

**Краевое государственное бюджетное профессиональное образовательное учреждение
Рубцовский аграрно-промышленный техникум**

Интеграл и его применение

Профессор кафедры математики группы ПК-16-2
Филиппов Вячеслав

Определение

Интеграл — одно из важнейших понятий математического анализа, которое возникает при решении задач о нахождении площади под кривой, пройденного пути при неравномерном движении, массы неоднородного тела, и тому подобных, а также в задаче о восстановлении функции по её производной.

Упрощённо интеграл можно представить как аналог суммы для бесконечного числа бесконечно малых слагаемых.

Применение интеграла

В физике

Работа силы ($A = FScos\alpha$, $cos\alpha \neq 1$)

Если на частицу действует сила F , кинетическая энергия не остается постоянной. В этом случае согласно

$$d(\mu v^2/2) = Fds$$

приращение кинетической энергии частицы за время dt равно скалярному произведению Fds , где ds – перемещение частицы за время dt . Величина $dA = Fds$ называется работой, совершаемой силой F .

Пусть точка движется по оси Ox под действием силы, проекция которой на ось Ox есть функция $f(x)$ (f – непрерывная функция). Под действием силы точка переместилась из точки $S_1(a)$ в $S_2(b)$. Разобьем отрезок $[a; b]$ на n отрезков, одинаковой длины $\Delta x = (b - a)/n$. Работа силы будет равна сумме работ силы на полученных отрезках. Т.к. $f(x)$ – непрерывна, то при малом $[a; x_1]$ работа силы на этом отрезке равна $f(a)(x_1 - a)$.

Аналогично на втором отрезке $f(x_1)(x_2 - x_1)$, на n -ом отрезке — $f(x_{n-1})(x_n - x_{n-1})$. Следовательно работа на $[a; b]$ равна: $A \approx A_n = f(a)\Delta x + f(x_1)\Delta x + \dots + f(x_{n-1})\Delta x = ((b-a)/n)(f(a) + f(x_1) + \dots + f(x_{n-1}))$

2. В геометрии

Объём — количественная характеристика пространственного тела.

За единицу измерения объёма принимают куб с ребром 1 мм (1 дм, 1 м и т.д.). Количество кубов единичного объёма размещённых в данном теле — объём тела. Аксиомы объёма:

А) Объём — это неотрицательная величина.

Б) Объём тела равен сумме объёмов тел, его составляющих.

1. Найдем формулу для вычисления объёма:

Выберем ось Ox по направлению расположения этого тела;

2. Определим границы расположения тела относительно Ox ; 3.

введем вспомогательную функцию $S(x)$ задающую

следующее соответствие: каждому x из отрезка $[a;b]$ поставим в соответствие площадь сечения данной фигуры плоскостью, проходящей через заданную точку x перпендикулярно оси Ox .

4. разобьем отрезок $[a;b]$ на n равных частей и через каждую точку разбиения проведем плоскость перпендикулярную оси Ox , при этом наше тело разобьется на части. По аксиоме $V=V_1+V_2+\dots+V_n=\lim(S(x_1)Dx+S(x_2)Dx+\dots+S(x_n)Dx)$ $n \rightarrow \infty, Dx \rightarrow 0$, а $S_k \rightarrow S_{k+1}$, а объем части, заключенной между двумя соседними плоскостями равен объему цилиндра $V_{ц}=S_{ос}h$. Имеем сумму произведений значений функций в точках разбиения на шаг разбиения, т.е. интегральную сумму. По определению определенного интеграла, предел этой суммы при $n \rightarrow \infty$ называется интегралом $\int_a^b S(x)dx$ а $V= \int_a^b S(x)dx$, где $S(x)$ – сечение плоскости, проходящей через b выбранную точку перпендикулярно оси Ox .