $y = 4$; $x = -2$; $x = 2$.

Ответ: $5\frac{1}{3}$

- 3) Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями
 $y = x^2 + 1$; $y = 5$.

Ответ: $\frac{2}{3}$

Программированный контроль

Задание		Ответ			
Вариант I	Вариант II	1	2	3	4
Вычислите: $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos x dx; \int_1^2 \frac{dx}{x^4}$	$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx; \int_1^2 \frac{dx}{x^5}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{15}{8}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{15}{64}$	$\frac{1}{2}; \frac{15}{16}$	$\sqrt{2}; \frac{7}{24}$
Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями: $y = x^2; y = 0; x = 2.$	$y = x^3; y = 0; x = 2.$	4	8	$2\frac{2}{3}$	2

Верный ответ:

Вариант 1:

2; 4; 3.

Вариант 2:

3; 2; 1.

Домашнее задание

**п. 30 (выучить к зачёту по § 7 – 8
теоретический материал);**

№ 362; 360 (а; г);

**повторить уравнение касательной
п. 19.**

По желанию.

**Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями
 $x = 0$; $y = \sin x$; $y = \cos x$; $x = \pi / 2$.**

Ответ: $2\sqrt{2} - 2$.