

# ***Интегралы***

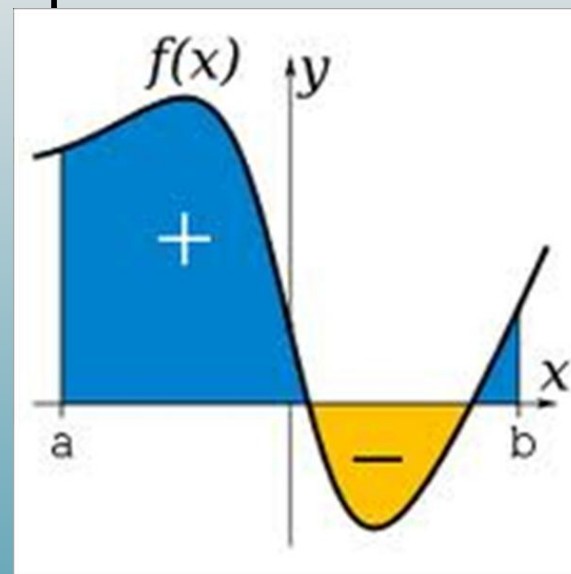
*Методы интегрирования.*

Выполнила студентка группы СО-11

Раченкова Ольга

# Интеграл функции

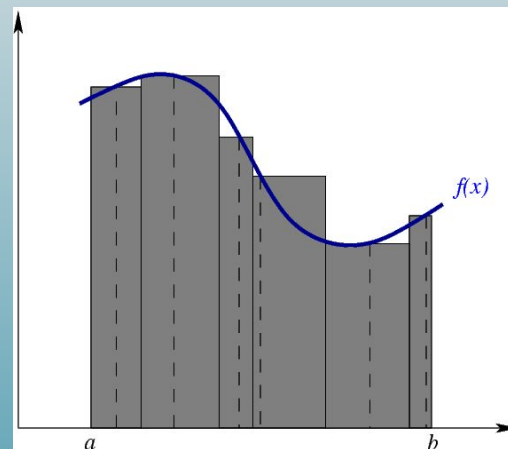
- Интеграл функции — аналог суммы последовательности. Неформально говоря, (определённый) интеграл является площадью части графика функции (в пределах интегрирования), то есть площадью криволинейной трапеции.
- Процесс нахождения интеграла называется интегрированием.



# Интеграл Римана

- Согласно основной теореме анализа, интегрирование является операцией, обратной дифференцированию, чем помогает решать дифференциальные уравнения. Существует несколько различных определений операции интегрирования, отличающиеся в технических деталях. Однако все они совместимы, то есть любые два способа интегрирования, если их можно применить к данной функции, дадут один и тот же результат. Наиболее простым является интеграл Римана. Графический смысл

$$S = \sum_i f(x_i) \Delta x_i.$$



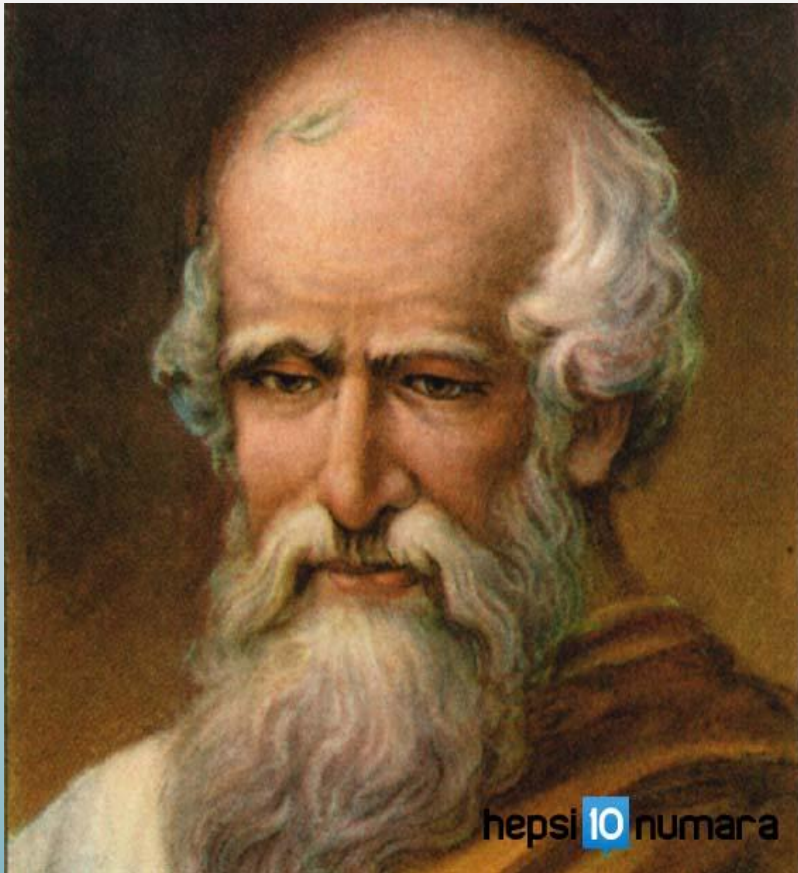


- Интегрирование прослеживается еще в древнем Египте, примерно в 1800 г. до н.э, Московский математический папирус демонстрирует знание формулы объёма усеченной пирамиды.

**Первым известным методом для расчета интегралов является метод исчерпывания Евдокса (примерно 370 до н.э.), который пытался найти площади и объемы, разрывая их на бесконечное множество частей, для которых площадь или объем уже известны.**



Этот метод был подхвачен и развит Архимедом, и использовался для расчета площадей, парабол и приближенного расчета площади круга.



. Аналогичные методы были разработаны не зависимо в Китае в 3-м веке н.э. Лю Хуэйем, который использовал их для нахождения круга.

- Этот метод впоследствии использовали Цзу Чунжи и Цзу Гэн для нахождения объема шара
- Следующий крупный шаг в исследование интегралов был сделан в Ираке, в XI веке, математиком Ибн ал-Хайсаном ( известным как *Alhazen* в Европе), в своей работе «Об измерении параболического тела» он приходит к уравнению четвертой степени.
- Решая эту проблему, он проводит вычисления, равносильные вычислению определенного интеграла, чтобы найти объем параболоида. Используя математическую индукцию, он смог обобщить свои результаты для интегралов от многочленов до четвертой степени.

# *Методы интегрирования*



# Метод непосредственного интегрирования

- Метод интегрирования, при котором данный интеграл путем тождественных преобразований подынтегральной функции (или выражения) и применения свойств неопределенного интеграла приводится к одному или нескольким табличным интегралам, называется **непосредственным интегрированием**. При сведении данного интеграла к табличному часто используются следующие преобразования дифференциала (операция «подведения под знак дифференциала»):

$$\begin{aligned} du &= d(u + a), \quad a \text{ — число,} \\ du &= \frac{1}{a} d(au), \quad a \neq 0 \text{ — число,} \\ u \cdot du &= \frac{1}{2} d(u^2), \\ \cos u \, du &= d(\sin u), \\ \sin u \, du &= -d(\cos u), \\ \frac{1}{u} du &= d(\ln u), \\ \frac{1}{\cos^2 u} &= d(\operatorname{tg} u). \end{aligned}$$

Вообще,

формула очень часто

используется при вычислении интегралов

# Примеры:

$$1) \int \frac{dx}{x+3} = \int \frac{d(x+3)}{x+3} = \ln|x+3| + C$$

$$\int (3x-1)^{24} dx = \frac{1}{3} \int (3x-1)^{24} d(3x-1) = \frac{1}{3} \cdot \frac{(3x-1)^{25}}{25} + C$$

$$3) \int \operatorname{ctg}^2 x dx = \int \frac{1-\sin^2 x}{\sin^2 x} dx = \int \left( \frac{1}{\sin^2 x} - 1 \right) dx = \int \frac{1}{\sin^2 x} dx - \int dx = \\ = -\operatorname{ctg} x - x + C \text{ (формулы 10 и 1);}$$

$$4) \int \frac{dx}{\sqrt{4-3x^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \int \frac{d(\sqrt{3} \cdot x)}{\sqrt{(2)^2 - (\sqrt{3} \cdot x)^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \arcsin \frac{\sqrt{3} \cdot x}{2} + C \text{ (формула 13);}$$

$$5) \int \sin^2 6x dx = \frac{1}{2} \int (1 - \cos 12x) dx = \frac{1}{2} \int dx - \frac{1}{2} \int \cos 12x dx = \frac{1}{2} x - \\ - \frac{1}{2} \int \cos 12x d(12x) \cdot \frac{1}{12} = \frac{1}{2} x - \frac{1}{24} \sin 12x + C \text{ (формулы 1 и 6);}$$

## *Метод интегрирования подстановкой (заменой переменной)*

- Метод интегрирования подстановкой заключается во введении новой переменной интегрирования (т. е. подстановки). При этом заданный интеграл приводится к новому интегралу, который является табличным или к нему сводящимся (в случае «удачной» подстановки). Общих методов подбора подстановок не существует. Умение правильно определить подстановку приобретается практикой.

● Пусть требуется вычислить интеграл

$$\int f(x) dx.$$

● Сделаем подстановку

●  $x = \varphi(t)$ , где  $\varphi(t)$  - функция, имеющая непрерывную производную.

● Тогда  $dx = \varphi'(t) dt$  и на основании свойства инвариантности формулы интегрирования неопределенного интеграла получаем формулу интегрирования подстановкой

● Тогда  $dx = \varphi'(t) dt$  и на основании свойства инвариантности формулы интегрирования неопределенного интеграла получаем формулу интегрирования подстановкой

$$\int f(x) dx = \int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt.$$

(30.1)

- Формула (30.1) также называется формулой замены переменных в неопределенном интеграле. После нахождения интеграла правой части этого равенства следует перейти от новой переменной интегрирования  $t$  назад к переменной  $x$ .
- Иногда целесообразно подбирать подстановку в виде  $t = \varphi(x)$ , тогда

$$\int f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) dx = \int f(t) dt, \text{ где } t = \varphi(x).$$

- Другими словами, формулу (30.1) можно применять справа налево

# Метод интегрирования по частям

- Пусть  $u=u(x)$  и  $v=v(x)$  - функции, имеющие непрерывные производные. Тогда  $d(uv)=u \cdot dv+v \cdot du$ . Интегрируя это равенство, получим

$$\int d(uv) = \int u dv + \int v du \quad \text{или} \quad \int u dv = uv - \int v du.$$

- Полученная формула называется **формулой интегрирования по частям**. Она дает возможность свести вычисление интеграла  $\int u dv$  к вычислению интеграла  $\int v du$ , который может оказаться существенно более простым, чем исходный.

- Интегрирование по частям состоит в том, что подынтегральное выражение заданного интеграла представляется каким-либо образом в виде произведения двух сомножителей и  $dv$  (это, как правило, можно осуществить несколькими способами); затем, после нахождения  $v$  и  $du$ , используется формула интегрирования по частям. Иногда эту формулу приходится использовать несколько раз.
- Укажем некоторые типы интегралов, которые удобно вычислять методом интегрирования по частям.

- Укажем некоторые типы интегралов, которые удобно вычислять методом интегрирования по частям.

- 1. Интегралы вида где  $\int P(x)e^{kx} dx, \int P(x) \cdot \sin kx dx, \int P(x) \cos kx dx,$

$P(x)$  - многочлен,  $K$  - число. Удобно положить  $u=P(x)$ , а за  $dv$  обозначить все остальные сомножители.

- 2. Интегралы вида  $\int P(x) \arcsin x dx, \int P(x) \arccos x dx, \int P(x) \ln x dx.$

Удобно положить  $P(x)dx=dv$ , а за  $u$  обозначить остальные сомножители.

- 3. Интегралы вида  $\int P(x) \operatorname{arctg} x dx, \int P(x) \operatorname{arcctg} x dx.$  , где  $a$  и  $b$  - числа.

- За  $u$  и можно принять функцию  $u=e^{ax}$ .



# *Применение интеграла*

- Площадь фигуры
- Объем тела вращения
- Работа электрического заряда
- Работа переменной силы
- Масса
- Перемещение
- Дифференциальное уравнение
- Давление
- Количество теплоты

*Благодарю за внимание!*

*И помните , ученье-свет, а не ученье-  
тьма !*

*Никто из нас не знает, как повернет жизнь.*

*Будьте благодарны за знания которые Вы  
получили!*