

# Интерполирование функций

# Постановка задачи:

Функция задана таблично:

$x$	$x_0$	$x_1$	$x_2$	$\dots$	$x_n$
$y$	$y_0$	$y_1$	$y_2$	$\dots$	$y_n$

(1)

Вычислить:  $y(x^*)$ ,

$$x^* \neq x_i \tag{2}$$

$$x^* \in [x_0, x_n]$$

$\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$  -сетка или узлы интерполирования

# Постановка задачи:

Построим функцию  $\varphi(x)$  -интерполяционную функцию,

удовлетворяющую условию:

$$\varphi(x_i) = y_i, \quad \text{- условие интерполяции}$$
$$i = \overline{0, n}$$

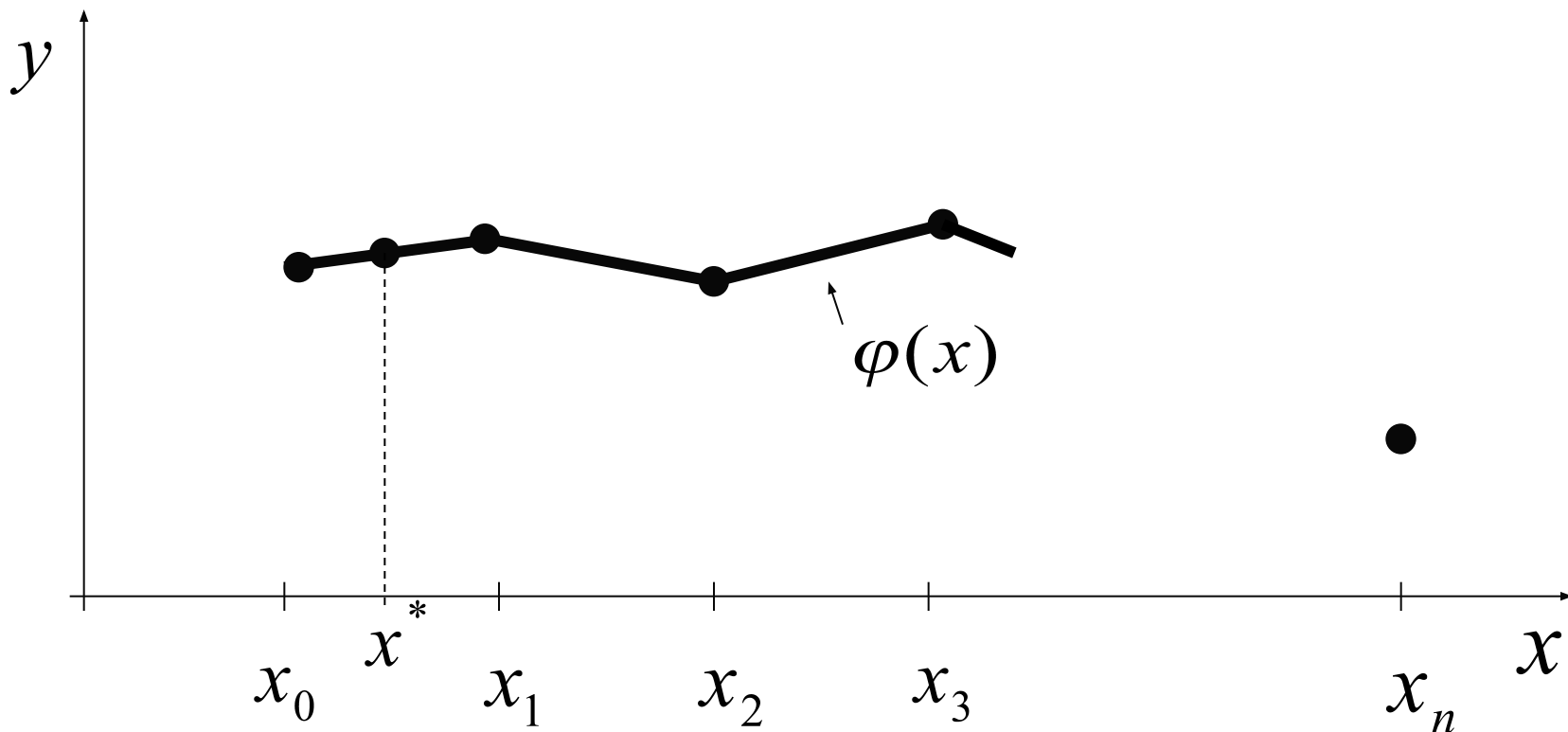
---

тогда

$$y(x^*) \stackrel{\text{считать}}{=} \varphi(x^*)$$

# Линейная интерполяция

Функция  $y(x)$  аппроксимируется на каждом частичном отрезке прямой.



# Расчетные формулы линейной интерполяции

$$\frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} = \frac{y - y_i}{y_{i+1} - y_i} \quad (4)$$

$$y = y_i + \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} (y_{i+1} - y_i) \quad (5)$$

# Квадратичная интерполяция

$$\varphi(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$$

$$x \in [x_{i-1}, x_{i+1}];$$

$$\begin{cases} \varphi(x_{i-1}) = y_{i-1} \\ \varphi(x_i) = y_i \\ \varphi(x_{i+1}) = y_{i+1} \end{cases} \quad \text{- условие интерполирования}$$

# Получение расчетных формул

$$\begin{cases} a_0 + a_1 x_{i-1} + a_2 x_{i-1}^2 = y_{i-1} \\ a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2 = y_i \\ a_0 + a_1 x_{i+1} + a_2 x_{i+1}^2 = y_{i+1} \end{cases} \quad (6)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & x_{i-1} & x_{i-1}^2 \\ 1 & x_i & x_i^2 \\ 1 & x_{i+1} & x_{i+1}^2 \end{vmatrix} \neq 0 \quad - \text{определитель Вандермонда}$$

$a_0, a_1, a_2$  - неизвестные переменные

# Алгоритм

1. Определить отрезок  $[x_{i-1}, x_{i+1}]$ , содержащий  $x^*$
2. Решить систему (6), для определения:  
 $a_0, a_1, a_2$
3. Подставить  $x^*$  в функцию  $\varphi(x)$  при известных коэффициентах  $a$



# Глобальная интерполяция алгебраическими многочленами

$$\varphi(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n \quad (7)$$

$$\varphi(x_i) = y_i - \text{условие интерполирования} \quad (8)$$

$$i = \overline{0, n}$$

(8) – СЛАУ из  $(n+1)$  уравнения с определителем

Вандермонда  $\neq 0 \implies$

(7) существует и единственно

# Интерполяционный многочлен Лагранжа

$$L_n(x) = c_0(x)y_0 + c_1(x)y_1 + \dots + c_n(x)y_n \quad (1)$$

$c_i(x)$  - многочлены  $n$ -ой степени

$y_0, y_1, \dots, y_n$  - значения функций из таблицы

$$L_n(x_i) = y_i \quad \text{- условия интерполирования} \quad (2)$$

$$i = \overline{0, n}$$

# Построение многочленов $c_i(x)$

$$\begin{cases} c_0(x_0)y_0 + c_1(x_0)y_1 + \dots + c_n(x_0)y_n = y_0 \\ c_0(x_1)y_0 + c_1(x_1)y_1 + \dots + c_n(x_1)y_n = y_1 \\ \dots \\ c_0(x_n)y_0 + c_1(x_n)y_1 + \dots + c_n(x_n)y_n = y_n \end{cases}$$

$$c_i(x_j) = \begin{cases} 1, i = j \\ 0, i \neq j \end{cases} \quad (3)$$

# Построение многочленов $c_i(x)$ (продолжение)

$$c_i(x) = (x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})\dots(x - x_n)\lambda \quad (4)$$

$$\lambda = \frac{1}{\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n (x_i - x_j)} \quad (5)$$

$$c_i(x) = \frac{\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n (x - x_j)}{\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n (x_i - x_j)} \quad (6)$$

# Вид интерполяционного многочлена Лагранжа

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^n y_i \frac{\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n (x - x_j)}{\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n (x_i - x_j)} \quad (7)$$

$$\omega(x) = \prod_{j=0}^n (x - x_j) \quad (8)$$

$$\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n (x - x_j) = \frac{\omega(x)}{x - x_i} \quad (9)$$

# Запись интерполяционного многочлена Лагранжа через $\omega$

$$\omega'(x) = \sum_{i=0}^n \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n (x - x_j) \quad (10)$$

$$\omega'(x_i) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n (x_i - x_j) \quad (11)$$

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^n y_i \frac{\omega(x)}{(x - x_i)\omega'(x)} \quad (12)$$

# Частные случаи интерполяционного многочлена Лагранжа

а) линейная интерполяция через точки  $(x_i, y_i)$ ,  $(x_{i+1}, y_{i+1})$

$$L_1(x) = y_i \frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} + y_{i+1} \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} \qquad L_1(x) = y$$

$$y = y_i + \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} (y_{i+1} - y_i)$$

$$y = y_i + y_{i+1} \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} - y_i \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} = y_i \left( \frac{x_{i+1} - x_i - x + x_i}{x_{i+1} - x_i} \right) + y_{i+1} \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} =$$

$$= y_i \frac{x - x_{i+1}}{x_{i+1} - x_i} + y_{i+1} \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i}$$

б) квадратичная интерполяция через точки  $(x_{i-1}, y_{i-1})$ ,  $(x_i, y_i)$ ,  $(x_{i+1}, y_{i+1})$

$$L_2(x) = y_{i-1} \frac{(x - x_{i+1})(x - x_i)}{(x_{i-1} - x_{i+1})(x_{i-1} - x_i)} + y_i \frac{(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})}{(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})} +$$
$$+ y_{i+1} \frac{(x - x_{i-1})(x - x_i)}{(x_{i+1} - x_{i-1})(x_{i+1} - x_i)}$$



# Погрешность интерполирования

$r_n(x)$  <sup>обозн.</sup>  $= y(x) - L_n(x)$  - остаточный член формулы Лагранжа

$$g(s) = y(s) - L_n(s) - k\omega(s) \quad (13)$$

Функция  $g(s)$  имеет  $(n+1)$  нулей  $s = x_i, i = \overline{0, n}$

требуем  $g(x) = 0$

следовательно,  $(n+2)$  нуля

$$g^{(n+1)}(s) = y^{(n+1)}(s) - k(n+1)! \quad (14)$$

Пусть  $s = \xi \implies g^{(n+1)}(\xi) = 0$

$$g^{(n+1)}(\xi) = y^{(n+1)}(\xi) - k(n+1)! = 0 \quad k = \frac{y^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$$

## *Погрешность интерполирования (продолжение)*

Из (13) получим, что

$$k = \frac{y(x) - L_n(x)}{\omega(x)}$$

$$\frac{r_n(x)}{\omega(x)} = \frac{y^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$$

$$r_n(x) = \frac{y^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \omega(x)$$

# Верхняя оценка погрешности $r_n(x)$

$$|r_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \omega(x) \quad (15)$$

$$M_{n+1} = \max_{x \in [x_0, x_n]} |y^{(n+1)}(x)|$$

# Сходимость интерполяционного процесса

Определение: равномерная сходимость означает, что

$$|r_n(x)| \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty$$

Определение: говорят, что интерполяционный процесс для функции  $y(x)$  сходится в точке  $x^* \in [x_0, x_n]$ , если существует

$$\lim_{n \rightarrow \infty} L_n(y(x^*)) = y(x^*)$$

# Интерполяционная формула Ньютона

Разделенными разностями первого порядка называются отношения:

$$y(x_i; x_j) = \frac{y(x_j) - y(x_i)}{x_j - x_i} \quad \begin{array}{l} i, j = \overline{0, n} \\ i \neq j \end{array} \quad (1)$$

По разделенным разностям первого порядка можно построить разделенные разности второго порядка:

$$y(x_i; x_{i+1}; x_{i+2}) = \frac{y(x_{i+1}; x_{i+2}) - y(x_i; x_{i+1})}{x_{i+2} - x_i} \quad (2)$$

# Таблица разделенных разностей

$x$	$y$	первая разделенная разность	вторая разделенная разность	...	n-ая разделенная разность
$x_0$	$y_0$			...	
		$y(x_0; x_1)$		...	
$x_1$	$y_1$		$y(x_0; x_1; x_2)$	...	
		$y(x_1; x_2)$	...	...	$y(x_0; \dots; x_n)$
$x_2$	$y_2$	...	...	...	
...	...		$y(x_{n-2}; x_{n-1}; x_n)$	...	
...	...	$y(x_{n-1}; x_n)$		...	
$x_n$	$y_n$			...	

# Интерполяционные многочлены Ньютона

$$P_n(x) = y_0 + (x - x_0)y(x_0; x_1) + (x - x_0)(x - x_1)y(x_0; x_1; x_2) + \dots + \prod_{i=0}^{n-1} (x - x_i)y(x_0; x_1; \dots; x_n) \quad (3)$$

$$\overline{P_n(x)} = y_n + (x - x_n)y(x_{n-1}; x_n) + (x - x_n)(x - x_{n-1})y(x_{n-2}; x_{n-1}; x_n) + \dots + \prod_{i=1}^n (x - x_i)y(x_0; x_1; \dots; x_n) \quad (4)$$