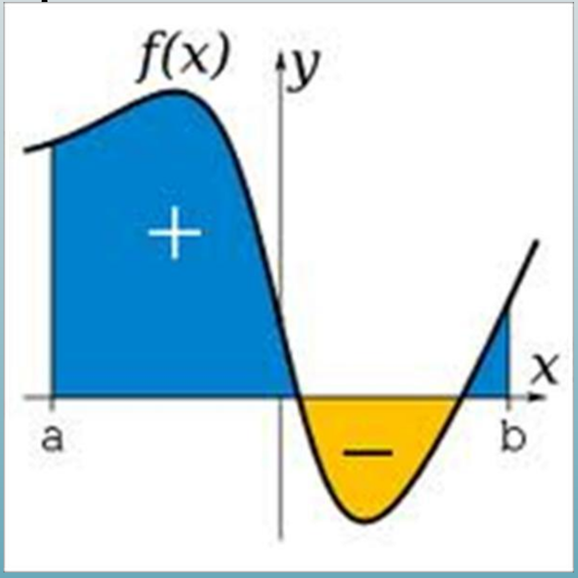
Интегралы

Методы интегрирования.

Выполнила студентка группы СО-11
Раченкова Ольга

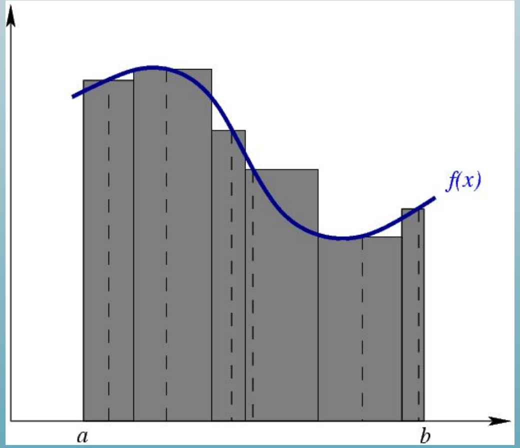
Интеграл функции

- Интеграл функции — аналог суммы последовательности. Неформально говоря, (определённый) интеграл является площадью части графика функции (в пределах интегрирования), то есть площадью криволинейной трапеции.
- Процесс нахождения интеграла называется интегрированием.



Интеграл Римана

- Согласно основной теореме анализа, интегрирование является операцией, обратной дифференцированию, чем помогает решать дифференциальные уравнения. Существует несколько различных определений операции интегрирования, отличающиеся в технических деталях. Однако все они совместимы, то есть любые два способа интегрирования, если их можно применить к данной функции, дадут один и тот же результат. Наиболее простым является интеграл Римана. Графический смысл

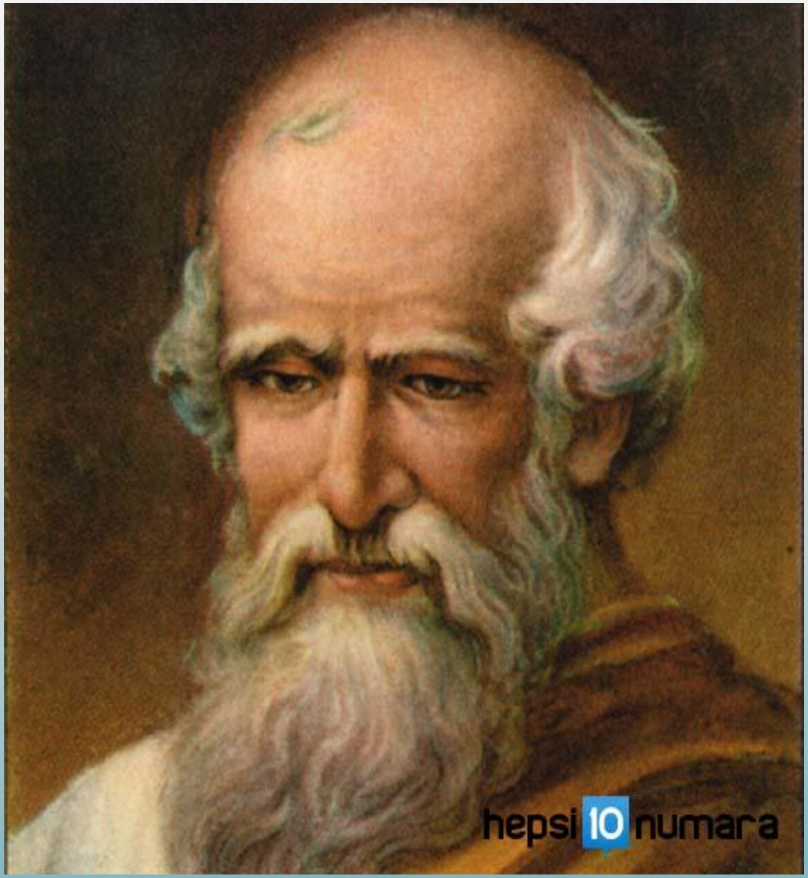


$$S = \sum_i f(x_i)\Delta x_i.$$

- Интегрирование прослеживается еще в древнем Египте, примерно в 1800 г. до н.э, Московский математический папирус демонстрирует знание формулы объёма усеченной пирамиды.

Первым известным методом для расчета интегралов является метод исчерпывания Евдокса (примерно 370 до н.э.), который пытался найти площади и объемы, разрывая их на бесконечное множество частей, для которых площадь или объем уже известны.

Этот метод был подхвачен и развит Архимедом, и использовался для расчета площадей, парабол и приближенного расчета площади круга.



. Аналогичные методы были разработаны не зависимо в Китае в 3-м веке н.э. Лю Хуэйем, который использовал их для нахождения круга.

- Этот метод впоследствии использовали Цзу Чунжи и Цзу Гэн для нахождения объема шара
- Следующий крупный шаг в исследование интегралов был сделан в Ираке, в XI веке, математиком Ибн ал-Хайсаном (известным как Alhazen в Европе), в своей работе «Об измерении параболического тела» он приходит к уравнению четвертой степени.
- Решая эту проблему, он проводит вычисления, равносильные вычислению определенного интеграла, чтобы найти объем параболоида. Используя математическую индукцию, он смог обобщить свои результаты для интегралов от многочленов до четвертой степени.

Методы интегрирования

Метод непосредственного интегрирования

- Метод интегрирования, при котором данный интеграл путем тождественных преобразований подынтегральной функции (или выражения) и применения свойств неопределенного интеграла приводится к одиому или нескольким табличным интегралам, называется **непосредственным интегрированием**.При сведении данного интеграла к табличному часто используются следующие преобразования дифференциала (операция *«подведения под знак дифференциала»*):

$$du = d(u + a), \quad a \text{ — число},$$
$$du = \frac{1}{a}d(au), \quad a \neq 0 \text{ — число},$$
$$u \cdot du = \frac{1}{2}d(u^2),$$
$$\cos u\, du = d(\sin u),$$
$$\sin u\, du = -d(\cos u),$$
$$\frac{1}{u}du = d(\ln u),$$
$$\frac{1}{\cos^2 u} = d(\operatorname{tg} u).$$

- Вообще,
- формула очень часто используется при вычислении интегралов

Примеры:

1 $$\int \frac{dx}{x+3} = \int \frac{d(x+3)}{x+3} = \ln|x+3| + C$$

$$\int (3x-1)^{24}\,dx = \frac{1}{3}\int (3x-1)^{24}\,d(3x-1) = \frac{1}{3}\cdot\frac{(3x-1)^{25}}{25} + C$$

3) $\int \mathrm{ctg}^2 x\,dx = \int \frac{1-\sin^2 x}{\sin^2 x}\,dx = \int \left(\frac{1}{\sin^2 x} - 1\right) dx = \int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx - \int dx =$
$= -\mathrm{ctg}\, x - x + C$ (формулы 10 и 1);

4) $\int \frac{dx}{\sqrt{4-3x^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\int \frac{d(\sqrt{3}\cdot x)}{\sqrt{(2)^2-(\sqrt{3}\cdot x)^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\arcsin\frac{\sqrt{3}\cdot x}{2} + C$ (формула 13);

5) $\int \sin^2 6x\,dx = \frac{1}{2}\int (1-\cos 12x)\,dx = \frac{1}{2}\int dx - \frac{1}{2}\int \cos 12x\,dx = \frac{1}{2}x -$
$-\frac{1}{2}\int \cos 12x\,d(12x)\cdot\frac{1}{12} = \frac{1}{2}x - \frac{1}{24}\sin 12x + C$ (формулы 1 и 6);

Метод интегрирования подстановкой (заменой переменной)

- Метод интегрирования подстановкой заключается во введении новой переменной интегрирования (т. е. подстановки). При этом заданный интеграл приводится к новому интегралу, который является табличным или к нему сводащимся (в случае «удачной» подстановки). Общих методов подбора подстановок не существует. Умение правильно определить подстановку приобретается практикой.

- Пусть требуется вычислить интеграл $\int f(x)\,dx.$
- Сделаем подстановку
- $x = \varphi(t)$, где $\varphi(t)$ - функция, имеющая непрерывную производную.
- Тогда $dx=\varphi'(t)\,dt$ и на основании свойства инвариантности формулы интегрирования неопределенного интеграла получаем формулу интегрирования подстановкой
- Тогда $dx=\varphi'(t)\,dt$ и на основании свойства инвариантности формулы интегрирования неопределенного интеграла получаем формулу интегрирования подстановкой

$$\boxed{\int f(x)\,dx = \int f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)\,dt.} \qquad (30.1)$$

- Формула (30.1) также называется формулой замены переменных в неопределенном интеграле. После нахождения интеграла правой части этого равенства следует перейти от новой переменной интегрирования t назад к переменной x.
- Иногда целесообразно подбирать подстановку в виде t= φ(x), тогда

$$\int f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)\, dx = \int f(t)\, dt, \text{ где } t = \varphi(x).$$

- Другими словами, формулу (30.1) можно применять справа налево

Метод интегрирования по частям

- Пусть $u=u(x)$ и $v=v(x)$ - функции, имеющие непрерывные производные. Тогда $d(uv)=u\cdot dv+v\cdot du$. Интегрируя это равенство, получим

$$\boxed{\int d(uv) = \int u\,dv + \int v\,du \quad \text{или} \quad \int u\,dv = uv - \int v\,du.}$$

- Полученная формула называется **формулой интегрирования по частям**. Она дает возможность свести вычисление интеграла $\int u\,dv$ к вычислению интеграла $\int v\,du$, который может оказаться существенно более простым, чем исходный.

- Интегрирование по частям состоит в том, что подынтегральное выражение заданного интеграла представляется каким-либо образом в виде произведения двух сомножителей и и dv (это, как правило, можно осуществить несколькими сспособами); затем, после нахождения v и du, используется формула интегрирования по частям. Иногда эту формулу приходится использовать несколько раз.
- Укажем некоторые типы интегралов, которые удюбно вычислять методом интегрирования по частям.

- Укажем некоторые типы интегралов, которые удюбно вычислять методом интегрирования по частям.
- 1. Интегралы вида где $\int P(x)e^{kx}\,dx,\ \int P(x)\cdot\sin kx\,dx,\ \int P(x)\cos kx\,dx,$

P(x) - многочлен, К - число. Удобно положить u=P(x), а за dv обозначить все остальные сомножители.

- 2.Интегралы вида $\int P(x)\arcsin x\,dx,\ \int P(x)\arccos x\,dx,\ \int P(x)\ln x\,dx.$

  Удобно положить P(x)dx=dv, а за u обозначить остальные сомножители.

- 3. Интегралы вида $\int P(x)\,\mathrm{arctg}\,x\,dx,\ \int P(x)\,\mathrm{arcctg}\,x\,dx.$, где a и b - числа.
- За и можно принять функциюu=$e^{\alpha x}$.

Применение интеграла

- Площадь фигуры
- Объем тела вращения
- Работа электрического заряда
- Работа переменной силы
- Масса
- Перемещение
- Дифференциальное уравнение
- Давление
- Количество теплоты

Благодарю за внимание!

И помните , ученье-свет, а не ученье-тьма !

Никто из нас не знает, как повернет жизнь.

Будьте благодарны за знания которые Вы получили!