Формула

Пусть $u(x)$ и $v(x)$ - непрерывно дифференцируемые функции, тогда $d(u(x) \cdot v(x)) = u(x)dv(x) + v(x)du(x)$ откуда $u(x)dv(x) = d(u(x) \cdot v(x)) - v(x)du(x)$. Интегрируя последнее равенство получим:

$$\int u(x)dv(x) = u(x)v(x) - \int v(x)du(x)$$

или в сокращённой форме:

$$\int udv = uv - \int vdu. \qquad (1)$$

Полученная формула называется *формулой интегрирования по частям*.

Рекомендации применения метода

Интегрирование по частям применяется в интегралах вида (в нижеследующих равенствах показано, как подводить интегралы к формуле интегрирования по частям)

$$\int x^n \cos\alpha x\,dx = \frac{1}{\alpha}\int \underbrace{x^n}_{u}\,d\underbrace{\sin\alpha x}_{v}$$

$$\int x^n \sin\alpha x\,dx = -\frac{1}{\alpha}\int \underbrace{x^n}_{u}\,d\underbrace{\cos\alpha x}_{v}$$

$$\int x^n e^{\alpha x}\,dx = \frac{1}{\alpha}\int \underbrace{x^n}_{u}\,d\underbrace{e^{\alpha x}}_{v}$$

$$\int x^n \ln^k x\,dx = \frac{1}{n+1}\int \underbrace{\ln^k x}_{u}\,d\underbrace{x^{n+1}}_{v}$$

$$\int x^n \arcsin^k x\,dx = \frac{1}{n+1}\int \underbrace{\arcsin^k x}_{u}\,d\underbrace{x^{n+1}}_{v}$$

$$\int x^n \operatorname{arctg}^k x\,dx = \frac{1}{n+1}\int \underbrace{\operatorname{arctg}^k x}_{u}\,d\underbrace{x^{n+1}}_{v}$$

$$\int \frac{x^k dx}{(1+x^2)^m} = \frac{1}{2}\int \frac{x^{k-1}dx^2}{(1+x^2)^m} = \frac{-1}{2(m-1)}\int \underbrace{x^{k-1}}_{u}\,d\underbrace{\frac{1}{(1+x^2)^{m-1}}}_{v}$$

Примеры нахождения первообразных

Пример 1. Вычислить интеграл $\int xe^x dx$.

Р е ш е н и е. Внесем e^x под знак дифференциала и применим формулу интегрирования по частям, обозначив $x = U$ и $e^x = V$:

$$\int xe^x dx = \int \underbrace{x}_{U} d \underbrace{e^x}_{V} = \underbrace{x \cdot e^x}_{U \cdot V} - \int \underbrace{e^x}_{V} d \underbrace{x}_{U} = xe^x - e^x + C$$

Пример 2. Найти интеграл $\int x^2 \cos 2x\, dx$

Р е ш е н и е. Внесем $\cos 2x$ под знак дифференциала, помня что $\int \cos 2x dx = \frac{\sin 2x}{2} + C$:

$$\int x^2 \cos 2x\, dx = \frac{1}{2} \int x^2 d \sin 2x =$$

и, обозначив $x^2 = U, \quad \sin 2x = V$, применим формулу интегрирования по частям

$$= \frac{1}{2} \int \underbrace{x^2}_{U} d\underbrace{\sin 2x}_{V} = \frac{1}{2} \left(\underbrace{x^2 \cdot \sin 2x}_{U \cdot V} - \int \underbrace{\sin 2x}_{V} d \underbrace{x^2}_{U} \right) =$$

так как $dx^2 = \left(x^2\right)' dx = 2xdx$, то

$$= \frac{1}{2} x^2 \cdot \sin 2x - \frac{1}{2} \int 2x \sin 2x\, dx =$$

найдем отдельно интеграл, повторно применяя метод интегрирования по частям

$$\int 2x \sin 2x\, dx = -\frac{1}{2} \int \underbrace{2x}_{U} d\underbrace{\cos 2x}_{V} = -\left(x \cos 2x - \int \cos 2x\, dx\right) = -x \cos 2x + \frac{1}{2} \sin 2x$$

Таким образом,

$$\int x^2 \cos 2x\, dx = \frac{1}{2} x^2 \cdot \sin 2x - \frac{1}{2} \cdot \left(-x \cos 2x + \frac{1}{2} \sin 2x\right) + C =$$

$$= \frac{1}{2} x^2 \cdot \sin 2x + \frac{1}{2} x \cos 2x - \frac{1}{4} \sin 2x + C.$$

Пример 3. Найти интеграл $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{(x^2+1)^3}}$.

Р е ш е н и е. Внесем x под знак дифференциала и проведем ряд преобразований:

$$= \int \frac{xd\frac{x^2}{2}}{\sqrt{(x^2+1)^3}} = \frac{1}{2}\int x\left(x^2+1\right)^{-\frac{3}{2}} d\left(x^2+1\right) = \frac{1}{2}\int xd\frac{(x^2+1)^{-\frac{3}{2}+1}}{-\frac{3}{2}+1} = -\int xd\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} =$$

Обозначим $x = U, \quad \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} = V$ и применим формулу интегрирования по частям:

$$-\int \underbrace{x}_{U} \underbrace{d\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}}_{V} = -\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} - \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}\right) = -\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} + \ln\left|x+\sqrt{x^2+1}\right| + C.$$

Пример 4. Найти интеграл $\int e^x \cos x dx$.

Р е ш е н и е. Внесем e^x под знак дифференциала и проинтегрируем по частям

$$\int e^x \cos x dx = \int \underbrace{\cos x}_{U} d \underbrace{e^x}_{V} = e^x \cos x - \int e^x d \cos x = e^x \cos x + \int e^x \sin x dx =$$

И снова применим формулу, внеся e^x под знак дифференциала:

$$= e^x \cos x + \int \underbrace{\sin x}_{U} d \underbrace{e^x}_{V} = e^x \cos x + \left(e^x \sin x - \int e^x d \sin x\right) =$$

$$= e^x (\cos x + \sin x) - \int e^x \cos x dx$$

Вернулись к исходному интегралу. Обозначим его I и запишем уравнение:

$$I = e^x (\cos x + \sin x) - I,$$

решая которое, находим искомый интеграл

$$I = \frac{e^x}{2} (\cos x + \sin x) + C.$$

З а м е ч а н и е: Интегралы такого типа, в которых применение несколько раз метода интегрирования по частям приводит к исходному интегралу, называются циклическими.

Найти интеграл $\int x \sin 2x dx$

- $\frac{\cos 2x}{4} - x \sin 2x + C$
- $\frac{\sin 2x}{4} + \frac{x}{2} \cos 2x + C$
- $\frac{\sin 2x}{4} - \frac{x}{2} \cos 2x + C$
- $\sin 2x - x \cos 2x + C$

Найти интеграл $\int x3^x dx$

- $\frac{3^x}{\ln^2 3}(x-1)+C$
- $\frac{3^x}{\ln^2 3}(x\ln 3-1)+C$
- $3^x(x\ln^2 3-1)+C$
- $3^x(x\ln 3-1)+C$

Найти интеграл $\int (x^2 - 2x + 3) \cos x dx$

- $(x^2 - 2x + 1) \sin x - 2(x - 1) \cos x + C$
- $(x^2 - 2x + 3) \cos x + 2(x - 1) \sin x + C$
- $(x^2 - 2x + 1) \sin x - (x - 1) \cos x + C$
- $(x^2 - 2x + 1) \sin x + 2(x - 1) \cos x + C$

Найти интеграл $\int \arccos x dx$

- $x \arccos x - \frac{1}{2}\sqrt{1-x^2} + C$
- $x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C$
- $x \arccos x + \sqrt{1-x^2} + C$
- $x \arccos x - \sqrt{1-x^2} + C$

Найти интеграл $\int \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}} dx$

- $\frac{3}{2}\ln\sqrt[3]{x^2} - \frac{9}{4}\sqrt[3]{x^2} + C$
- $\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}\ln x + \frac{9}{4}\sqrt[3]{x^2} + C$
- $\frac{3}{2}\sqrt[3]{x}\ln x - \frac{9}{4}\sqrt[3]{x} + C$
- $\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}\ln x - \frac{9}{4}\sqrt[3]{x^2} + C$

Найти интеграл $\int (x^2 - x + 1) \ln x dx$

- $\left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x\right) \ln x + \frac{x^3}{9} - \frac{x^2}{4} + C$
- $\left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x\right) \ln x - \frac{x^3}{9} + \frac{x^2}{4} - x + C$
- $(x^3 - x^2 + x) \ln x - x^3 + x^2 - x + C$
- $(x^2 + x - 1) \ln x - x^3 - x^2 - x + C$

Найти интеграл $\int x^2e^{-x}dx$

- $-\left(x^2+2x+2\right)e^{-x}+C$
- $-\left(x^2+2\right)e^{-x}+C$
- $-\left(x^2+2x+2\right)e^{x}+C$
- $\left(x^2+2x+2\right)e^{-x}+C$

Найти интеграл $\int x \cdot \operatorname{arctg} x dx$

- ○ $\frac{x^2+1}{2} \operatorname{arctg} x + \frac{x}{2} + C$
- ○ $(x^2+1) \operatorname{arctg} x - \frac{x}{2} + C$
- ◉ $\frac{x^2+1}{2} \operatorname{arctg} x - \frac{x}{2} + C$
- ○ $\frac{x^2+1}{2} \operatorname{arctg} x - x + C$

Найти интеграл $\int \frac{x dx}{\cos^2 x}$

- $x \cdot \mathrm{tg}\, x + \ln|\sin x| + C$
- $x \cdot \mathrm{tg}\, x + \mathrm{tg}^2 x + C$
- $x \cdot \mathrm{tg}\, x + \ln|\cos x| + C$
- $x \cdot \mathrm{tg}\, x + \frac{1}{2}\mathrm{tg}^2 x + C$

Найти интеграл $\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{x+1}} dx$

- $2\sqrt{x+1}\arcsin x + 4\sqrt{1+x} + C$
- $2\sqrt{x-1}\arcsin x + 4\sqrt{1+x} + C$
- $2\sqrt{x+1}\arcsin x + \sqrt{1-x} + C$
- $2\sqrt{x+1}\arcsin x + 4\sqrt{1-x} + C$