4. **Лемма.** Пусть $C \in \Sigma$, $f, g : C \to [-\infty; +\infty]$ – измеримые функции, $f \sim g$. Если один из интегралов $\int\limits_C g\, d\mu$, $\int\limits_C f\, d\mu$ определен, то определен и второй, причем для любого $A \subset C, A \in \Sigma$,

$$\int\limits_A g\, d\mu = \int\limits_A f\, d\mu \ .$$

Доказательство. Пусть, например, $\int\limits_C f\, d\mu$ определен, $\int\limits_C f^+ d\mu < +\infty$. Обозначим

$$C_1 = \{t \in C : g(t) > 0, f(t) \le 0\},\ C_2 = \{t \in C : g(t) \le 0, f(t) > 0\}.$$

Тогда по определению $g^+ = \max(0, g)$, $f^+ = \max(0, f)$ имеем:

$$\{t : g^+(t) > 0\} = \{t : g(t) > 0\} = \left(\{t : f(t) > 0\} \sqcup C_1\right) \setminus C_2 = \left(\{t : f^+(t) > 0\} \sqcup C_1\right) \setminus C_2,$$

$C_1, C_2 \subset N_0 = \{t \in C : f(t) \ne g(t)\} \subset N$, $\mu N = 0$, следовательно, в силу полноты меры μ, $\mu C_1 = \mu C_2 = 0$. Получаем:

$$\int\limits_C g^+ d\mu = \int\limits_{C \cup C_1} f^+ d\mu - \int\limits_{C_2} f^+ d\mu = \int\limits_C f^+ d\mu < +\infty, \qquad (1)$$

следовательно, $\int\limits_C g\,d\mu$ тоже определен.

Рассмотрим $\int\limits_A g\,d\mu = \int\limits_A g^+\,d\mu - \int\limits_A g^-\,d\mu$. Аналогично (1) имеем:

$$\int\limits_A g^+ d\mu = \int\limits_A f^+ d\mu, \quad \int\limits_A g^- d\mu = \int\limits_A f^- d\mu,$$

то есть $\int\limits_A g\,d\mu = \int\limits_A f\,d\mu$, что и требовалось доказать. □

5. Замечание. Лемма 4 означает, что интеграл Лебега «не различает» эквивалентные функции.

Если же функции f и g не эквивалентны, то интегралы по множеству $A_1 = \{t \in C : g(t) > f(t)\}$ или $A_2 = \{t \in C : g(t) < f(t)\}$ от функций f и g обязательно будут отличаться. Действительно, мера одного из этих множеств положительна (иначе $f \sim g$). Допустим, $\mu A_1 > 0$. Тогда по теореме 5 § 3 (о нулевом интеграле) $\int\limits_{A_1} (g - f)\,d\mu \neq 0$, так как $g - f : A_1 \to [0, +\infty]$. Значит, $\int\limits_{A_1} g\,d\mu \neq \int\limits_{A_1} f\,d\mu$.

6. Замечание. Для любой функции $f \in L(\mu, C)$ существует эквивалентная ей функция $g \in L(\mu, C)$, не принимающая бесконечных значений.

Действительно, если $\int\limits_C f^+ d\mu < +\infty$, $\int\limits_C f^- d\mu < +\infty$, то по свойству

(f) §2 $$\mu\left\{t \in C\ ;\ f^+(t) = +\infty\right\} = 0,\ \ \mu\left\{t \in C\ ;\ f^-(t) = +\infty\right\} = 0.$$

Заменим значения функции f на этих множествах, например, нулевыми значениями. Получим эквивалентную f функцию $g : C \to (-\infty; +\infty)$. При этом $g \in L(\mu, C)$ по лемме 4.

В заключение сформулируем усиленную теорему Лебега о мажорируемой сходимости (см. теорему 10 § 4), используя понятие «почти всюду».

7. Теорема. (Лебега о мажорируемой сходимости). *Пусть* $C \in \Sigma$, $f_n \in L(\mu, C)$ *для всех* $n \in \mathbb{N}$, $f : C \to [-\infty, +\infty]$ *и* ***почти для всех*** $t \in C$ *существует* $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(t) \in [-\infty, +\infty]$, *причем*

$$\lim_{n\to\infty} f_n(t) = f(t) \text{ \textbf{\textit{почти для всех}} } t \in C$$

Пусть еще $g \in L(\mu, C)$ *и*

$$|f_n(t)| \leqslant g(t) \text{ \textbf{\textit{почти для всех}} } t \in C \text{ \textit{и для всех} } n \in \mathbb{N}.$$

Тогда $f \in L(\mu, C)$ *и справедливо равенство*

$$\int\limits_C f \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int\limits_C f_n \, d\mu .$$

Глава 4. Интеграл Лебега на прямой

В этой главе рассматриваются интегралы только по мере Лебега на подмножествах вещественной прямой.

§1. О связи интеграла Римана и интеграла Лебега

Теорема 1. Пусть функция $f:[a;b]\to R$ ограничена. Если существует интеграл Римана $\int_a^b f(x)dx$, то функция f суммируема на [a;b] и интегралы Римана и Лебега совпадают:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{[a;b]} f\,d\mu .$$

Доказательство: Пусть существует интеграл Римана $\int\limits_a^b f(x)dx$. Введем последовательность разбиений T_κ :

$$T_\kappa = \{a = x_0^\kappa < x_1^\kappa < \ldots < x_{n_k}^\kappa = b\},\ T_{\kappa+1} \supset T_\kappa,$$

$\Delta T_\kappa \to 0\ при\ \kappa \to \infty$.

Обозначим $m_i^k = \inf\limits_{x\in(x_{i-1};x_i]} f(x),\ M_i^k = \sup\limits_{x\in(x_{i-1};x_i]} f(x)$.

Определим простые функции $U_k, V_k : [a;b] \to R$ следующим образом:

$$U_k(a) = V_k(a) = f(a),\quad U_k = \sum_{i=1}^{n_k} m_i^k \chi_{(x_{i-1};x_i]},\ V_k = \sum_{i=1}^{n_k} M_i^k \chi_{(x_{i-1};x_i]}.$$

Заметим, что эти функции суммируемы по Лебегу и интегралы от них представляют собой нижнюю и верхнюю суммы Дарбу соответственно:

$$\int\limits_{[a,b]} U_k d\mu = s(f,T_k),\quad \int\limits_{[a,b]} V_k d\mu = S(f,T_k).$$

Очевидно (в силу ограниченности функции f), что последовательности U_k и V_k ограничены; U_k монотонно возрастает, V_k монотонно убывает.

Обозначим через $U(x)$ и $V(x)$ их пределы:

$$U(x) = \lim_{k\to\infty} U_k(x), \quad V(x) = \lim_{k\to\infty} V_k(x).$$

По теореме Лебега о мажорируемой сходимости (первые равенства) функции U и V суммируемы:

$$\int\limits_{[a,b]} U d\mu = \lim_{k\to\infty} \int\limits_{[a,b]} U_k \, d\mu = \int\limits_a^b f(x)dx,$$

$$\int\limits_{[a,b]} V d\mu = \lim_{k\to\infty} \int\limits_{[a,b]} V_k \, d\mu = \int\limits_a^b f(x)dx.$$